

Coamoeba and Homological Mirror Symmetry for Toric Orbifolds of Toric Del Pezzo Surfaces

山崎雅人*

東京大学理学系研究科物理学専攻

1 はじめに

本講演の内容は、筆者と植田一石氏（大阪大学理学研究科）との共同研究 [1, 2, 3] に基づくものである。

本講演の目標となるのはホモロジー的ミラー対称性である。ミラー対称性とは、シンプレクティック幾何と複素幾何との不思議な対応を主張するものであり、ホモロジー的ミラー対称性とは、その一つの強力な定式化になっている。これから考えたい設定は具体的には次の通りである。

まず、出発点となるのは、格子多角形 Δ である。但し、格子多角形とは、 \mathbb{Z}^2 の有限個の点集合の凸包のことを指す。この時、 Δ の Newton 多項式と呼ばれる Laurant 多項式 $W_\Delta(x, y) \in \mathbb{C}[x^\pm, y^\pm]$ が次のように定義される：

$$W_\Delta(x, y) = \sum_{(i,j) \in \Delta} c_{(i,j)} x^i y^j \quad (1)$$

ただし、ここで $c_{(i,j)}$ は複素数値を取るものとする。また、 Δ を W_Δ の Newton 多項式と呼ぶことにする。このようにして Δ から Laurant 多項式 W_Δ が定まると、今度はこの W_Δ から、有向深谷圏 $D^b \mathfrak{Fut}^\rightarrow W$ と呼ばれる A^∞ 圏を定義することができる。これがシンプレクティック幾何側の設定である。

一方、 Δ から出発して、トーリック Fano 多様体（より正確にはトーリック Fano stack） X_Δ を考えることもできる。この X_Δ 上の接続層の導来圏 $D^b \text{coh } X_\Delta$ を考えることにしよう。これが複素幾何側の設定である。

Kontsevich によるホモジカルミラー対称性 [4] は、この両者が三角圏として一致することを主張するものである：

$$D^b \mathfrak{Fut}^\rightarrow W_\Delta \cong D^b \text{coh } X_\Delta \quad (2)$$

今回の我々の研究のポイントとなるのは、この二つの導来圏の一致を、 Δ から作られる更に別の導来圏 $D^b \text{mod } \mathbb{C}\Gamma^\rightarrow$ をなかだちとして示すことにある。具体的には、まず、 Δ から Hanany-Vegh のアルゴリズム [5] によって、関係付き簇 Γ^\rightarrow を構成する。この関係付き簇の道の代数の表現のなす導来圏が $D^b \text{mod } \mathbb{C}\Gamma^\rightarrow$ である。Hanany-Vegh の構成法は一見すると非常にその意味がわかりづらいが、実は、それは W_Δ^{-1} の「コアメーバ」の漸近境界の情報を表したものであることがわかる。また、この構成の途中には、2 色グラフ（プレーンによるタイル張り、brane tiling）なるものが現れるが、Hanany-Herzog-Vegh の予想 [6] によると、この 2 色グラフから full strong exceptional collection (E_1, \dots, E_N) が構成でき、以下を満たす：

$$\bigoplus_{i,j=1}^N \text{Hom}(E_i, E_j) \cong \mathbb{C}\Gamma^\rightarrow \quad (3)$$

* yamazaki.at.hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp

もしこのことが正しければ、Bondal の定理 [7] より、導来圏の一致が従う：

$$D^b \text{ coh } X_\Delta \cong D^b \text{ mod } \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \quad (4)$$

更に、Feng-He-Kennaway-Vafa[8] は、2色グラフと W_Δ の消滅サイクル (vanishing cycle) との関係を予想した。その予想から、次が従う；

$$D^b \mathfrak{Fut}^\rightarrow W \cong D^b \text{ mod } \mathbb{C}\Gamma \rightarrow \quad (5)$$

(4) と (5) を組み合わせることにより、(2)、つまりホモロジー的ミラー対称性が従うことになる。一般の格子多角形 Δ の場合には、これらはまだ予想でしかないが、我々が示したのは、 X_Δ が \mathbb{P}^2 、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ およびトリック del Pezzo 曲面の時、およびそれらをトーラスの有限部分群で割った orbifold の場合に、これらの主張が成り立ち、従ってホモロジー的ミラー対称性が成り立つと言うことである。以下では、これらのことについてより詳しく見ていくことにしよう。

2 Hanany-Vegh のアルゴリズム

以下では、 Δ が与えられたときに、そこから2色グラフ、更には関係付き籠を構成する Hanany-Vegh の構成法について述べる。

まず、 \mathbb{T}^2 上の2色グラフ (B, W, E) とは、

- 黒い頂点の集合 $B \subset \mathbb{T}^2$
- 白い頂点の集合 $W \subset \mathbb{T}^2$
- 辺の集合 E 。但し、辺 $e \in E$ とは、 \mathbb{T}^2 上の線分で、その一つの端点を B に、もう一つの端点を B に持つとする。また、任意の二つの辺は、その端点のみで交わるとする。

の三つ組みとして定義される。また、籠とは、単に有向グラフのことであり、次のような四つ組 $Q = (V, A, s, t)$ として定義される：

- 頂点の集合 V
- 矢印の集合 A
- 矢印の始点と終点を示す二つの写像 $s, t: A \rightarrow V$

次に、籠 Q に対して、その上の道とは、矢印の列 $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$ で、 $t(a_i) = s(a_{i+1})$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) を満たすものをいう。つまり、各々の矢印の終点が、次の順番 (すぐ左) の矢印の始点になっているものをいう。このとき、 n を道の長さと呼ぶ。また、道というときには、長さ0の道、つまり頂点にとどまってそこから動かない道のことも含めて考えることにする。

さて、次に、籠 Q に対して、道の代数 (path algebra) $\mathbb{C}Q$ を定義しよう。籠 Q の道の代数 (path algebra) $\mathbb{C}Q$ とは、あらゆる道の集合を基底とするベクトル空間に、道の合成によって積構造を入れた代数である：

$$(b_n, b_{n-1}, \dots, b_1) \cdot (a_m, a_{m-1}, \dots, a_1) = \begin{cases} (b_n, b_{n-1}, \dots, b_1, a_m, a_{m-1}, \dots, a_1) & (s(b_1) = t(a_m) \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他の時}) \end{cases} \quad (6)$$

さらに、 Q 及び $\mathbb{C}Q$ の両側イデアル \mathcal{I} の組 $\Gamma = (Q, \mathcal{I})$ のことを、関係付き籠 (quiver with relations) $\Gamma = (Q, \mathcal{I})$ と呼ぶ。

また、箭 Q の頂点の集合 V に定められた順序 $<$ から定まる向きづけられた部分箭 (directed subquiver) Q^\rightarrow とは、 Q から、 $s(a) > t(a)$ を満たす全ての矢印 $a \in A$ を取り除いてできる箭のことであると定義しよう。この時、 $\mathbb{C}Q^\rightarrow$ は $\mathbb{C}Q$ の部分代数であり、 $\mathbb{C}Q$ の両側イデアル \mathcal{I} から $\mathbb{C}Q^\rightarrow$ の両側イデアル $\mathcal{I}^\rightarrow = \mathcal{I} \cap \mathbb{C}Q^\rightarrow$ が誘導される。 $\Gamma = (Q, \mathcal{I})$ に対し、 Γ^\rightarrow が $(Q^\rightarrow, \mathcal{I}^\rightarrow)$ で定義される。

さて、これから考えたい状況では、関係付きの箭において、任意のイデアル \mathcal{I} を考えるのではなく、特にそれがポテンシャル (potential) と呼ばれるものから作られる場合のみを考える。そこで、まず準備として次のような微分を定義しよう。 $p = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ を閉じた道、つまり、 $t(a_n) = s(a_1)$ を満たす道であるとする。このとき、任意の矢印 b による p の微分を、

$$\frac{\partial p}{\partial b} = \sum_{i=1}^n \delta_{a_i, b}(a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}) \quad (7)$$

により定義する。但し、ここで、 $\delta_{a,b}$ は、

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 1 & (a = b \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他の時}) \end{cases} \quad (8)$$

で定義されるものとする。この微分は、線形に拡張することで、閉じた道の形式和に対する微分に拡張することができる。さて、ポテンシャル Φ とは、閉じた道の形式和のことである。このポテンシャルから、両側イデアル \mathcal{I} が、

$$\mathcal{I} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right)_{a \in A} \quad (9)$$

により定まる。そこで、今から、関係付き箭 $\Gamma = (Q, \mathcal{I})$ において、 \mathcal{I} が Φ から定まるようなものを特に考えることにし、 $\Gamma = (Q, \partial \Phi)$ と書くことにする*1。

さて、いよいよ Hanany-Vegh の構成法を定式化しよう。

$\Delta \in \mathbb{R}^2$ を格子多角形とする。 Δ の辺とは、 Δ の境界からその格子点を除いたもの $\partial \Delta \setminus (\partial \Delta \cap \mathbb{Z}^2)$ の連結成分であるとする。 Δ の各辺 a に対して、 \mathbb{T}^2 上に向き付けられた辺 L_a を、 a の外向きの法線の方向に描く。どの3つの L_a も、共通の一点では交わらないものとする。 L_a には、平行移動するだけの自由度がまだ不定で残っていることに注意しよう。この時、 $\{L_a\}_a$ は \mathbb{T}^2 を有限個の多角形の領域 $\{P_i\}_{i=1}^m$ に分割する。多角形 P_i は、 L_a および P_i から誘導される $L_a \cap P_i$ の向きが全ての辺 a について一致するとき白、全ての辺について逆であるとき黒であると呼ばれる。また、白または黒の多角形のことを、色つきの多角形と呼ぶことにしよう。この時、 $(\cup_a L_a) \setminus (\cup_{a,b} (L_a \cap L_b))$ の連結成分はたかだか一つの色つき多角形の境界にしかならないが、もし任意の連結成分がある色つき多角形の境界になっているときには、 $\{L_a\}_a$ は admissible と呼ばれる。

例として、図1の三角形 Δ_2 の場合を考えよう。図2及び図3に示されているように、4つの直線を Δ_2 の辺の法線の傾きになるように配置すると、組み合わせ的に二つの配位が考えられる。図2では、 $(\cup_a L_a) \setminus (\cup_{a,b} (L_a \cap L_b))$ の全ての連結成分が色つきの多角形の境界になっているので admissible な配位を表すが、図3では、 $(\cup_a L_a) \setminus (\cup_{a,b} (L_a \cap L_b))$ の連結成分で、点線で書かれたものは、どの色つき多角形の境界にもなっていない。よって、図1の多角形 Δ_2 は、組み合わせ論的にただ一つの admissible な配位を持つことがわかる。一般の格子多角形 Δ に対しては、admissible な配位が組み合わせ論的にいくつ存在するかは知られていないが、我々が取り扱った $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ およびトーリック del Pezzo の時には、具体的に全ての可能な配位を書き出すことにより、admissible な配位は (鏡映で移り合うものを除いて) 一意であることが示される。

*1 なお、正確にはこの量 Φ は物理ではポテンシャルではなく、スーパーポテンシャル (superpotential) と呼ばれているものであるが、ここではポテンシャルと呼んでしまった。

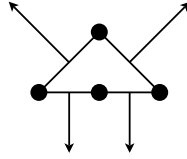


図1 格子三角形 Δ_2

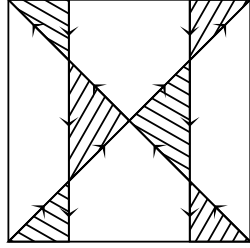


図2 admissible な配位

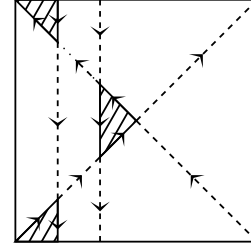


図3 admissible でない配位

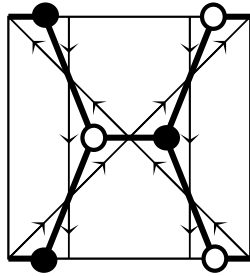


図4 2色グラフ

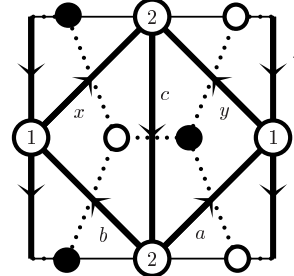


図5 筋

さて、このようにして admissible な配位が $\{L_a\}_a$ が与えられたときに、 \mathbb{T}^2 上の 2 色グラフ (brane tiling) を次のように定義することができる：白の頂点の集合 W は白の多角形の重心の集合、黒の頂点の集合 B は黒の多角形の重心の集合とする。色つき多角形の組がその頂点を共有するとき、多角形の重心は直線で結ばれるものとする。

更に、プレーンによるタイル張り (B, W, E) から、関係付き筋 $\Gamma = (Q, \partial\Phi) = (V, A, s, t, (\partial\Phi))$ を次のようにして読み取ることができる。まず、頂点の集合 V は $T \setminus (\bigcup_{e \in E} e)$ の連結成分の集合とし、矢印の集合 A は、2 色グラフの辺の集合 E と同じとする。但し、矢印の向きは、白の頂点 $w \in W$ が矢印の右側になるように定める。つまり、一言で言えば、筋は 2 色グラフの双対グラフであり、その向きは、2 色グラフの白から黒へ向かう向きから (-90° 回転することで) 定められているのである。

最後に、関係を定めるポテンシャル Φ の定義は

$$\Phi = \sum_{w \in W} c(w) - \sum_{b \in B} c(b)$$

但し、 $c(w)$ は w を時計回りにまわる閉路で、 $c(b)$ は b を反時計回りに回る閉路である。

具体例として、図 4 には、admissible な配位 2 に付随した 2 色グラフを、さらに図 5 には筋を示した。この場合のポテンシャルは

$$\Phi = cxb - cya + yza - xzb.$$

で与えられる。

なお、この例のように、特に Δ が三角形であるときには、Hanany-Vegh の構成法から定まる籠は、McKay 対応に現れる籠であることがわかる。つまり、次の定理が成り立つ：

定理 1 (植田・山崎 [1]). Δ を格子三角形とし、 A を $SL_3(\mathbb{C})$ の離散部分群であり、 \mathbb{C}^3/A が、 $\Delta \times \{1\}$ を最高次元の錘として持つような扇から構成されるトーリック多様体と一致するとする。このとき、 Δ から Hanany-Vegh のアルゴリズムによって作られる関係付きの籠は、 A の McKay 籠に一致する。

また、ここまでは Δ から 2 色グラフを構成する方法を説明してきたが、逆に 2 色グラフから、Kasteleyn 行列という組み合わせ論的な手続きを経ることによって、逆に Δ の情報を取り出すこともできる。 Δ が三角形の時の詳細については [1] に書かれているので参照されたい。

3 コアメーバ

さて、ここまで Hanany-Vegh の構成法について説明してきたが、その構成法は天下りであり、それだけでは意味がわかりづらい。実は、Hanany-Vegh の構成法は、コアメーバと密接に関係していることがわかるのである。そこで、まずアメーバやコアメーバについて述べておくことにしよう。

$W_\Delta(x, y)$ の零点集合 $W_\Delta^{-1}(0)$ の対数写像 Log による像のことをアメーバ (amoeba) と呼ぶ*2：

$$\begin{array}{ccc} \text{Log} : (\mathbb{C}^\times)^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ (x, y) & \mapsto & (\log |x|, \log |y|). \end{array}$$

アメーバは、Gel'fand-Kapranov-Zelevinsky[9] によって超幾何関数の研究に関連して導入されたものであるが、実代数幾何 (ヒルベルトの第 16 問題)、トロピカル幾何や数理論理学などとも関係した豊かな内容を持つ。アメーバの具体例を図 6 に示した。

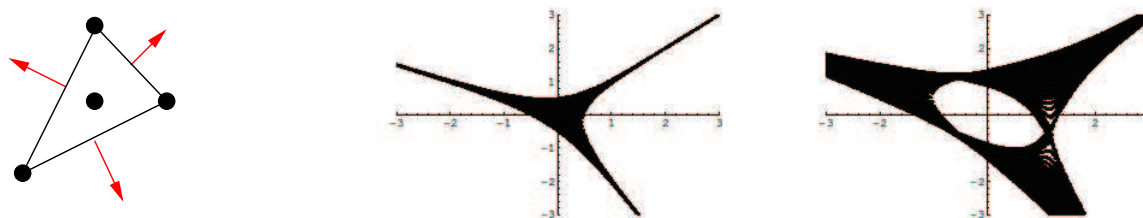


図 6 Δ の例と対応するアメーバの例

アメーバの内部の形は、Newton 多項式の係数によって複雑に変化するが、アメーバの「触角」、つまり漸近形は、 Δ の法線と同じ傾きを持つことが見て取れるだろう。

一方、アメーバの親戚として、コアメーバ (coamoeba)*3 という概念が、物理学者によって 2005 年に導入

*2 より一般に $(\mathbb{C}^\times)^n$ でも同様に定義できるが、ここでは $n = 2$ の場合のみを扱う。

*3 コアメーバとは、[8] 以前に Passare や Tsikh 等によってつけられた名前であり、[8] では、同じ概念が再発見され藻 (alga) と呼ばれた。どちらの名前が定着するかは、現時点ではまだ分からない。また、コアメーバの訳語としては、そのままコアメーバあるいは余アメーバ、虚アメーバなどが考えられる。

された [8]。コアメーバを定義するには、上の定義で、 \log の部分を偏角に取り替えてやればよい：

$$\begin{aligned} \text{Arg} : (\mathbb{C}^\times)^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \\ \Psi &\quad \quad \quad \Psi \\ (x, y) &\mapsto \frac{1}{2\pi}(\arg(x), \arg(y)). \end{aligned}$$

つまり、コアメーバとは、 $\text{Arg}(W_\Delta^{-1}(0))$ のことである。

例として、 Δ が三角形の時の例をプロットしたのが図 3 である。

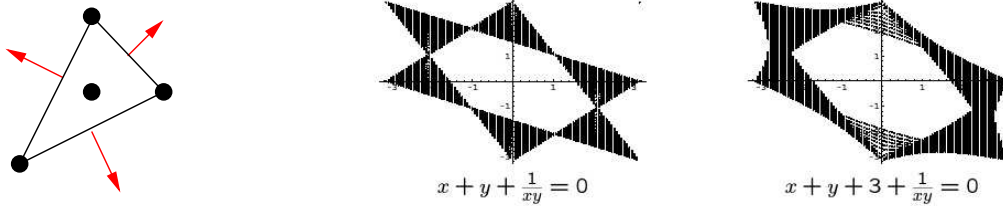


図 7 Δ の例と対応するコアメーバの例

コアメーバの時も、アメーバの時と同様、係数の取り方を変えることによって複雑に変化するが、係数をうまく選ぶと、驚くべきことに境界がきれいな直線になっていることが見て取れる。また、コアメーバの境界が直線でないときでも、その境界は直線に漸近していることが見て取れるだろう。これは、次のようにして理解することができる。

Δ の辺 e に対し、 $(n(e), m(e)) \in \mathbb{Z}^2$ を外向きの法線ベクトルとし、 $l(e)$ を辺 e の定義式が

$$n(e)i + m(e)j = l(e).$$

となるような整数とする。このとき、辺 e についての W_Δ の主要項とは、

$$W_e(x, y) = \sum_{n(e)i + m(e)j = l(e)} a_{ij} x^i y^j.$$

によって定義される。実際、

$$(x, y) = (r^{n(e)} u, r^{m(e)} v), \quad r \in \mathbb{R} \text{ and } u, v \in \mathbb{C}^\times$$

とし、 $r \rightarrow \infty$ なる極限で主要項になっている：

$$W_\Delta(r^{n(e)} u, r^{m(e)} v) = r^{l(e)} W_e(u, v) + O(r^{l(e)-1}).$$

今、辺 e に対し、 $W_e(x, y)$ の主要項が 2 項式

$$W_e(x, y) = a_1 x^{i_1} y^{j_1} + a_2 x^{i_2} y^{j_2},$$

(但し、 $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ 、 $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \mathbb{Z}^2$) であったと仮定しよう。有向深谷圏 $\mathfrak{Suf}^\rightarrow W_\Delta$ は、十分一般の係数に対しては、その係数に依らないので、有向深谷圏の計算のためにはこのように仮定することができる。 $\alpha_i = \arg(a_i)$ ($i = 1, 2$) とし、

$$(x, y) = (r^{n(e)} |a_2| e^{i\theta}, r^{m(e)} |a_1| e^{i\phi}).$$

とする。この時、 $r \rightarrow \infty$ での W の主要項は

$$r^{l(e)} W_e(\mathbf{e}(\theta), \mathbf{e}(\phi)) = r^{l(e)} |a_1 a_2| \{ \mathbf{e}(\alpha_1 + i_1 \theta + j_1 \phi) + \mathbf{e}(\alpha_2 + i_2 \theta + j_2 \phi) \}. \quad (10)$$

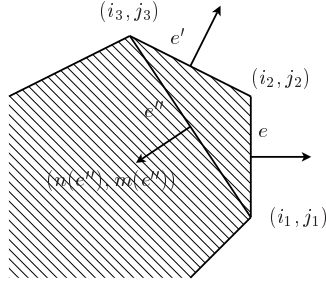


図8 Newton 多角形の隣接する辺の組

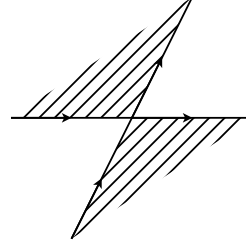


図9 漸近境界の交点付近でのコアメーバの主たる振る舞い

で与えられる。よって、 $W_{\Delta}^{-1}(0)$ のコアメーバは、 \mathbb{T}^2 上の直線

$$(\alpha_2 - \alpha_1) + (i_2 - i_1)\theta + (j_2 - j_1)\phi + \frac{1}{2} = 0 \pmod{\mathbb{Z}}$$

に漸近することがわかる。この直線を、コアメーバ $W_{\Delta}^{-1}(0)$ の漸近境界と呼ぶ。この直線の傾きは、辺 e の法線の傾きと等しくなっていることがわかる。つまり、Hanany-Vegh の構成法でトーラス上に書いていた直線は、 $W_{\Delta}^{-1}(0)$ のコアメーバの漸近境界に他ならなかったのである！

また、漸近境界には、 Δ の外向きの法線に対応して、自然に向きが定まる。図8のように Δ の辺 e と e' を考え、 e や e' に対応する漸近境界の近くでの $W^{-1}(0)$ のコアメーバの振る舞いを考えることにする。

e や e' の主要項が2項式であると仮定する：

$$\begin{aligned} W_e(x, y) &= \mathbf{e}(\alpha)x^{i_1}y^{j_1} + \mathbf{e}(\beta)x^{i_2}y^{j_2}, \\ W_{e'}(x, y) &= \mathbf{e}(\beta)x^{i_2}y^{j_2} + \mathbf{e}(\gamma)x^{i_3}y^{j_3} \end{aligned}$$

但し、 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ であり、また $(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3) \in \mathbb{Z}^2$ 。

$$W_{ee'}(x, y) = \mathbf{e}(\alpha)x^{i_1}y^{j_1} + \mathbf{e}(\beta)x^{i_2}y^{j_2} + \mathbf{e}(\beta)x^{i_3}y^{j_3}.$$

と置き、 W の係数のうち、Newton 多角形の内点に対応するものは全て消えているものとする。このとき、 $W_{ee'}$ は、

$$(x, y) = (r^{-n(e'')}u, r^{-m(e'')}v), \quad r \in \mathbb{R}^{>0} \text{ and } \theta, \phi \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

として $r \rightarrow \infty$ の極限で W_{Δ} の leading および subleading の寄与である：ただし、 $(n(e''), m(e'')) \in \mathbb{Z}^2$ は $W_{ee'}$ の Newton 多角形の辺 $W_{ee'}$ の外向きの法線である (図8)。

このような3項式の和からなる時のコアメーバは [1] で解析された。その結果は次のとおりである：

定理 2. 格子三角形 Δ に対し、その頂点に対応する単項式の和を W_{Δ} とおく。このとき、

- コアメーバの境界は、その漸近境界と一致する。
- Δ の面積の2倍を N とすると、 W_{Δ}^{-1} のコアメーバは偶数個の三角形 $\{U_i\}_{i=1}^N, \{V_i\}_{i=1}^N$ とその頂点 $\{I_i\}_{i=1}^{3N}$ の和集合になっている。但し、 U_i どうし、また V_i どうしは共有する頂点を持たない。
- 偏角写像 Arg はそれぞれの開三角形に制限すると微分同相であり、 U_i 上では向きを保ち、 V_i 上では向きを逆にする。また、任意の $i = 1, 2, \dots, 3N$ に対して、 $\text{Arg}^{-1}(I_i)$ は开区間と同相である。

特にこの定理の三番目のことから、漸近境界の交点付近では、 W_{Δ}^{-1} は図9に示されたようにねじれていることが読み取れる。

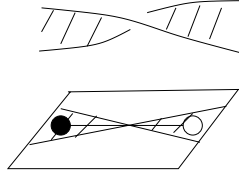


図 10 漸近境界の交点付近では、 W_{Δ}^{-1} はねじれている。

4 コアメーバと深谷圏

さて、以下では、 \mathbb{P}^2 の 1 点爆発の場合に、コアメーバをつかって深谷圏をどのように計算するのかを見ていくことにしよう。2 点爆発、3 点爆発の場合もほとんど同様にしてできる [3]。対応する Δ は図 11 に示されており、Newton 多項式を

$$W = x + y - \frac{1}{x} + \frac{1}{xy} \quad (11)$$

としよう。この時、 W の臨界点は 4 つあり、原点とそれら臨界点を直線で結んだものを消滅サイクルの distinguished basis としよう。

さてこの時、コアメーバの漸近境界は、admissible な配位 (図 12) と一致することが言える。ここから、前に説明した方法で、2 色グラフ (図 13) や筋 (図 14) を書くことができる。消滅サイクルの偏角写像による像を調べるために、コアメーバを図 16 のように切り分ける。今の場合は、二つの四角形と三つの三角形が、10 個の辺でつなぎ合わさっていることになる。これらを貼り合わせることににより W_{Δ}^{-1} が得られるが、貼り合わせる際には、先に述べたように (図 10)、漸近境界の交点のところではねじりが生じているので、そのねじりを解消するように貼り合わせることになる。その結果、図 17 のように、トーラスから 4 点抜けた面が得られる。実は、消滅サイクルの偏角写像による像は図 18 のようになっており、それをコアメーバの方に持って行くと図 19 のように、コアメーバの穴を取り囲むサイクルになるのである！

そこで、 $D^b \mathfrak{Fut}^{\rightarrow} W \cong D^b \text{mod CT}^{\rightarrow}$ を示す際に使う対応関係をまとめておこう。

2 色グラフ	W^{-1}	筋
頂点	disk	関係 (ポテンシャル)
色	向き付け	ポテンシャルの符号
面	消滅サイクル	頂点
辺	交点	矢印

我々がやりたいのは、有向深谷圏を計算することであったから、まずその対象である消滅サイクルを知る必要がある。それには、2 色グラフの面が、コアメーバを切り貼りしたときにどのサイクルにうつるかを見ればよいことになる。また、二つの消滅サイクルの間の射を計算するには、対応するサイクルの交点を拾ってくればよい。さらに、射の合成を計算するには、擬正則円盤を組み合わせ論に数え上げればよい。

このようにして有向深谷圏 $D^b \mathfrak{Fut}^{\rightarrow} W_{\Delta}$ が計算でき、一方 $D^b \text{coh } X_{\Delta}$ の方は別に (exceptional collection を使って) 計算されるので、その両者を比べることにより $D^b \mathfrak{Fut}^{\rightarrow} W_{\Delta} \cong W_{\Delta}$ を示すことができる。

紙数がそろそろ尽きてきたのでこのあたりで筆を擱くことにするが、コアメーバや 2 色グラフ (brane tiling) は、ホモロジー的ミラー対称性に限らず様々な分野と関係している。例えば、ここで述べたような筋は、AdS/CFT 対応と呼ばれる物理の予想を通じて佐々木-Einstein 多様体の幾何学と関連しており、興味深

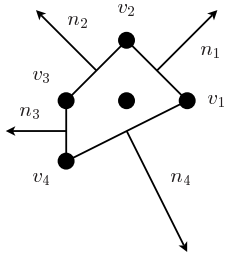


図 11 del Pezzo 1 に対応する格子多角形 Δ_4

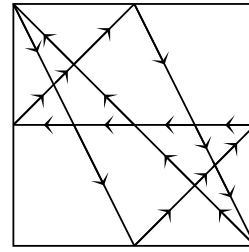


図 12 del Pezzo 1 の唯一の admissible な配位

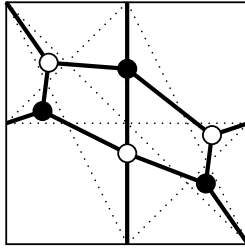


図 13 2色グラフ

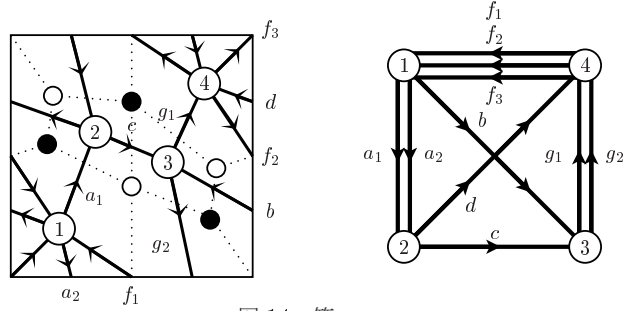


図 14 籓

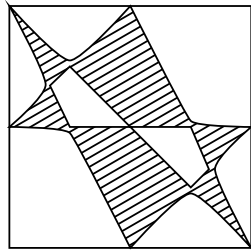


図 15 del Pezzo 1 のコアメーバの概略

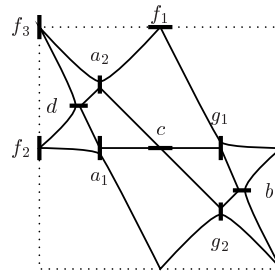


図 16 コアメーバを切り分ける

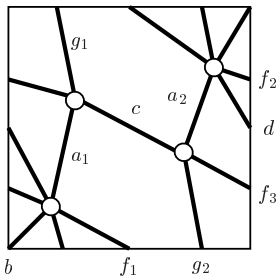


図 17 貼り合わせた曲面

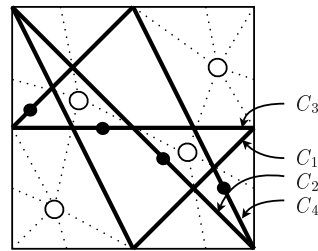


図 18 消滅サイクル

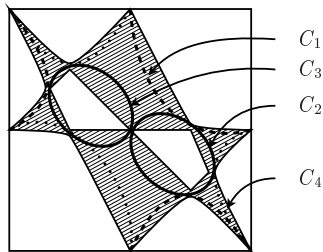


図 19 コアメーバ上の消滅サイクル

い問題となっている。また、2色グラフ（ダイマー）はある種の可積分系であり、種々の統計モデルや位相的弦理論等に顔を出す。興味を持たれた方は、佐々木-Einstein 多様体の幾何学との関連については [10] を、ダイマーに関連した様々な話題については [11] などの文献を併せて参照されたい。

参考文献

- [1] K. Ueda and M. Yamazaki, “A note on brane tilings and mckay quivers,” [math.ag/0605780](https://arxiv.org/abs/math/0605780).
- [2] K. Ueda and M. Yamazaki, “Brane tilings for parallelograms with application to homological mirror symmetry,” [math.ag/0606548](https://arxiv.org/abs/math/0606548).
- [3] K. Ueda and M. Yamazaki, “Homological mirror symmetry for toric orbifolds of toric del pezzo surfaces,” [math.ag/0703267](https://arxiv.org/abs/math/0703267).
- [4] M. Kontsevich, “Homological algebra of mirror symmetry,” in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pp. 120–139. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [5] A. Hanany and D. Vegh, “Quivers, tilings, branes and rhombi,” [hep-th/0511063](https://arxiv.org/abs/hep-th/0511063).
- [6] A. Hanany, C. P. Herzog, and D. Vegh, “Brane tilings and exceptional collections,” *JHEP* **07** (2006) 001, [hep-th/0602041](https://arxiv.org/abs/hep-th/0602041).
- [7] A. I. Bondal, “Representations of associative algebras and coherent sheaves,” *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **53** (1989), no. 1, 25–44.
- [8] B. Feng, Y.-H. He, K. D. Kennaway, and C. Vafa, “Dimer models from mirror symmetry and quivering amoebae,” [hep-th/0511287](https://arxiv.org/abs/hep-th/0511287).
- [9] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [10] 山崎雅人, “トーリック佐々木-einstein 多様体の理論の最近の発展,” 第4回城崎新人セミナー報告集 (2007).
<http://www-hep.phys.s.u-tokyo.ac.jp/~yamazaki/files/2007/kinosakiasaki%.tex>.
- [11] 植田一石, “ダイマーと藻類,” 数理解析研究所講究録 **1541** (2007) 102–123.
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kazushi/proceedings/rims_kokyuroku2006%_8.pdf.