

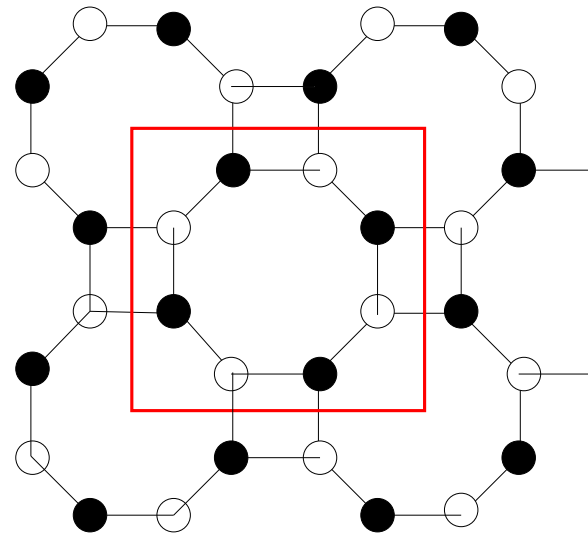
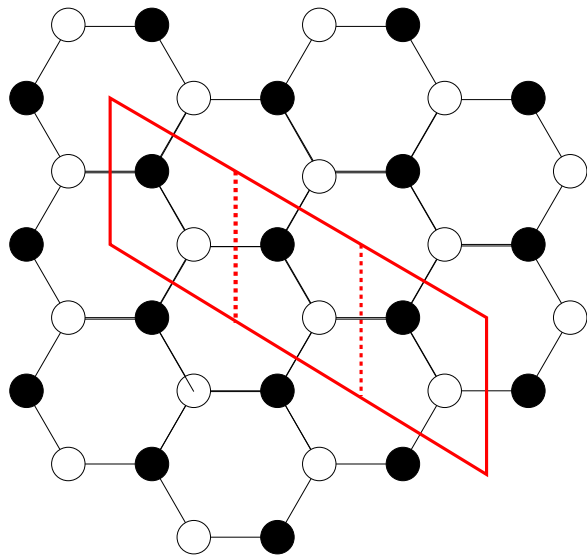
Deformation of Brane Tilings
V.S.
**Exactly Marginal Deformation of
Quiver Gauge Theories**

山崎雅人 (東大本郷)

Based on hep-th/0702049, to appear in Prog. Theor. Phys.
(w/ Y. Imamura, H. Isono and K. Kimura)

イントロダクション

- "Brane Tiling" (2005~, by Hanany et. al.):
 \mathbb{T}^2 上の 2色グラフ (ダイマー) ($+\alpha$)



- brane tiling は、4次元の $\mathcal{N} = 1$ 超共形ゲージ理論を調べるための便利なテクニックである

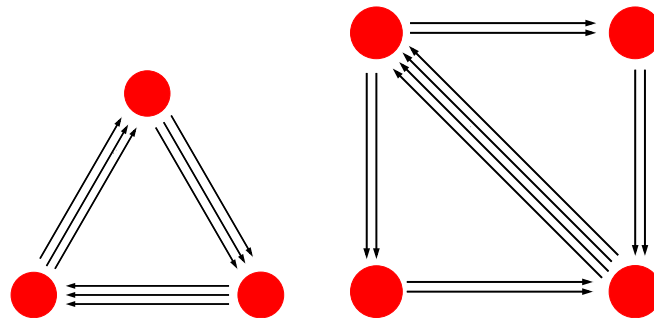
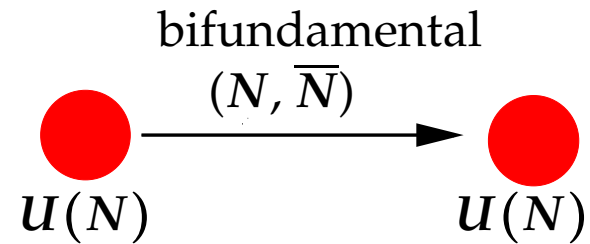
箴 (quiver) ゲージ理論とは

Quiver(箴): "portable case for holding arrows", 有向グラフ

- 箴とは、複雑なゲージ理論を覚えておくための便利な方法である。

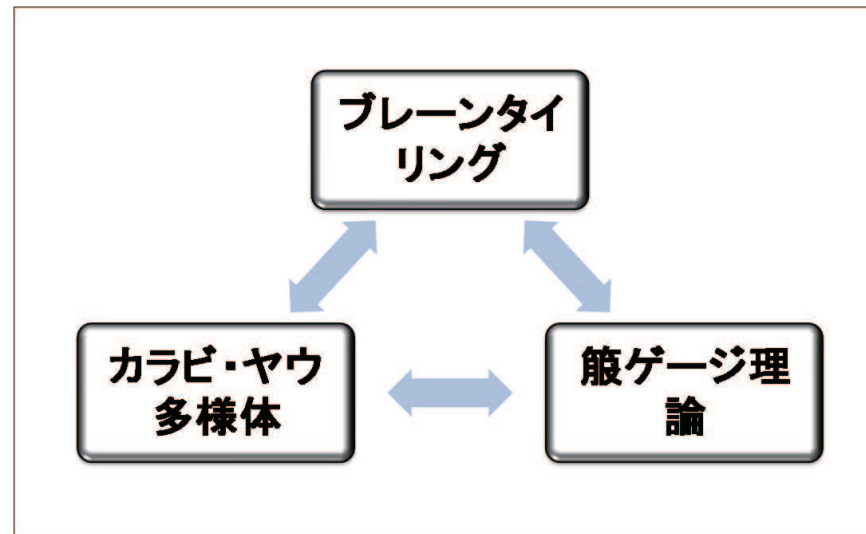
4次元のゲージ理論を考える。

- 頂点=ゲージ群 (rank は全て N とする)
- 矢印=bifundamental



ブレーンタイリングは便利な道具

- 超共形筋ゲージ理論は、Calabi-Yau 多様体を用いて作ることができる。brane tiling は、CY を与えたときに、どのような筋ゲージ理論が現れるか（あるいはその逆）を教える



- AdS/CFT 対応 ($\mathcal{N} = 1$) に応用され、大きな成功を収めた

ブレーンタイリングは本当にブレーンである

- これまでの研究 : brane tiling のグラフとしての構造のみを問題にしてきた。
- しかし、後に brane tiling は、**D5**-branes と **NS5**-branes からなるブレーン系を表していることが明らかになった。
(brane tiling は本当にブレーンである！)

ブレーンタイリングの変形の意味？

- 今や brane tiling は単なるグラフではなく、本当にブレーンであるから、例えばブレーンの変形の自由度が物理的意味を持つ筈である。

疑問：ブレーンタイリングにおける **ブレーンの変形の自由度** の物理的意味は？

答え：箆ゲージ理論の **exactly marginal deformation** に対応する。

目次

1. 概要
2. ブレンタイリングとは
3. 箆ゲージ理論側 : exactly marginal deformation の解析
4. ブレンタイリング側 : ブレーンの変形の自由度の解析
 - 強結合領域
 - 弱結合領域
5. パラメーターの比較
6. まとめと展望

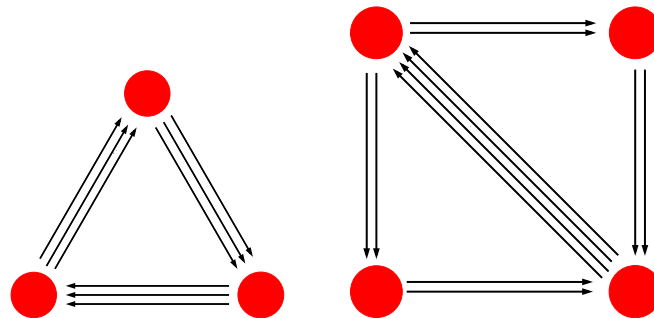
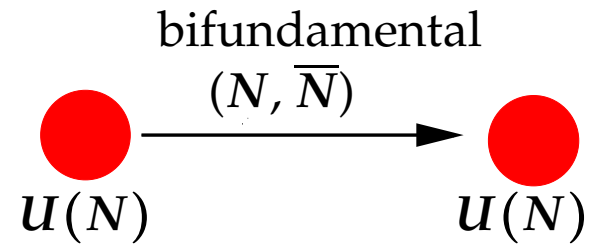
箴 (quiver) ゲージ理論とは

Quiver(箴): "portable case for holding arrows", 有向グラフ

- 箴とは、複雑なゲージ理論を覚えておくための便利な方法である。

4次元のゲージ理論を考える。

- 頂点=ゲージ群 (rank は全て N とする)
- 矢印=bifundamental



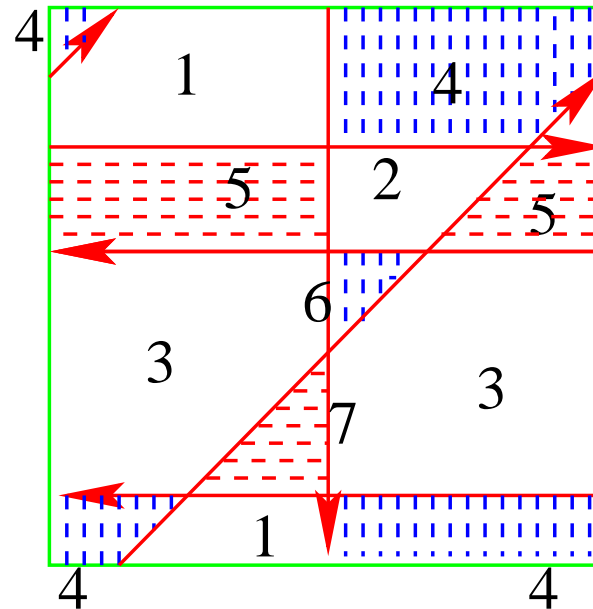
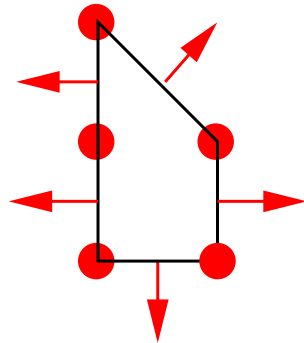
簾ゲージ理論をブレーンでつくる

- N 枚の重なった D5-branes を考え、そのうち 2 方向がコンパクト化されているとする。(→ 4 次元の理論はできるが、簾ゲージ理論ではなく $\mathcal{N} = 4$ SYM)
- NS5-brane を使って、D5-branes (\mathbb{T}^2) を幾つかの領域に分ける。(→ $\mathcal{N} = 1$ SUSY に落ち、かつゲージ群が複数現れる)
- N D5-branes は NS-charge の保存から (N, k) -brane (N 枚の D5-brane と k 枚の NS5-brane の束縛状態) になる。(以下では、 $k = 0, \pm 1$ しか現れないとする。)

箆ゲージ理論をブレンでつくる

- $(N, 0)$ -brane 上にはゲージ群 $U(N)$ がある。(→ $(N, 0)$ -brane はゲージ群 = 箆の頂点に対応する)
- $(N, \pm 1)$ -brane 上には $U(1)$ はあるが、F-string とは結合していない
- $(N, 0)$ -brane と別の $(N, 0)$ -brane の交点には、massless の string がとぶ (→交点は bifundamental = 箆の矢印に対応する)
- $(N, \pm 1)$ -brane の部分には、disk を張ることができ、弦の相互作用が生じる (→ $(N, \pm 1)$ -brane は superpotential の項に対応する)

具体例:SPP

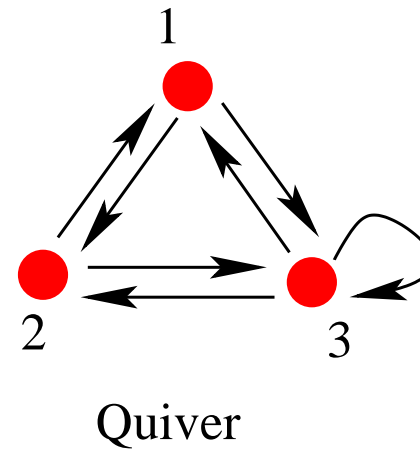
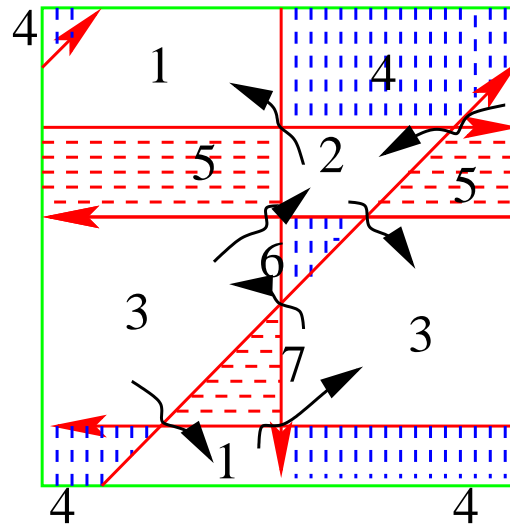


Blue Region: $(N,1)$ -brane

Red Region: $(N,-1)$ -brane

White Region: $(N,0)$ -brane

具体例:SPP

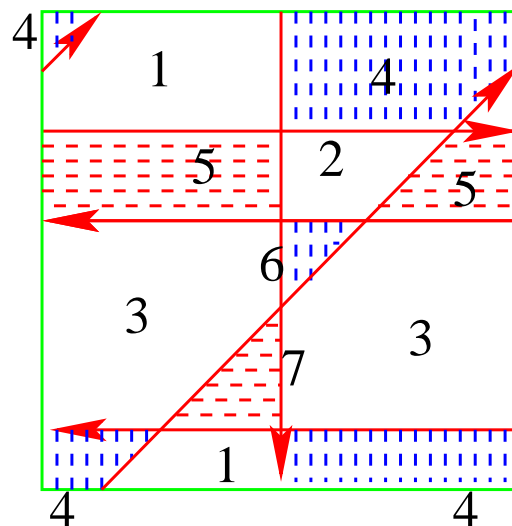


Blue Region: $(N,1)$ -brane
 Red Region: $(N,-1)$ -brane
 White Region: $(N,0)$ -brane

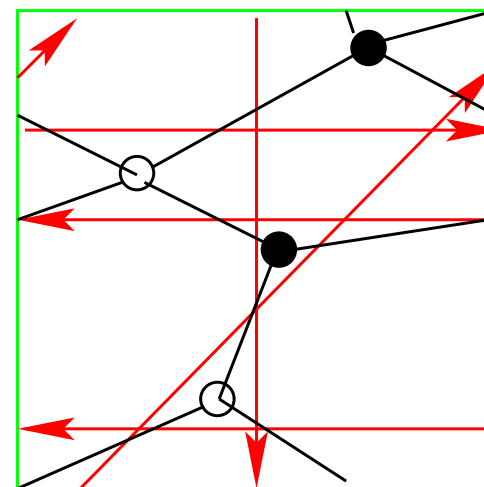
$$W = \text{tr} X_{23} X_{33} X_{32} - \text{tr} X_{33} X_{31} X_{13} + \text{tr} X_{13} X_{31} X_{12} X_{21} - \text{tr} X_{23} X_{32} X_{21} X_{12}$$

2色グラフとの対応

(N,1)-brane に黒の頂点、(N,-1)-brane に白の頂点をおき、それらが交点を持つたびに頂点同士を結ぶと、トーラス上の2部グラフができる。これが冒頭で述べた2部グラフである。



Blue Region: (N,1)-brane
Red Region: (N,-1)-brane
White Region: (N,0)-brane



Dimer Model

籠（を \mathbb{T}^2 上に持ち上げたもの）は、2色グラフの双対である。

対応のまとめ

対応をまとめると：

	2色グラフ	ゲージ理論	簾 (有向グラフ)
$(N, 0)$ -brane	面	ゲージ群	頂点
$(N, 0)$ -brane の交点	辺	bifundamental	矢印
$(N, \pm 1)$ -brane	黒・白の頂点	superpotential	ループ

D5/NS5 系

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D5	○	○	○	○		○		○		
NS5	○	○	○	○		Σ				

5,7 方向はトーラスコンパクト化されている。

- D5 の worldvolume: $\mathbf{R}^4 \times \mathbb{T}^2$
- NS5 の worldvolume: $\mathbf{R}^4 \times \Sigma$
- Σ を 4,6 方向に射影したもの : (p, q) -web (弱結合ではアメーバ)
- Σ を 5,7 方向に射影したもの : brane tiling (弱結合ではコアアメーバ)

記号の整理

- h_k : superpotential coupling のラベル
- k : $(N, \pm 1)$ -brane の面のラベル
- a : $(N, 0)$ -brane の面のラベル
- I : bifundamental のラベル
- μ : NS5-brane のサイクルのラベル
- d : NS5-brane のサイクルの数 (トーリック図の外周の長さ)

目次

1. 概要
2. ブレーンタイリングとは
3. 箆ゲージ理論側 : exactly marginal deformation の解析
4. ブレーンタイリング側 : ブレーンの変形の自由度の解析
 - 強結合領域
 - 弱結合領域
5. パラメーターの比較
6. まとめと展望

Exactly Marginal Deformations

- 4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超共形超ゲージ理論の、共形不変性を保つ変形を考えたい
- 理論のパラメーター : gauge coupling g_a と superpotential coupling h_k
- conformal manifold : $\{\beta_a = \beta_k = 0\} \subset \{g_a, h_k\}$
- 通常は、変数の数と方程式の数が同じなので孤立した解しかないが、超対称性が有るときは、 β 関数が異常次元の1次式で書けるので独立ではなく、marginal deformation が存在する。

NSVZ β -function

- gauge coupling g_a

$$\beta_a \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \frac{1}{g_a^2} = \frac{N}{1 - g_a^2 N / 8\pi^2} \left[3 - \frac{1}{2} \sum_{I \in a} (1 - \gamma_I) \right]$$

(和はゲージ群 $SU(N)_a$ に結合している場にわたって取る)

- superpotential coupling h_k

$$\beta_k \equiv \mu \frac{d}{d\mu} h_k = -h_k \left[3 - \sum_{I \in k} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma_I \right) \right]$$

NSVZ β -function

$$d \left(\frac{1}{g_a'^2} \right) = \left(1 - \frac{g_a^2 N}{8\pi^2} \right) d \left(\frac{1}{g_a^2} \right)$$

なる $g_a'^2$ を使って書き直すと、

$$\frac{1}{N} \beta'_a \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \frac{1}{N g_a'^2} = 3 - \frac{1}{2} \sum_{I \in a} (1 - \gamma_I)$$

$$-\frac{\beta_k}{h_k} \equiv \mu \frac{d}{d\mu} \log h_k = 3 - \sum_{I \in k} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma_I \right)$$

RG 不変な組み合わせ

β 関数は独立ではないので、線形結合（係数 S_a and S_k ）を取って消えるものを探す。

$$\begin{aligned}\beta[S_A] &\equiv \sum_a S_a \frac{1}{N} \beta'_a - \sum_k S_k \frac{\beta_k}{h_k} \\ &= \sum_a S_a \left[3 - \frac{1}{2} \sum_{I \in a} (1 - \gamma_I) \right] + \sum_k S_k \left[3 - \sum_{I \in k} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma_I \right) \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

これは、 $f^{(I)} = \sum_a S_a^{(I)} \frac{1}{Ng_a'^2} - \sum_k S_k^{(I)} \log h_k$ が繰り込み群不変な量であり、conformal manifold を parametrize する。

パラメーターは $d - 1$ 個

γ_I についての式なので、比例する部分と定数項の部分を 0 にする。これより、

$$\sum_{a \in I} S_a = \sum_{k \in I} S_k,$$

言い換えると、各サイクル μ に数 b_μ を assign して、

$$S_A - S_B = b_\mu$$

を満たすようにできる。ここで、二つの面 S_A と S_B は μ を隔てて向かい合っているものとする。

よって、パラメーターの数は、 b_μ の選び方が $d - 2$ 個あり (トーラス上で S_A が 1 価になる条件)、 S_A は b_μ の選び方に加えて overall shift が有るので、 $d - 2 + 1 = d - 1$ 個である。

特別な marginal deformation

2色グラフの詳細によらず、常に次の形の marginal deformation が存在する。

まず、

$$S_A^{(1)} = 1 \quad \forall A, \quad b_\mu^{(1)} = 0 \quad \forall \mu.$$

RG 不変な量は、

$$f^{(1)} = \sum_a \frac{1}{Ng_a'^2} - \sum_k \log h_k \sim 1/(Ng_{\text{diag}}^2)$$

であり、おおざっぱに diagonal $SU(N)$ の gauge coupling g_{diag} になっている : $f^{(1)} \sim 1/(Ng_{\text{diag}}^2)$.

β -like deformation

もう一つは

$$S_A^{(2)} = Q_{\text{NS5}} \quad \text{for } (N, Q_{\text{NS5}}) \text{ face } A, \quad b_\mu^{(2)} = 1 \quad \forall \mu,$$

RG 不変な量は

$$f^{(2)} = \sum_k \pm \log h_k.$$

superpotential couplings のみにより、gauge couplings に依らない。 $\mathcal{N} = 4$ の時の β -deformation の一般化

- これら二つの marginal deformation は、後のパラメータの比較で重要な役割を果たす、

θ -angle も考える

ここまで実パラメーターを考えてきたが、superpotential couplings は複素数であり、また gauge coupling は θ -angles と併せて複素パラメーター

$$\tau_a = \frac{\theta_a}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g_a^2}.$$

をつくる。よって、 $d - 1$ 個の複素パラメーターが marginal deformation の自由度である。

目次

1. 概要
2. ブレーンタイリングとは
3. 箆ゲージ理論側 : exactly marginal deformation の解析
4. ブレーンタイリング側 : ブレーンの変形の自由度の解析
 - 強結合領域
 - 弱結合領域
5. パラメーターの比較
6. まとめと展望

brane tiling 側の解析

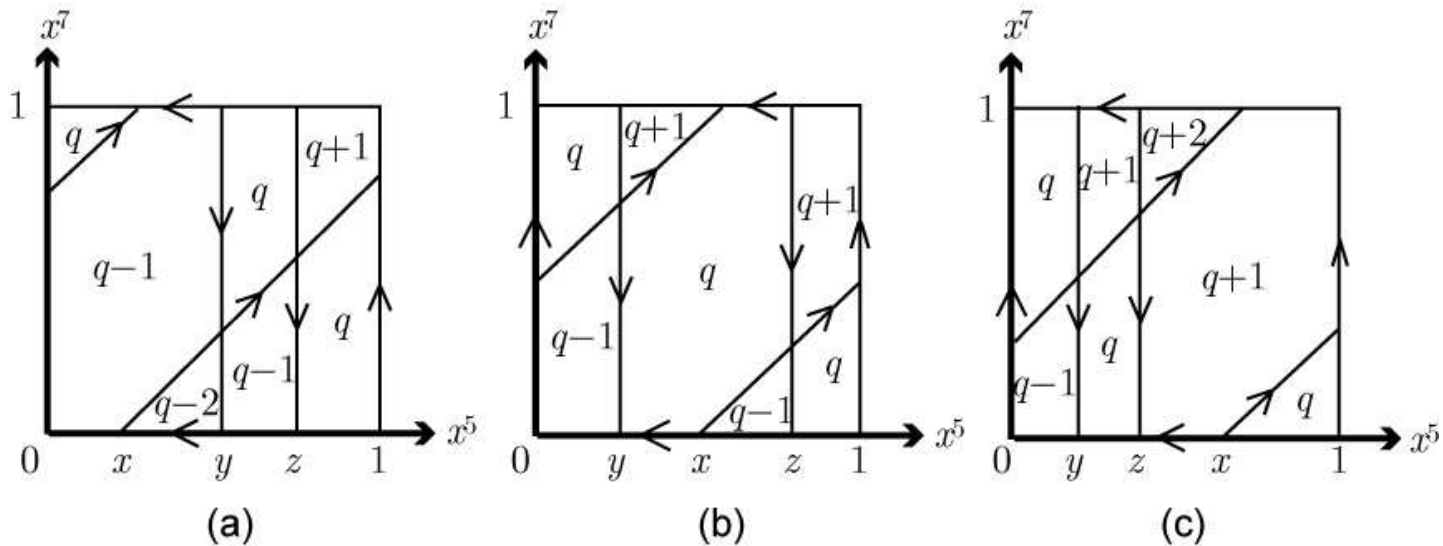
- ブレーンタイリングの変形の自由度は？ $\rightarrow \mathbb{T}^2$ 上で NS5-brane のサイクルの位置を動かすことができる。だから変数は d (NS5 のサイクルの数) だけある
- しかし、 \mathbb{T}^2 は並進不変なので 2 個落ちて $d - 2$ 個になる。
- 更に、 $\mathcal{N} = 1$ の SUSY を保たなくてはいけないので、その条件を調べる必要がある。
結論：以下の条件が満たされていなければいけない。

$$\sum_{\text{faces}} (\text{NS5-charge}) \times (\text{Area}) = 0$$

- よって、 $d - 2 - 1 = d - 3$ 個のパラメーターが残ることになる。

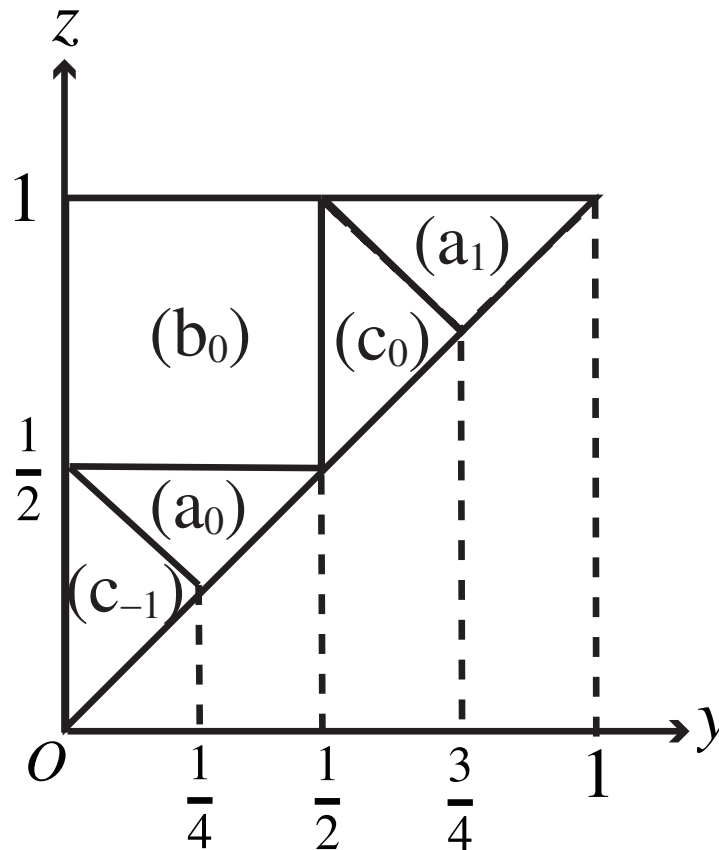
(N,2)-brane の現れ

一般には、(N,k)-brane ($|k| \geq 2$) も現れる。しかし、そのゲージ理論的意味は明らかではない。例：



強結合での「相図」の例

この場合の「相図」は、



目次

1. 概要
2. ブレーンタイリングとは
3. 箆ゲージ理論側 : exactly marginal deformation の解析
4. ブレーンタイリング側 : ブレーンの変形の自由度の解析
 - 強結合領域
 - 弱結合領域
5. パラメーターの比較
6. まとめと展望

g_s について

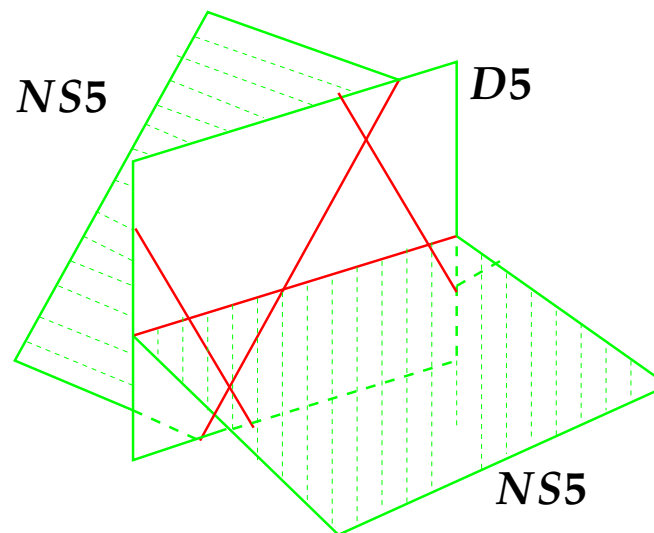
- 実は、今までの brane tiling は全て $g_{str} \rightarrow \infty$ の話。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NS5	○	○	○	○	Σ					
D5	○	○	○	○		○		○		

- D5-brane worldvolume: $\mathbf{R}^4 \times T^2$
- NS5-brane worldvolume: $\mathbf{R}^4 \times \Sigma$

強結合領域

- ブレーンの本当の形は一般には解析的に求めるのは難しい（運動方程式を解かないといけない）が、 $g_s \rightarrow 0$ 及び $g_s \rightarrow \infty$ の極限では求めることができる。
- $g_s \rightarrow \infty$ の時には、 $T_{D5} \gg T_{NS5}$ であり、D5-brane は平らになり、NS5-brane はそれに垂直になる。



弱結合での解析

逆に、 $g_s \rightarrow 0$ なる極限を考えると、

$$T_{NS5} \gg T_{D5}$$

となり、NS5-brane worldvolume Σ は holomorphic curve $\{W(x, y) = 0\} \in (\mathbb{C}^\times)^2$ になる。但し、ここで、

- $x = \exp(x_4 + ix_5), y = \exp(x_6 + ix_7)$

であり、 $W(x, y)$ は、対応するトーリック Calabi-Yau 多様体を指定するトーリック図のニュートン多項式である：

$$W(x, y) = \sum_{c(i,j) \in \Delta} c_{(i,j)} x^i y^j$$

ここに現れる係数 $c_{(i,j)}$ が変形の自由度を表す。

BPS 条件

強結合領域の時と同様に、 $\mathcal{N} = 1$ の SUSY を保つという条件を課さなければいけない。

各 D5-brane 上で保たれている SUSY は、

$$\epsilon_2 = (Z/|Z|)\epsilon_1$$

但し、ここで Z は D5-brane の central charge で、

$$Z = \int_{D5} d \log x \wedge d \log y = \oint_{\partial D5} \log x \frac{dy}{y}$$

で与えられる。ただし、ここで $\partial D5$ とは、NS5-brane の上の 1-cycle (NS5 と D5 の交点) になっている。これらが一致していないといけないので、

$$\arg Z_1 = \arg Z_2 = \cdots = \arg Z_{n_g}.$$

パラメーターの数の勘定

- まず、Newton 多項式の係数（複素数）のうち 3 個が rescale により余分。
- 更に、トーリック図の面積を S とすると、ゲージ群の数が $2S$ 個有ることが知られているので、BPS 条件から $2S - 1$ 個の条件がつく。
- よって、

$$2(I + d - 3) - (2S - 1) = d - 3,$$

但し、 I : トーリック図の内点の数とし、Pick の定理

$$S = I + \frac{d}{2} - 1.$$

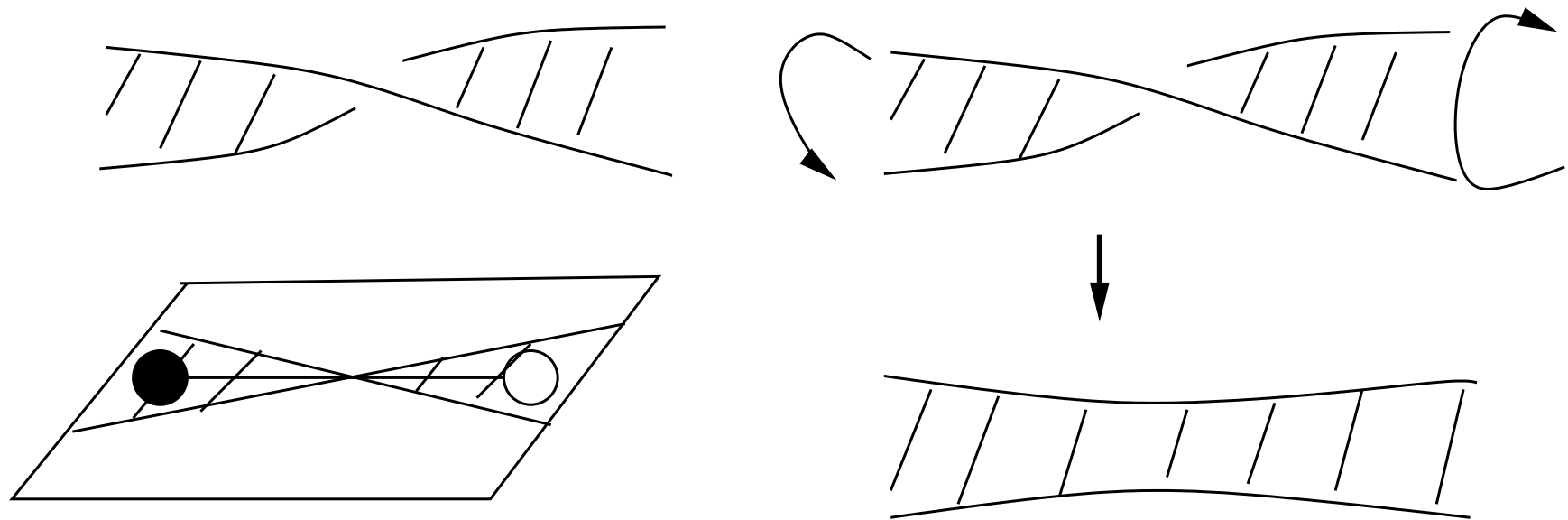
を使った。

Untwist

より具体的に、次元だけではなく変形のモジュライの空間の形まで求めるためには、D5-brane の境界が NS5-brane のどのような 1-cycle に有るかを知る必要がある。

実は、strong coupling の図から、weak coupling に行き、そのサイクルを読み取る方法 *untwisting*

[Feng-He-Kennaway-Vafa] が知られている。

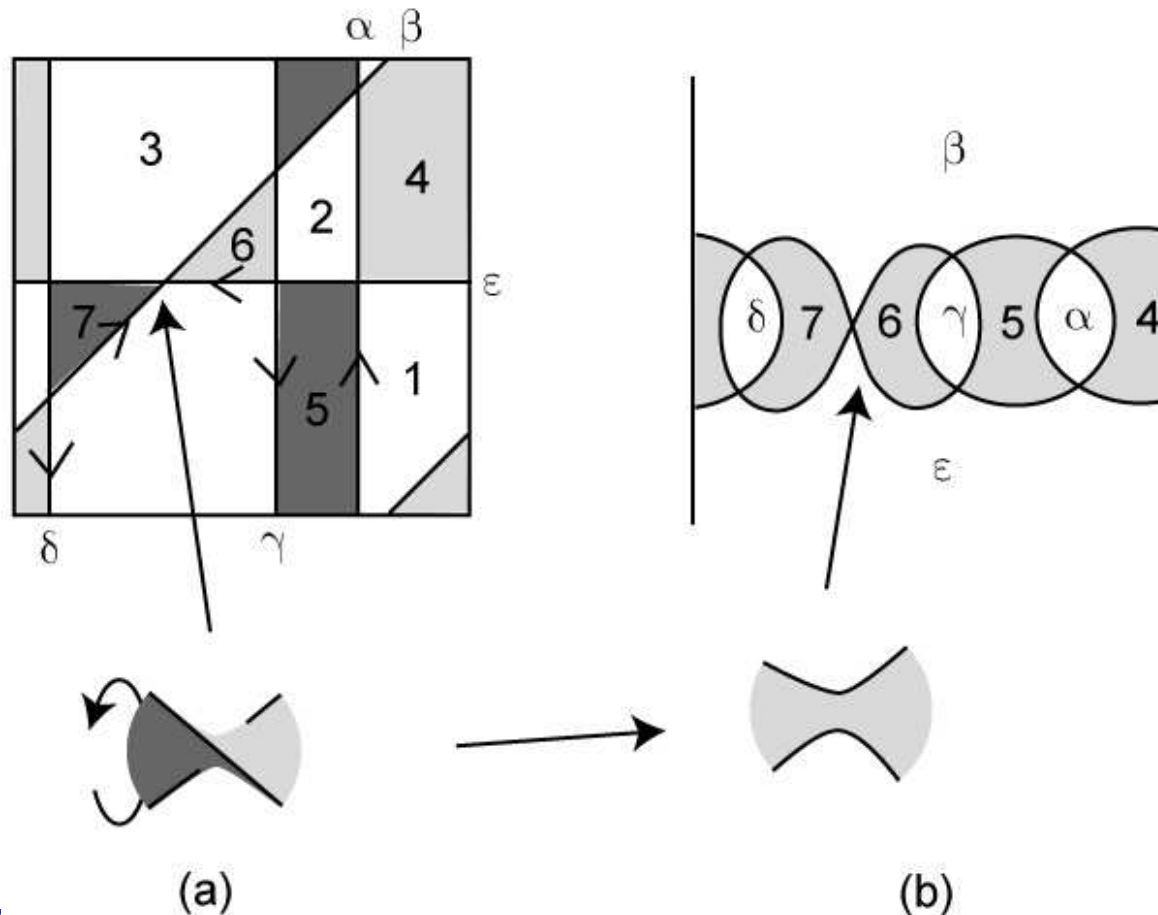


Untwist の結果

- Twist の結果、NS5-brane を表す holomorphic curve $\Sigma(W(x, y) = 0)$ が得られる。この Σ は puncture 付きの Riemann 面になっている。
- \mathbb{T}^2 の winding cycle は Σ の puncture に移される。
- D5-brane (\mathbb{T}^2 の面) は Σ の winding に移される。

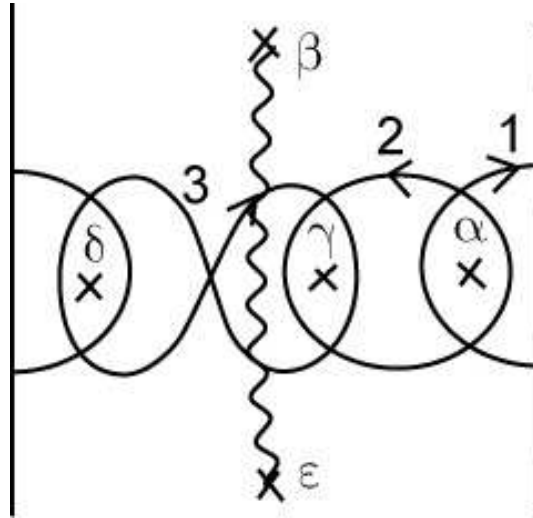
Untwist の例 : SPP

$$P(x, y) = y(x - x_\alpha) + (x - x_\gamma)(x - x_\delta), x_\alpha = -1$$



Untwist の例 : SPP

untwist 後の D5 のサイクルは、



Untwist の例 : SPP

central charge Z を評価すると、

$$Z_1 = \oint_1 \log x \frac{dy}{y} = 2\pi i(\text{Log } x_\alpha - \text{Log } x_\delta),$$

$$Z_2 = \oint_2 \log x \frac{dy}{y} = 2\pi i(\text{Log } x_\gamma - \text{Log } x_\alpha),$$

$$Z_3 = \oint_3 \log x \frac{dy}{y} = 2\pi i(\text{Log } x_\delta - \text{Log } x_\gamma + 2\pi i),$$

これより、BPS 条件は、

$$1 = |x_\alpha| = |x_\delta| = |x_\gamma|.$$

となり、moduli は、 $(S^1)^2$

パラメータの複素化 : Wilson Line

ここまで、ブレーンタイリングの幾何的な変形の自由度を考えて、 $d - 3$ 個の自由度を得た。しかし、ゲージ理論側でパラメーターが複素化されたのと同様に、ブレーンタイリング側でもパラメーターは複素化される筈である。

- 答え : NS5 上の $U(1)$ のサイクル上での Wilson line

$$W_\mu = \oint_{\alpha_\mu} A.$$

このことは、NS5 の場の SUSY 変換をチェックすると確かめられる。

- よって、結局 $d - 3$ 個の複素パラメーターが存在する。

目次

1. 概要
2. ブレーンタイリングとは
3. 箆ゲージ理論側 : exactly marginal deformation の解析
4. ブレーンタイリング側 : ブレーンの変形の自由度の解析
 - 強結合領域
 - 弱結合領域
5. パラメーターの比較
6. まとめと展望

パラメーターの比較

これまでみてきたように、

- ゲージ理論側： $d - 1$ 個の複素パラメーター
- ブレーンタイリング側： $d - 3$ 個の複素パラメーター
(弱結合、強結合ともに)

これらの間の関係は？また数が2違うのはどう説明されるのか？

パラメーターの対応

diagonal gauge coupling $\leftrightarrow C_{57} + ie^{-\phi},$

β -like deformation $\leftrightarrow C + iB_{57},$

残りの $d - 3$ 個の変形 \leftrightarrow
(幾何的変形) $+ i$ (Wilson line)

- ここでは、数の勘定しか紹介していないが、より詳細な解析を行うと、ゲージ理論側の解析で現れた RG 不変な量と、ブレーンタイリング側で現れた変形のパラメーターの対応を具体的につけることができる。また、それにより、diagonal gauge coupling や β -like deformation の対応もチェックできる。

より詳細な対応関係

まず、BPS 条件は、強結合領域で、axion をゼロにしたとき
(実は、弱結合領域でも)

$$\int_{\mathcal{F}} Q(z) d^2z = 0.$$

但し、 $Q(z)$ は、 \mathbb{T}^2 上の位置 z での NS5-charge を与える関数である。 $Q(z)$ は、次のように分解できる：

$$Q(x^5, x^7) = \sum_{\mu=1}^d q_{\mu}(x^5, x^7).$$

但し、関数 q_{μ} は、サイクル μ 上で値が 1 ジャンプする階段関数である。

BPS 条件の読み替え : parameter ζ_μ

そこで、 ζ_μ を

$$\zeta_\mu = \int_{\mathcal{F}_0} q_\mu(x^5, x^7) dx^5 dx^7,$$

のように定義すると、

$$\sum_{\mu=1}^d \zeta_\mu = 0,$$

である。

gauge/superpotential coupling は面積

$SU(N)_a$ の gauge coupling は、D5-brane の DBI action から読み取れて、

$$\frac{1}{Ng_a'^2} \sim \frac{1}{Ng_a^2} \sim \frac{A'_a}{4\pi N g_{\text{str}} \alpha'}$$

ここで A'_a は面 a の面積である。

一方、superpotential coupling は、対応する $(N, \pm 1)$ に巻き付いた string worldsheet から来るので、

$$-\log |h_k| \sim -\log \left(e^{-A'_k/(2\pi\alpha')} \right) = \frac{A'_k}{2\pi\alpha'}$$

gauge/superpotential coupling は面積

これより、

$$\frac{1}{Ng_a'^2} \sim A_{a'} \quad -\log |h_k| \sim A_k.$$

RG 不変な量

$$f^{(I)} = \sum_A S_A^{(I)} A_A = \int_{\mathcal{F}} S^{(I)}(x^5, x^7) dx^5 dx^7,$$

ここで、 $S^{(I)}(x^5, x^7)$ は、点 (x^5, x^7) における S_A の値を表す。 $S_A - S_B = b_\mu$ であるから、

$$S^{(I)}(x^5, x^7) = \sum_{\mu=1}^d b_\mu^{(I)} q_\mu(x^5, x^7) + c,$$

と表すことができ、

$$f^{(I)} = \sum_{\mu=1}^d b_\mu^{(I)} \zeta_\mu + c.$$

背景場との対応

まず、diagonal gauge coupling と対応するのは、 c であり、それは、

$$c = f^{(1)} \sim \frac{1}{Ng_{\text{diag}}^2} \sim \frac{A_{\text{tot}}}{\alpha' e \Phi}.$$

次に、 β -like deformation に対応するのは、

$$f^{(2)} = \sum_{\mu=1}^d \zeta_{\mu} + c.$$

ここに現れた和 $\sum_{\mu=1}^d \zeta_{\mu}$ は、BPS 条件から消えてしまうはずである。実は、今まで BPS 条件として使ってきたのは、axion がゼロの時のものである。よって、これを zero でなくすることは、axion に対応する。

まとめ

- ブレーンタイリングはトーラス上の2色グラフであるが、それ自体 D5-brane と NS5-brane とからなる物理的なブレーン系の情報を表している。
- そのブレーン系は、4次元の $\mathcal{N} = 1$ 超共形筋ゲージ理論を弦理論において実現したものになっている。
- ブレーンタイリングは筋ゲージ理論を調べるために非常に強力な道具である。例えば、Calabi-Yau との関係を明らかにし、筋や superpotential をも読み取ることができる他、AdS/CFT 対応にも応用を持つ。

まとめ (2)

- 我々は、brane tiling によって記述される、広いクラスの $\mathcal{N} = 1$ 超共形ゲージ理論の exactly marginal deformation について調べた。
- generic には、 $d - 1$ 個の複素パラメーターが存在する。但し、 d は NS5-brane のサイクルの数 = perimeter of the corresponding toric diagram. である。
- $d - 1$ 個の複素パラメーターのうち、 $d - 3$ 個はブレーン系の変形の自由度とその上の $U(1)$ の Wilson line に対応し、残りの二つ (diagonal coupling と β -like deformation) は背景場に対応する。

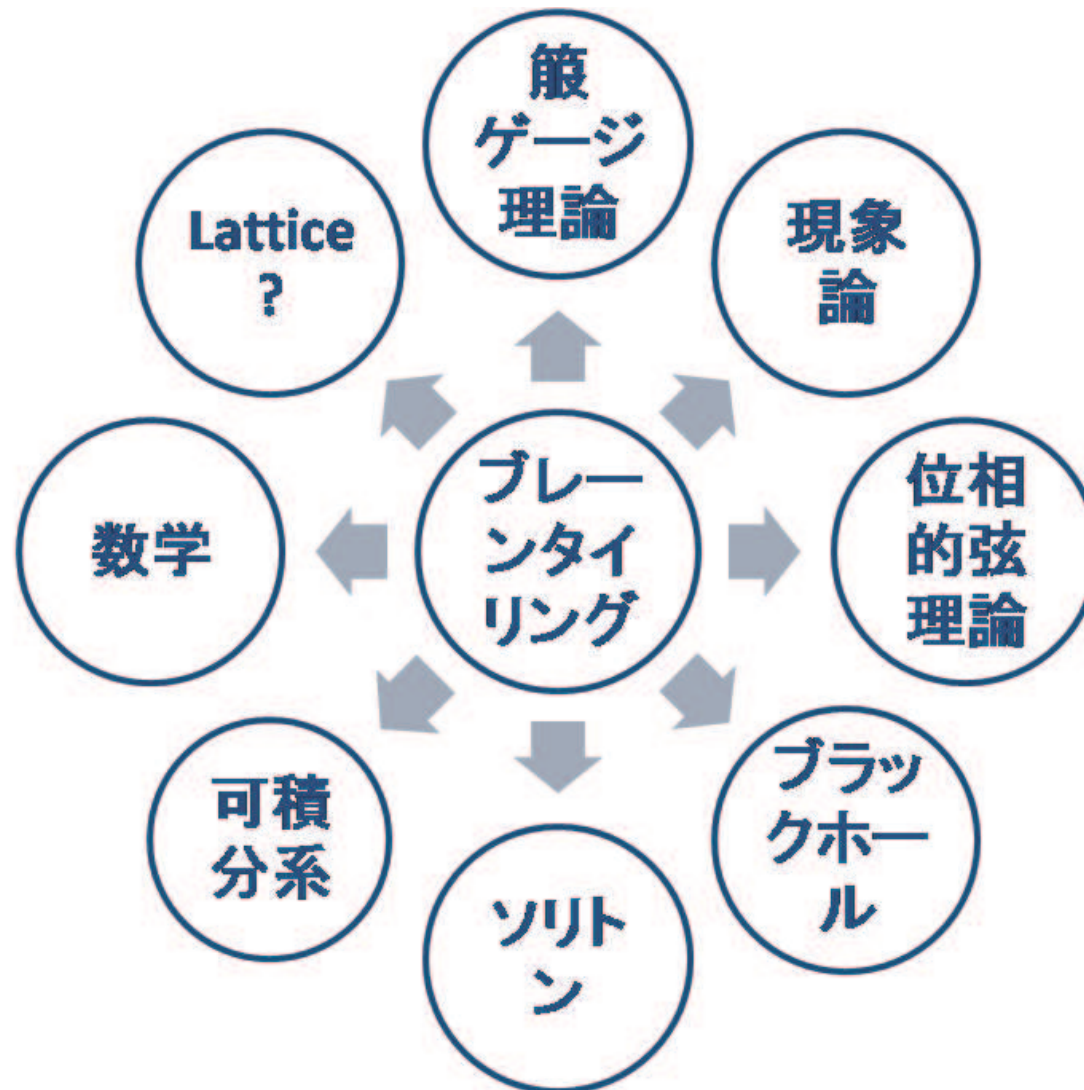
ブレンタイリングに残された課題

- 一般の g_s の場合のブレンの形を求める：現在進行中
- non-conformal な場合への拡張、fractional brane, cascading
- flavor D7-brane を入れると？
- Orientifold, SO , Sp のゲージ群？
- R-charge, a-maximization をどう理解するか？
- 3次元のダイマー？3d $\mathcal{N} = 2$ SCFT? AdS4/CFT3 対応の場合？
- $\mathcal{N} = 1$ の dynamics、例えば gaugino condensation、 χ -SB を brane tiling の立場からどのように理解するか？
 籐ゲージ理論について何か新しい現象が発見できるか？

他分野への広がり

- ホモロジカルミラー対称性への数学的応用 (植田-山崎)
 - 現象論的 model building への応用？ DSB, metastable 真空, gauge mediation
 - 他の次元のブレーンを入れると？ 簾ゲージ理論のソリトン？
 - アメーバ、トロピカル幾何、可積分系との関連？
 - 結晶、3次元の Young 図、Nekrasov の公式、位相的弦理論などとの関連？
 - 簾ゲージ理論の BPS 状態の数え上げ。4次元の index、Black hole との関連
 - 導来圏を使ったアプローチとの等価性？ タキオン凝縮？
- ⋮

妄想？

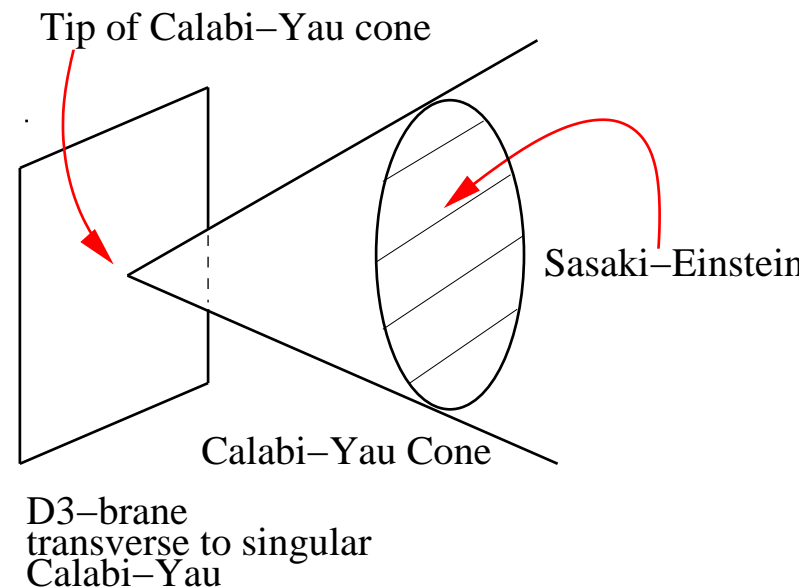


終わり

END

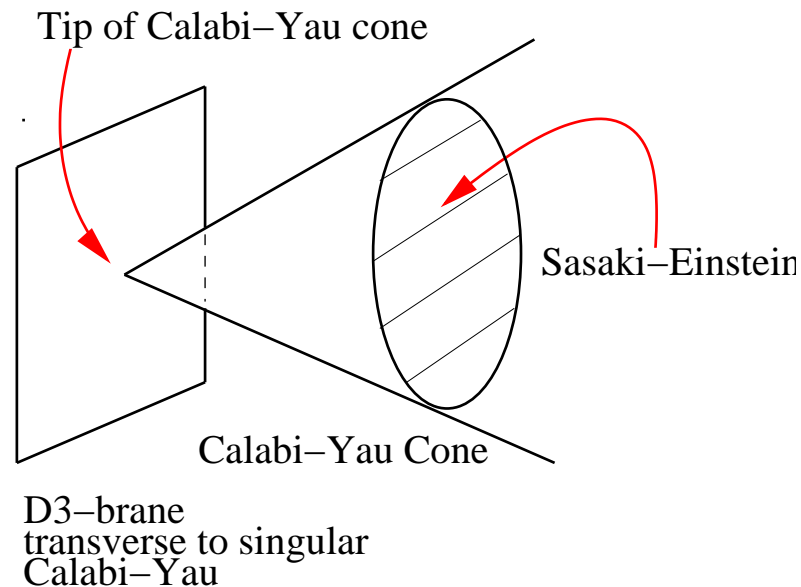
D3-brane で Calabi-Yau をプローブする

- cone-singularity をもつ non-compact Calabi-Yau を考える。
- 更に CY が toric だとする (トーリック図で指定される)。
- D3-brane は CY と transverse であり、CY cone の頂点に置かれる。



D3-brane で Calabi-Yau をプローブする

- D3-brane 上には 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超ゲージ理論が得られると長いこと信じられてきた。
- Q: それでは、どの CY がどの超に対応するのか？
A: ブレーンタイリングが教えてくれる！



AdS/CFT への応用

もっともよく知られた AdS/CFT:

$$\text{IIB on } AdS_5 \times S^5 \Leftrightarrow \mathcal{N} = 4 \text{ SYM}$$

SUSY を $\mathcal{N} = 1$ に落としたい! S^5 を Sasaki-Einstein 多様体 X_5 で置き換える。

局所的には

$$AdS_5 \times X_5 \sim \mathbb{R}^4 \times C(X_5)$$

$$\underbrace{\overbrace{\left(\frac{du^2}{u^2} + u^2 ds_4^2 \right)}^{AdS_5}}_{\text{direct product}} + ds_{X_5}^2 = \underbrace{u^2 ds_4^2 + \frac{1}{u^2} (du^2 + u^2 ds_{X_5}^2)}_{\text{warped product}}$$

AdS/CFT ($\mathcal{N} = 1$ の場合)

AdS/CFT ($\mathcal{N} = 1$ version)

IIB on $AdS_5 \times X_5$ (X_5 : Sasaki-Einstein, $C(X)$: toric CY)
は $\mathcal{N} = 1$ 超共形筋ゲージ理論に双対

ブレーンタイリングは、トーリック CY に対する dual ゲージ理論を教えてくれる！

AdS/CFT の最も簡単な予言：

$$Vol(X_5) = \frac{\pi^3}{4} \frac{1}{a}$$

但し a は central charge。この式は、幾つかの仮定の下、全てのトーリックカラビ・ヤウについて示されている。

AdS/CFT に現れる Brane Tiling の例: $L^{1,7,3}$

