三角のNewton多角形を持つLaurent多項式の藻類

植田 一石
山崎 雅人

アメーバ

- Gelfand–Kapranov–Zelevinsky により 1994 年に導入.

- トーラスの部分多様体の対数写像.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^\times)^n & \to & \mathbb{R}^n \\ \cup & & \cup \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (\log|x_1|, \ldots, \log|x_n|) \end{array}$$

  による像.

- 実代数幾何やトロピカル幾何、数理物理などに応用を持つ.

藻 (alga)

- トーラスの部分多様体の偏角写像

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^{\times})^n & \to & (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \\ \Cup & & \Cup \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi}(\arg x_1, \ldots, \arg x_n) \end{array}$$

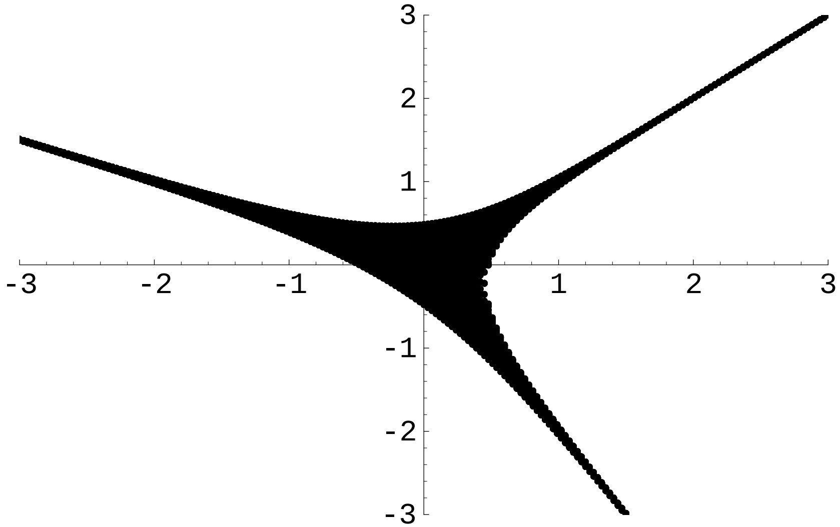
による像.

- Feng–He–Kennaway–Vafa により 2005 年に導入.

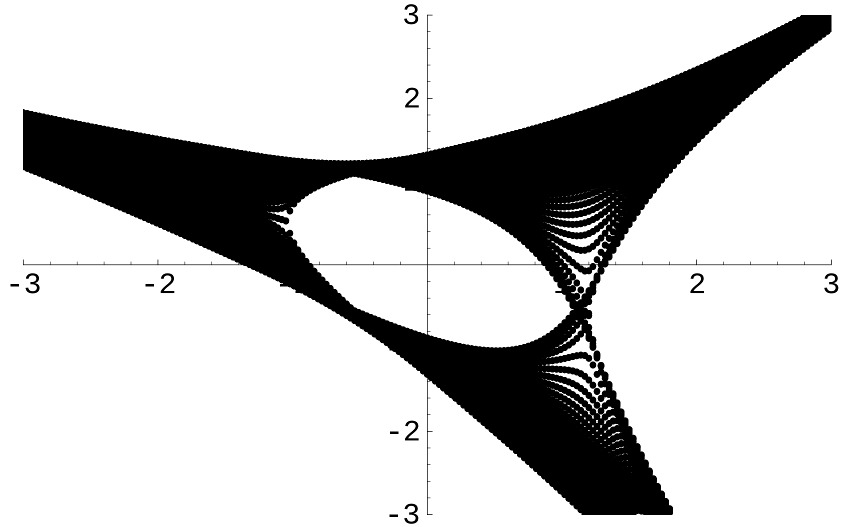
- Tsikh らによってそれ以前からコアメーバ（coamoeba）と呼ばれて研究されていた.

- ホモロジー的ミラー対称性に応用を持つ.

アメーバの例：

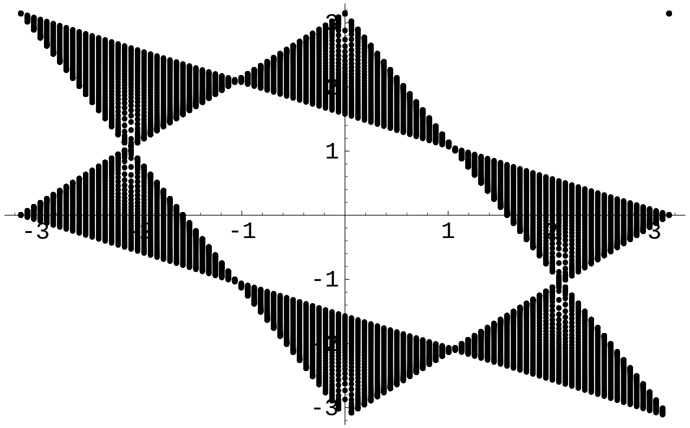


$$x + y + \frac{1}{xy} = 0$$

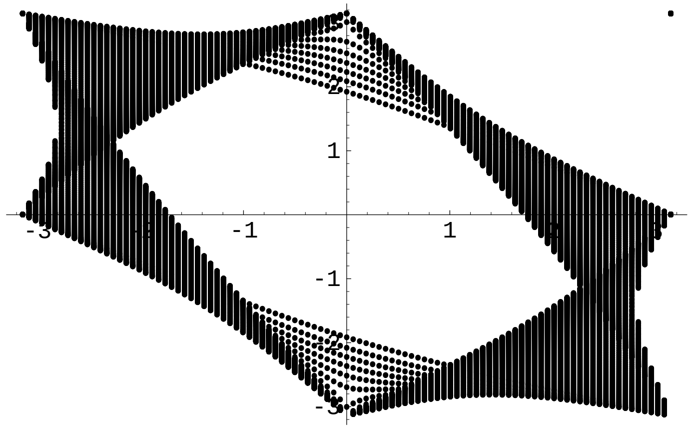


$$x + y + 3 + \frac{1}{xy} = 0$$

藻の例：



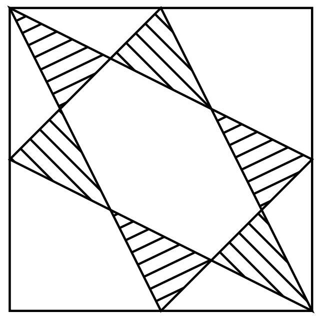
$$x + y + \frac{1}{xy} = 0$$



$$x + y + 3 + \frac{1}{xy} = 0$$

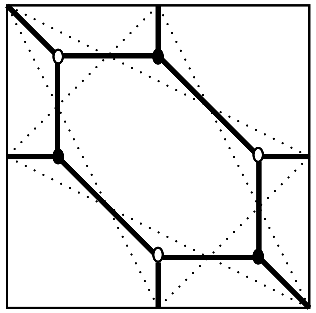
定理

- 2変数のLaurent単項式3つの和で与えられる $W(x,y)$ に対し、$W^{-1}(0)$ の藻は偶数個の開三角形とその頂点の和集合になる.

例：

- $W^{-1}(0)$ からその藻への偏角写像は、各開三角形に制限すると微分同相写像になる.

- この微分同相が向きを保つとき三角形の重心に白丸を、保たないときに黒丸を置き、隣接する三角形の重心を線で結ぶとトーラス上の２色グラフを得る：

例：

- この２色グラフは$W(x,y)$のNewton多角形からHanany–Veghのアルゴリズムで得られるものと一致する.

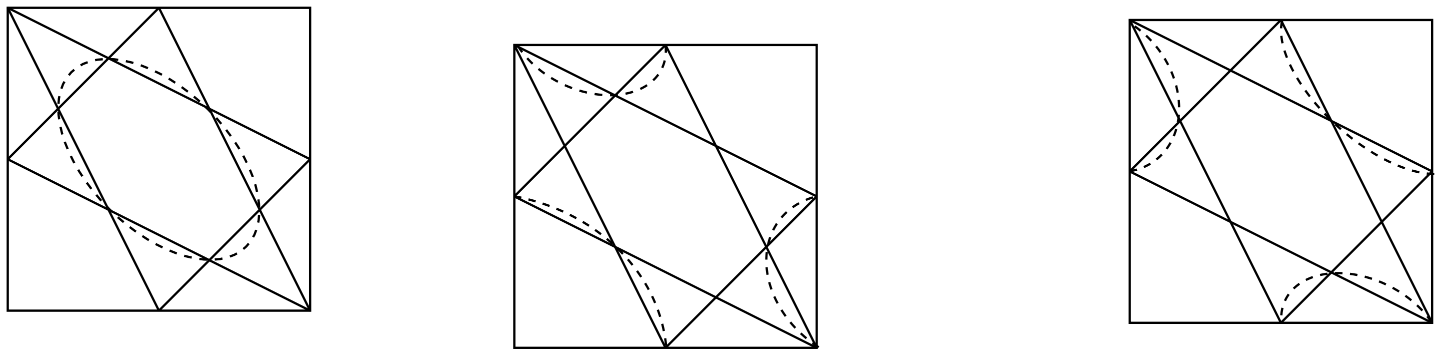
- アメーバの場合：極限操作 (超離散化) によってトロピカル曲線を得る.

- 藻から２色グラフを得る操作は上の操作の類似と考えられる.

スローガン： $\boxed{\text{ブレーンによるタイル張りは「トロピカルな藻」である.}}$

事実

- $W(x,y)=x+y+\frac{1}{xy}$ の時、W の消滅サイクルの偏角写像による像は次の図のようになる：



定理

- $\mathbb{P}^2$ をトーラス $(\mathbb{C}^\times)^2$ の有限部分群で割って得られるオービフォールド（商スタック）に対し、Kontsevich のホモロジー的ミラー予想が成立する.

- 証明には藻を本質的に使う.

まとめ

- 偏角写像の像を藻と呼ぶ.
- ブレーンによるタイル張りは「トロピカルな藻」である.
- 藻はホモロジー的ミラー予想に応用を持つ.

おまけ：ダイマー模型

- ２色グラフのダイマー配置：辺の集合 E の部分集合 D で、任意の頂点に対し、それを端点に持つ辺で D に属するものがただ一つ存在するようなもの.

- 高さの変化 (height change)： トーラス上の２色グラフのダイマー配置に対し、ある方法で整数の組 (h_x, h_y) が対応.

- 特性多項式：$Z = \displaystyle\sum_{\text{ダイマー配置}} (-1)^{h_x h_y + h_x + h_y} x^{h_x} y^{h_y}.$

定理

- 格子三角形 Δ から Hanany-Vegh のアルゴリズムで得られる2 色グラフの特性多項式の Newton 多角形は Δ に一致する.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\Delta : \text{格子三角形}} \arrow[d] & \boxed{\text{特性多項式}} \arrow[l] & \\
\boxed{W^{-1}(0)\,\text{の}\,\mathsf{alga}} \arrow[r] & \boxed{\text{トーラス上の2色グラフ}} \arrow[u] \arrow[r] & \boxed{\text{McKay quiver}}
\end{tikzcd}
$$