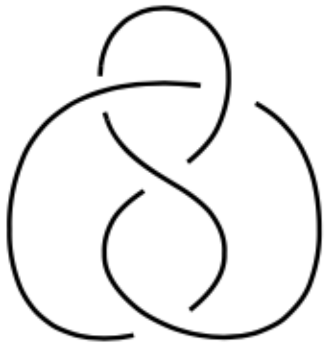
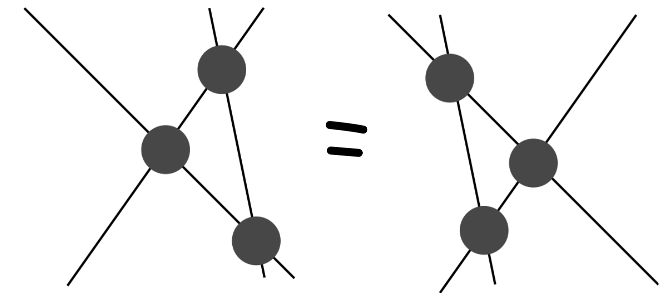




可積分系と
チャーン=サイモンズ理論

山崎雅人

KAVLI IPMU

日本数学会企画特別講演

2023年3月18日 @ 中央大学

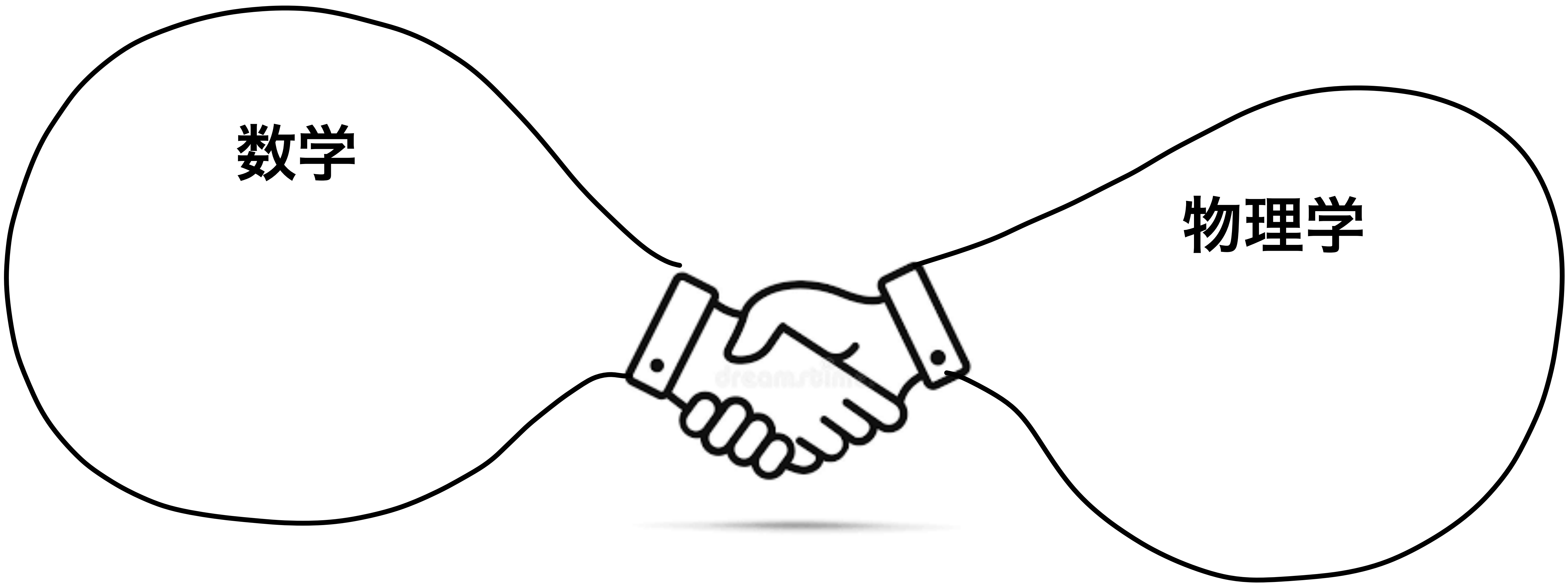
教員紹介

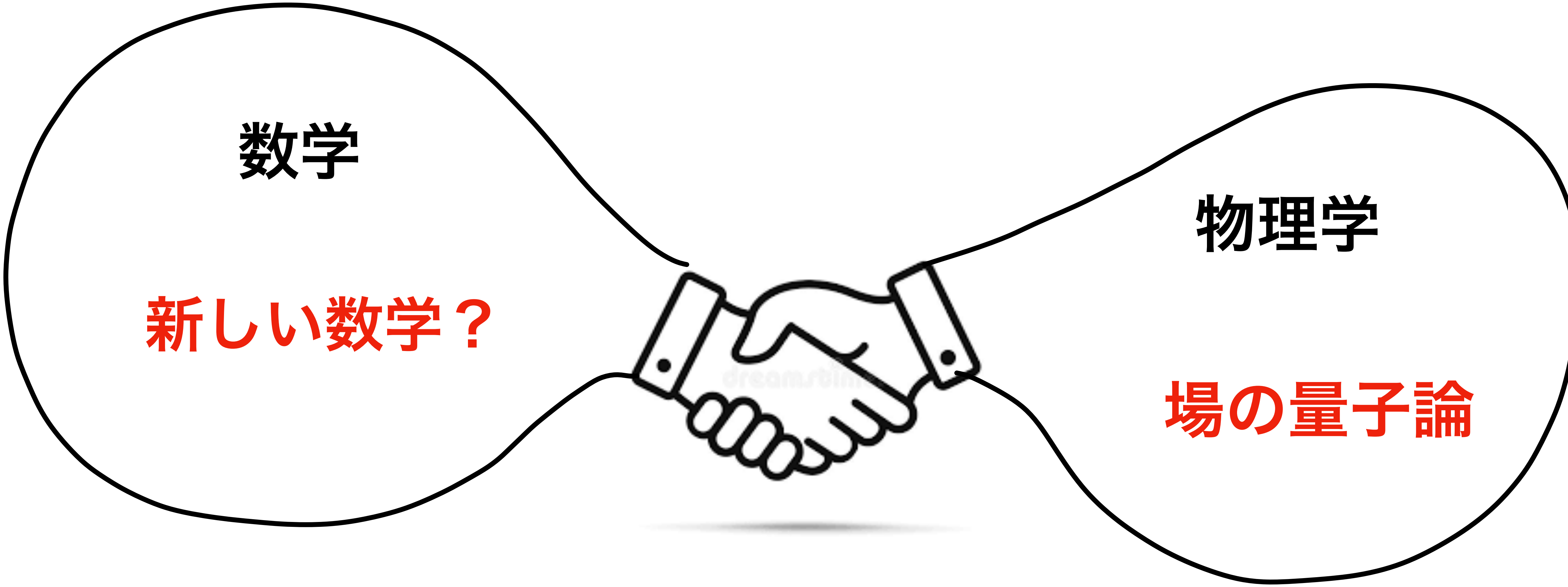
- 教員一覧（５０音順）
- 教員一覧表（分野別）
- 特任教員
- 連携併任講座客員教員（非常勤講師）

教員一覧表（分野別）

幾　何

河澄響矢	小林俊行	古田幹雄	
足助太郎	植田一石	大島芳樹	北山貴裕
逆井卓也	林修平	松尾厚	吉野太郎
清野和彦	牛腸徹	今野北斗	鮑園園
中島啓(Kavli IPMU)	MILANOV Todor(Kavli IPMU)	山崎雅人（Kavli IPMU）	


数学
物理学



しかし，場の理論が数学的に
定式化されていないのは大問題

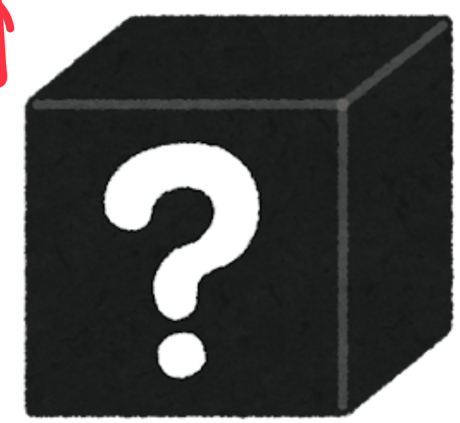
数学者から見た場の量子論？

数学の世界

数学ではない
怪しげ？なもの

数学的なインプット

数学者



物理学者

数学的なアウトプット

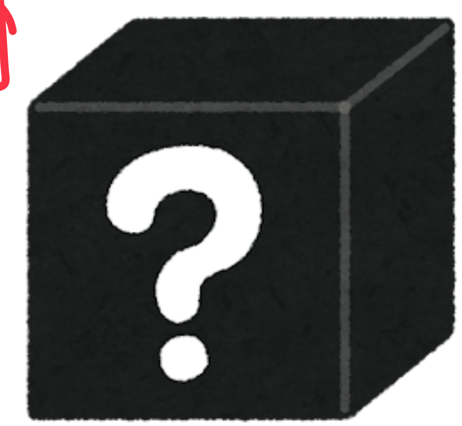
数学者から見た場の量子論？

数学の世界

数学ではない
怪しげ？なもの

数学的なインプット

数学者



物理学者

数学的なアウトプット

数学者から見た場の量子論？

数学の世界

数学ではない
怪しげ？なもの

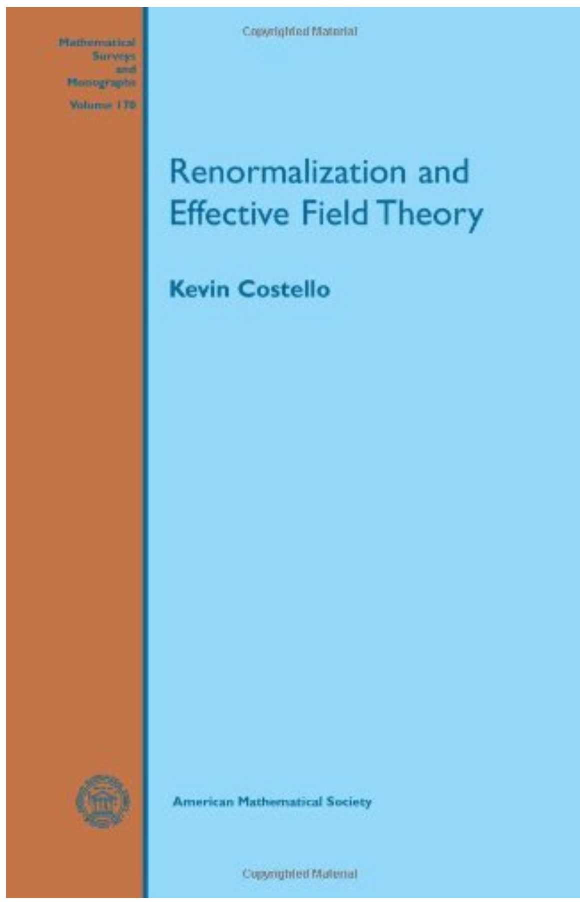
数学的なインプット

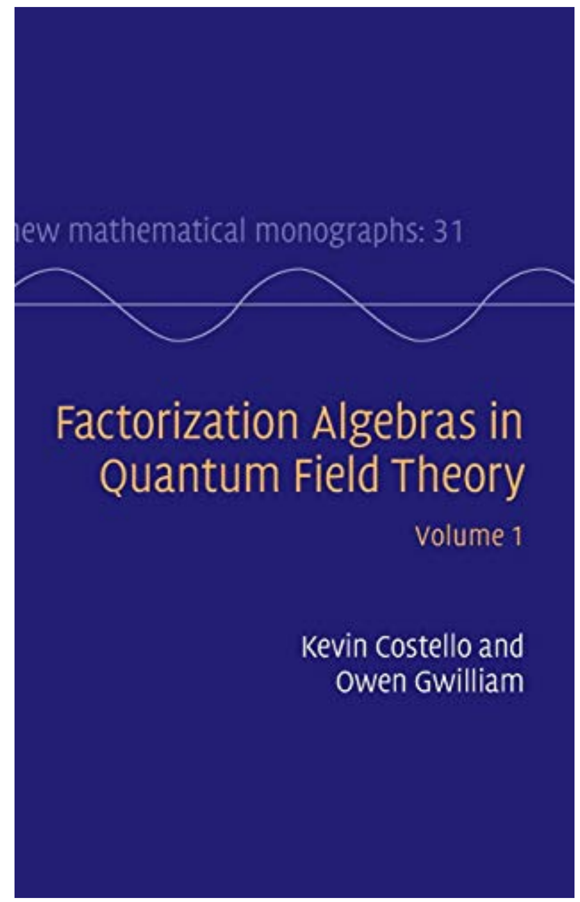
数学者

数学的なアウトプット

物理学者

実は，かなり一般のクラスの場の理論は既に摂動的には「数学的に定式化されている」





[Costello, Costello-Gwilliam (Vol. 1/2)]

(Pre)-Factorization Algebra (因子化代数)

- ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \phi\,(\Box + m^2)\,\phi$$

mass

ラプラシアン

スカラー場

$$\phi \in C^\infty(U)$$

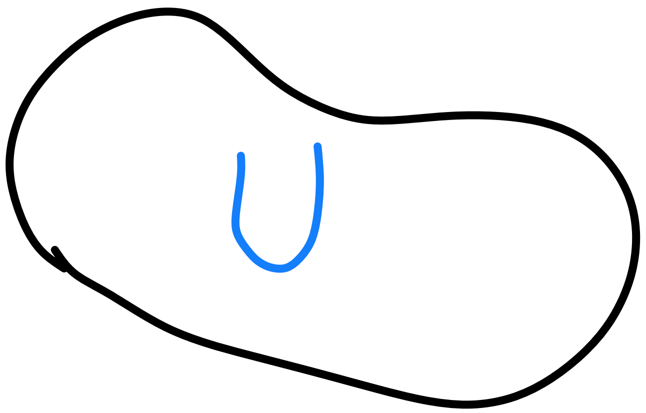
- 運動方程式

$$(\Box + m^2)\,\phi = 0$$

- “Derived”な解のなす複体 (BRST-BV量子化)

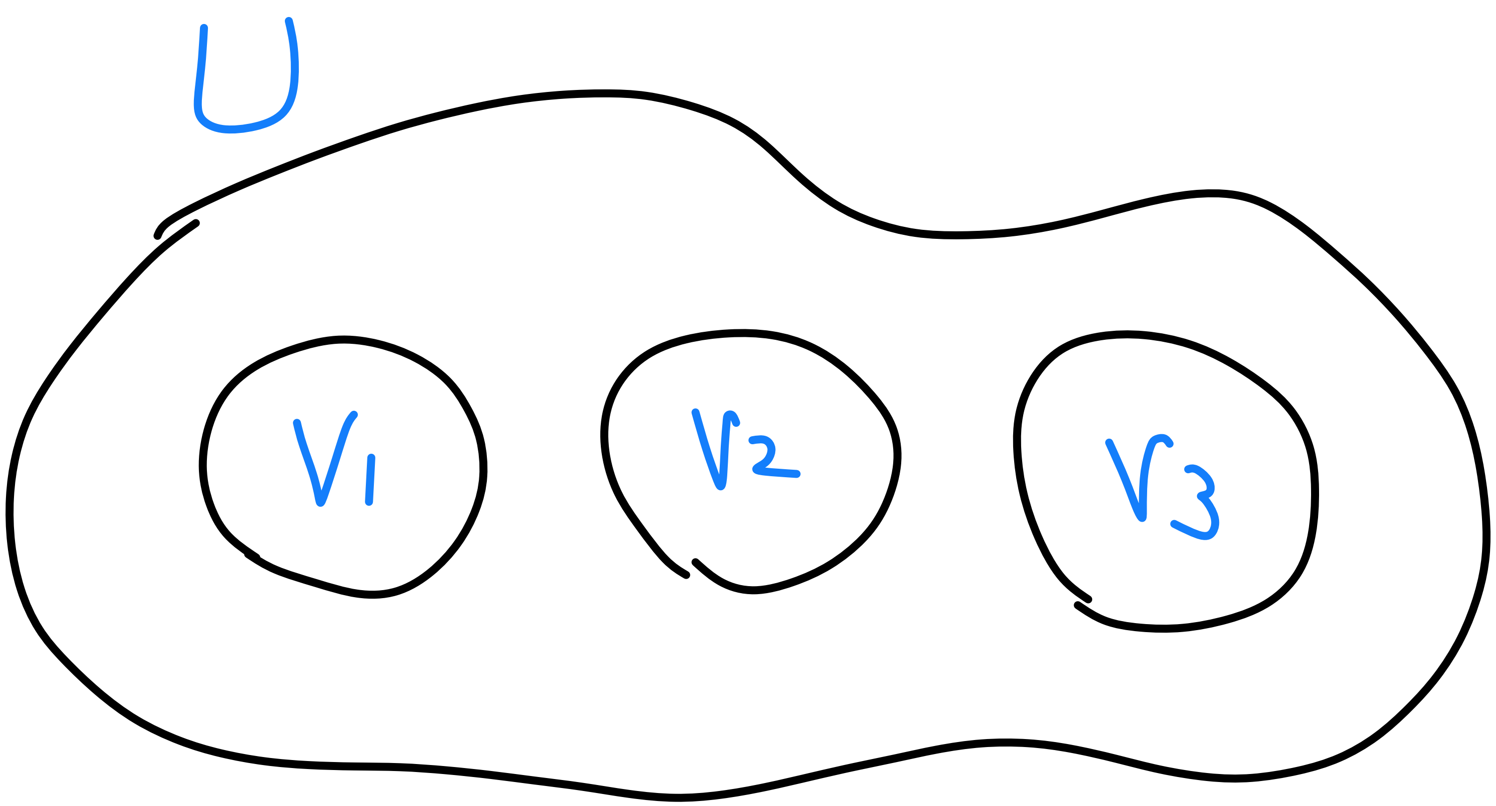
$$\mathcal{F}(U) := \left\{ C^\infty(U) \xrightarrow[\Box + m^2]{} C^\infty(U) \right\}$$

(Pre)-Factorization Algebra (因子化代数)



$\rightsquigarrow \mathcal{F}(U)$: cochain complex

"U上の場"



$\bigotimes_i \mathcal{F}(V_i) \to \mathcal{F}(U)$

- 「場」ができたので，それらの関数空間 $\mathcal{O}$ ができる

  古典的

- 特に，あるエネルギースケール μ で理論を指定する

  量子的な**有効作用** I_μ を構成できる

$$I_\mu \in \mathcal{O}[[\hbar]]$$

$\hbar$について
形式級数

- 「場」ができたので，それらの関数空間 $\mathcal{O}$ ができる

  古典的

- 特に，あるエネルギースケール μ で理論を指定する量子的**有効作用** I_μ を構成できる

$$I_\mu \in \mathcal{O}[[\hbar]]$$

ℏについて形式級数

- エネルギースケールの変化を表す**繰り込み群方程式**

$$I_\mu \rightsquigarrow \underbrace{W}_{\text{Feynman 図}}\Big(\underbrace{P(\mu,\mu')}_{\text{propagator}},\ I_\mu\Big) = I_{\mu'}$$

∫ (heat kernel)

※ 発散はない（有効場の理論）

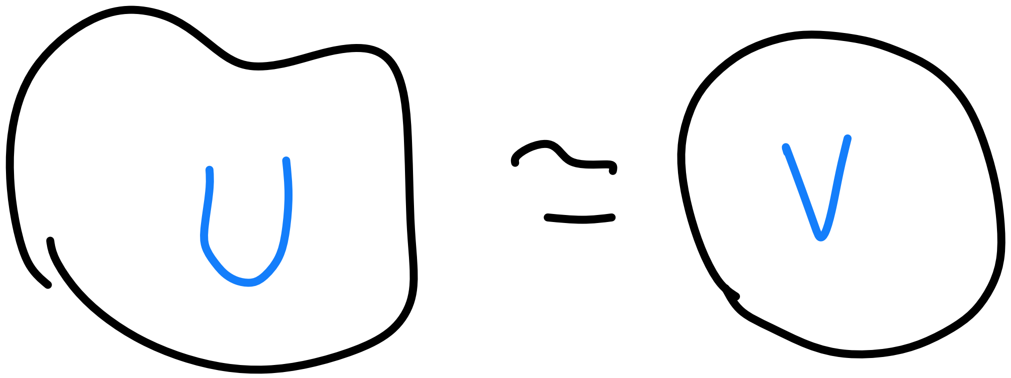
この定式化での場の理論の計算は
あるパラメーターについての**摂動論**

$$\langle O \rangle = \underbrace{O_0} + \underbrace{O_1} \hbar + \underbrace{O_2} \hbar^2 + \cdots$$

展開のそれぞれは有限個のファインマン図からの寄与でwell-defined

ただし，この級数は**発散級数で収束半径はゼロ**
うまい関数に足し上がるかは（物理的にも）とても非自明
（ミレニアム問題「クオークの閉じ込め」にも関係）
Borel sum, trans-series, resurgence, …

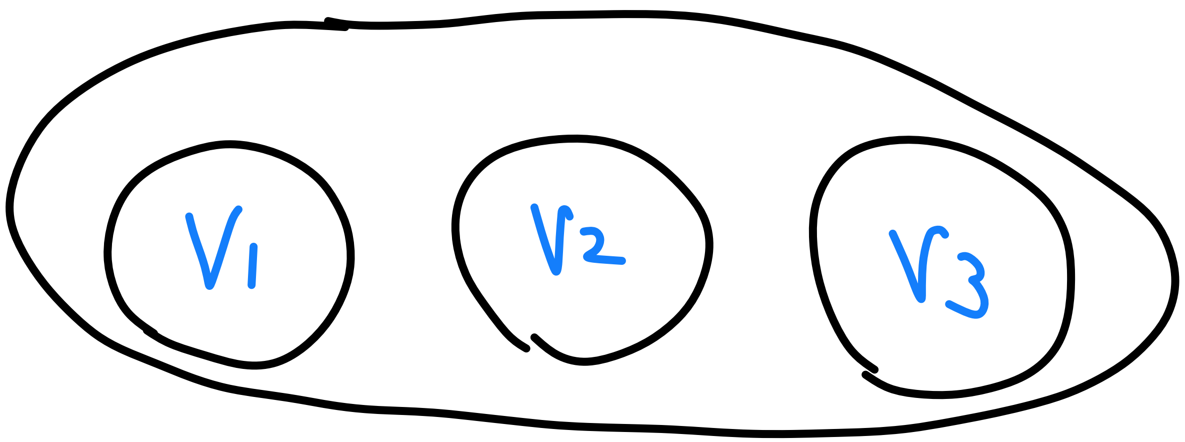
例：トポロジカルな理論 n次元 (TQFT)



$$\rightsquigarrow \mathcal{F}(U) \underset{\text{quasi-iso}}{\simeq} \mathcal{F}(V)$$

"locally constant"

U



$$\rightsquigarrow \bigotimes_i \mathcal{F}(V_i) \to \mathcal{F}(U)$$

locally constant な factorization algebra

$\parallel$

E_n-代数 (E_n-operad上の代数)

例：チャーン＝サイモンズ理論

$$Z = \underbrace{\int \mathcal{D}A}_{\text{path integral}} \, e^{iS[A]}, \quad S[A] = \frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A^3\right)$$

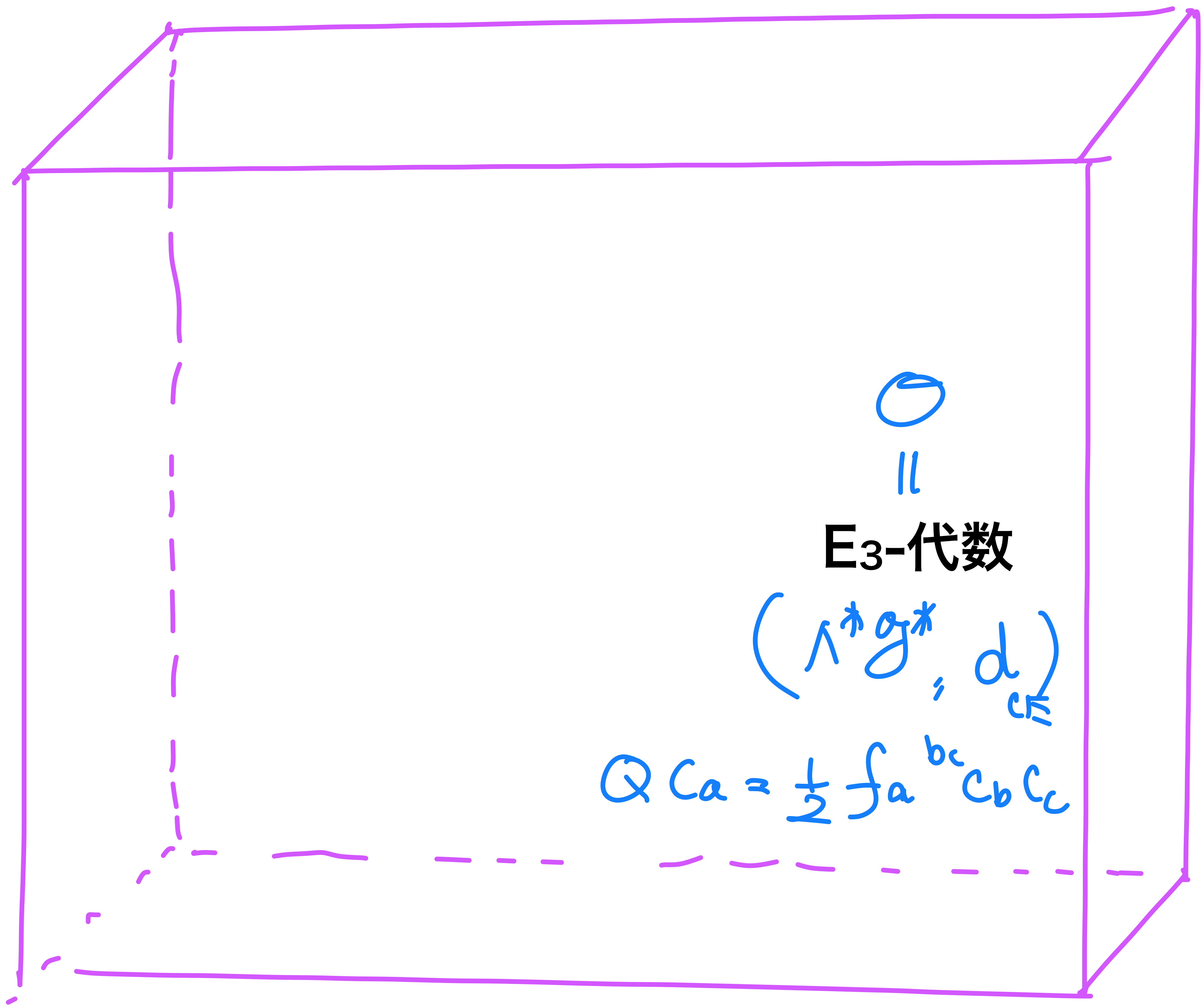
3次元多様体の分配関数 $\rightsquigarrow$ WRT不変量

結び目を表す演算子の期待値 $\rightsquigarrow$ 結び目の不変量

摂動論も実行できる（チャーン・サイモンズ摂動論）

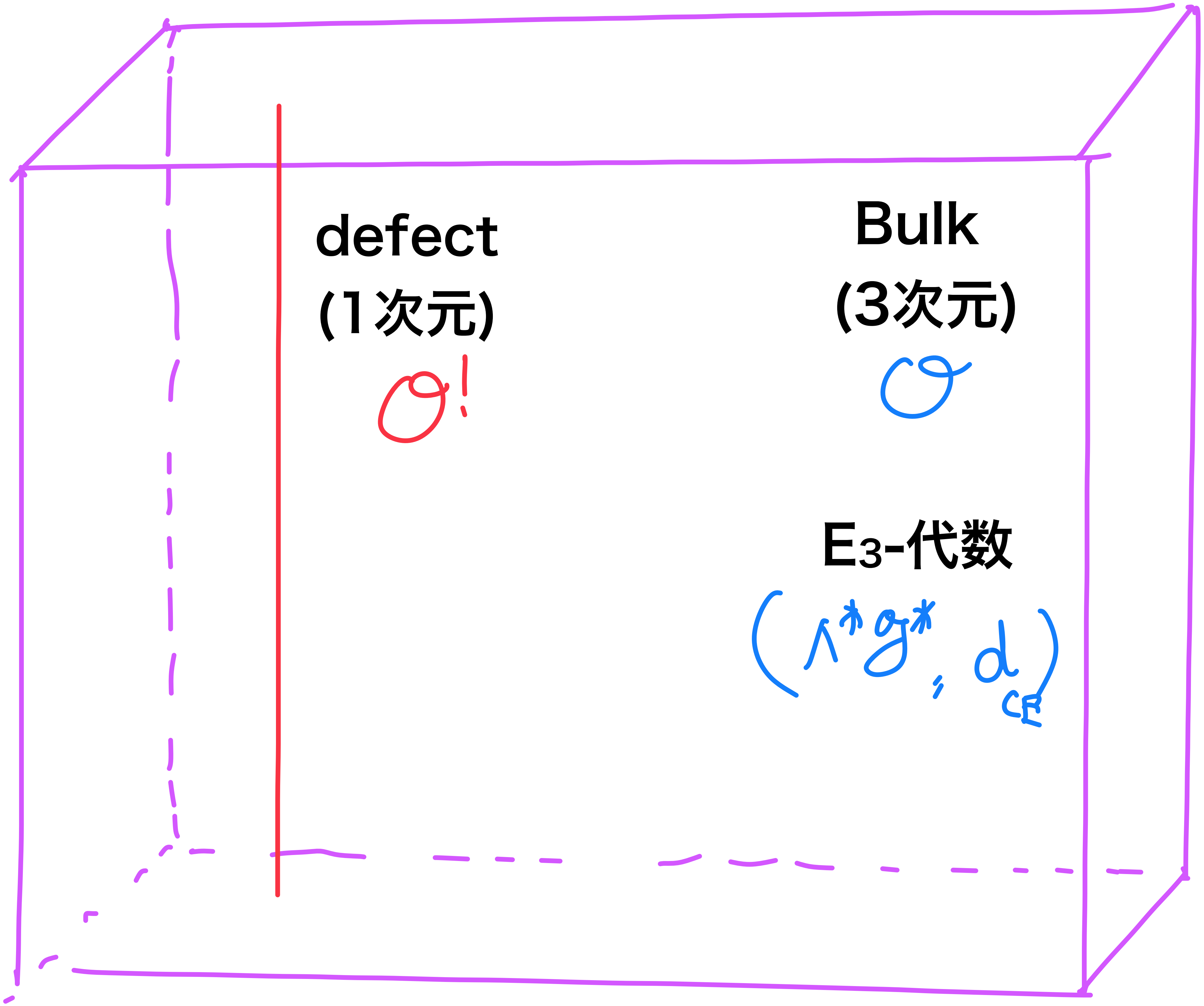
$\rightsquigarrow$ 結び目の有限型不変量

量子群の起源



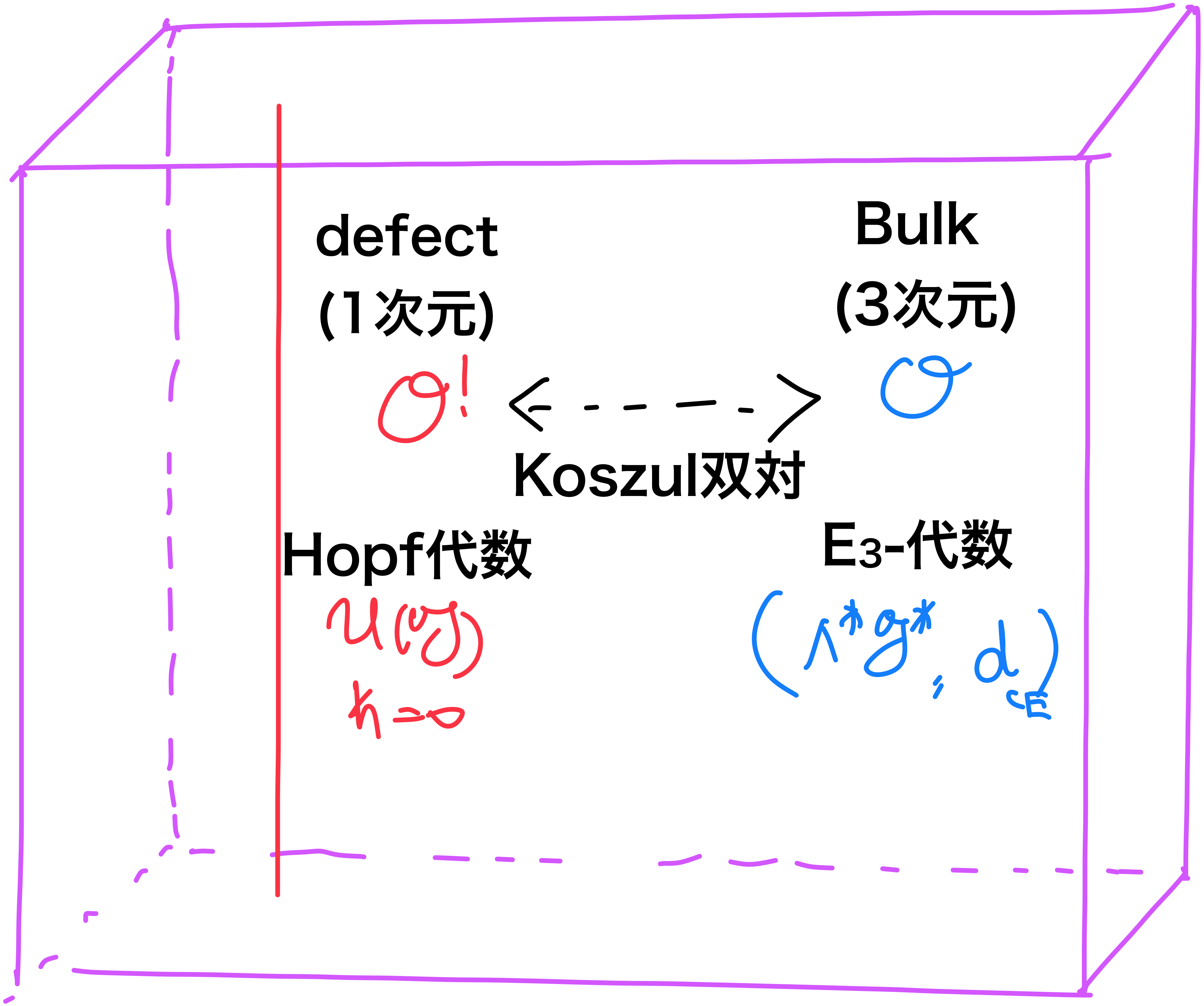
$\mathcal{O}$
$\parallel$
E3-代数
$(\Lambda^* \mathfrak{g}^*, d_{CE})$
$Q c_a = \frac{1}{2} f_a{}^{bc} c_b c_c$

量子群の起源

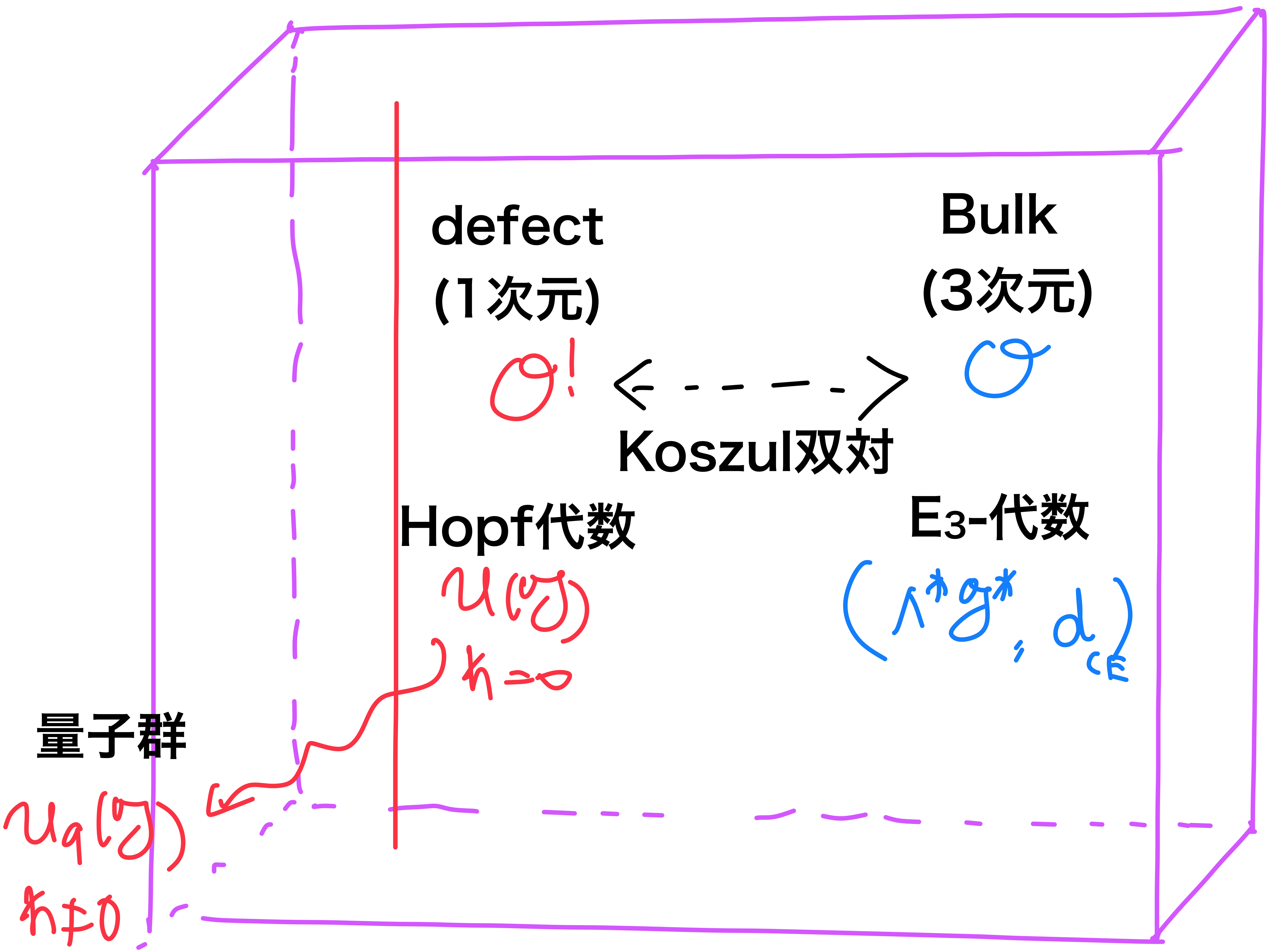


defect
(1次元)
$\mathcal{O}^!$
Bulk
(3次元)
$\mathcal{O}$
E3-代数
$(\Lambda^* \mathfrak{g}^*, d_{CE})$

量子群の起源

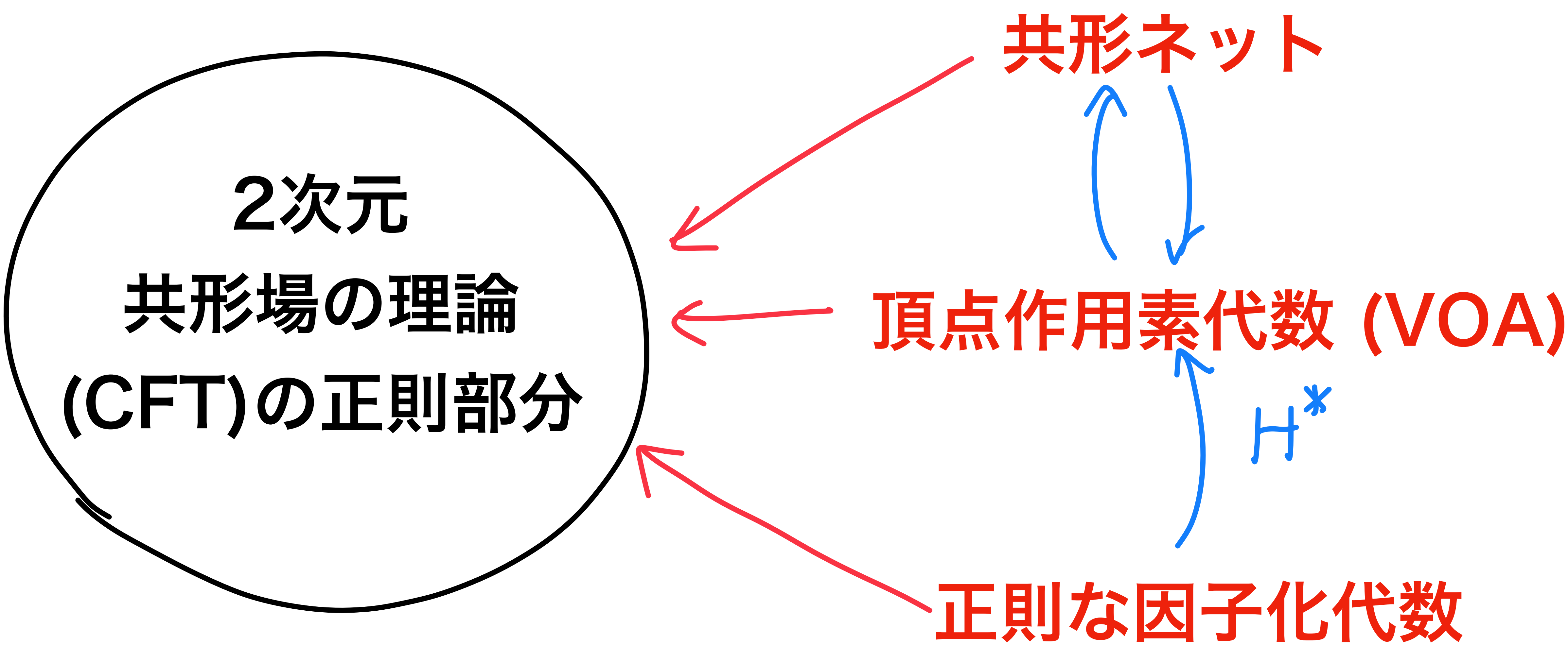

defect
(1次元)
$\mathcal{O}^!$
Bulk
(3次元)
$\mathcal{O}$
Koszul双対
Hopf代数
$U(\mathfrak{g})$
$\hbar=0$
E_3-代数
$(\Lambda^* \mathfrak{g}^*, d_{CE})$

量子群の起源



defect
(1次元)
Bulk
(3次元)
O!
O
Koszul双対
Hopf代数
E3-代数
U(g)
ħ=0
(Λ*g*, d_CE)
量子群
U_q(g)
ħ≠0

トポロジカルではない場の理論の例



もっと一般の構造は？

2次元
トポロジカル場の理論
(TQFT)

⟹

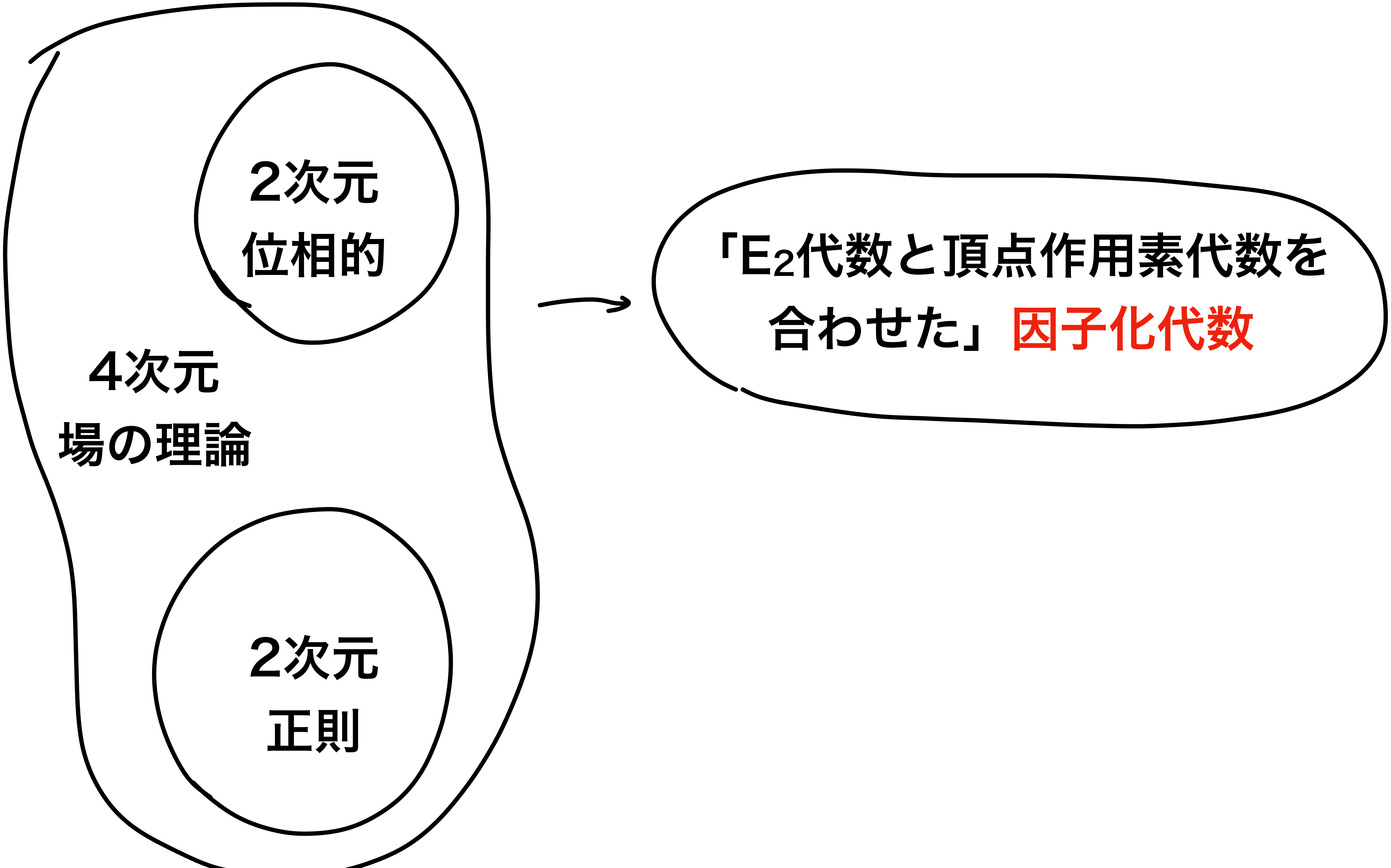
トポロジカルな因子化代数
E_2代数

2次元
正則場の理論

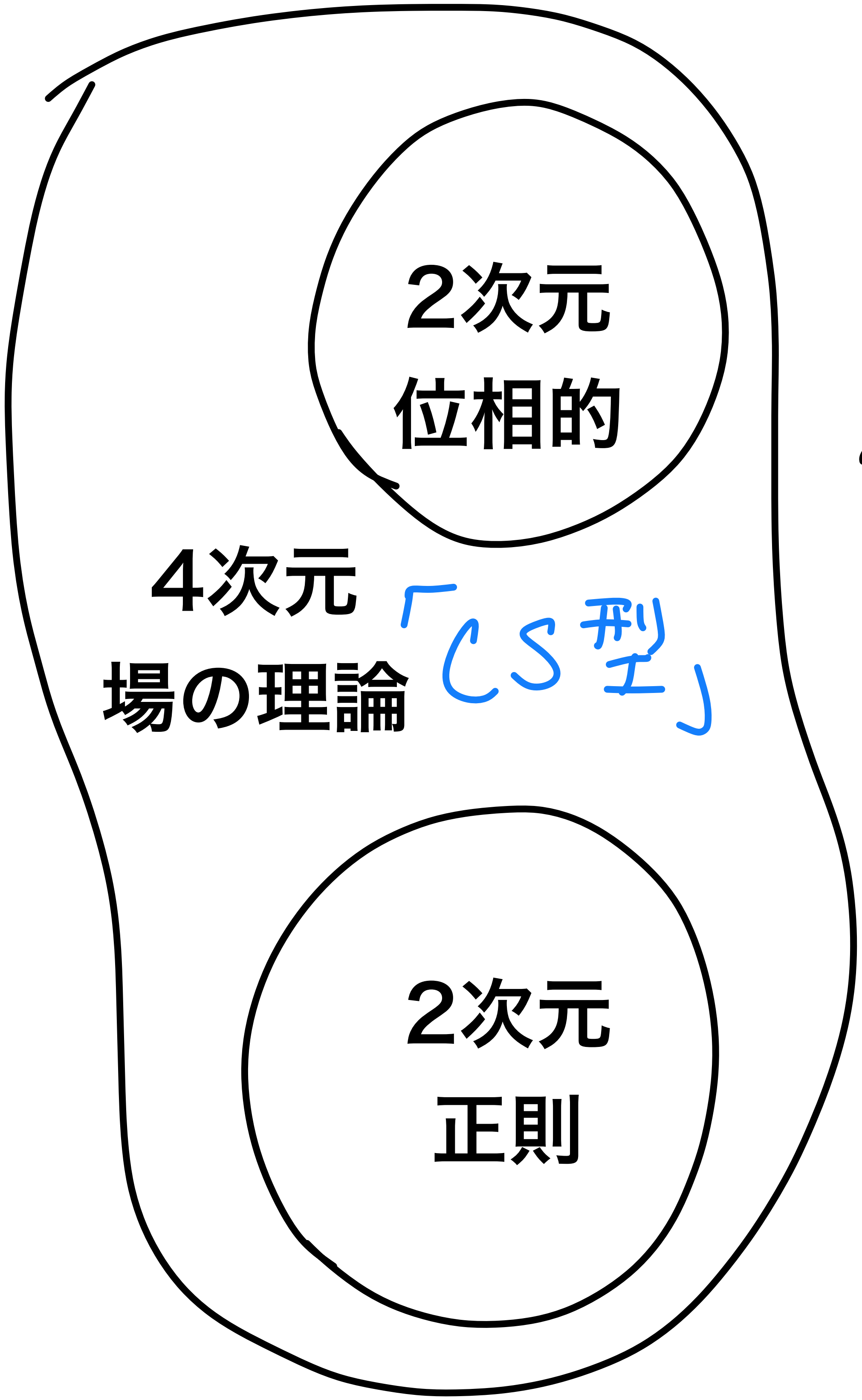
⟹

正則な因子化代数
頂点作用素代数

もっと一般の構造は？ [Costello]



もっと一般の構造は？ [Costello]

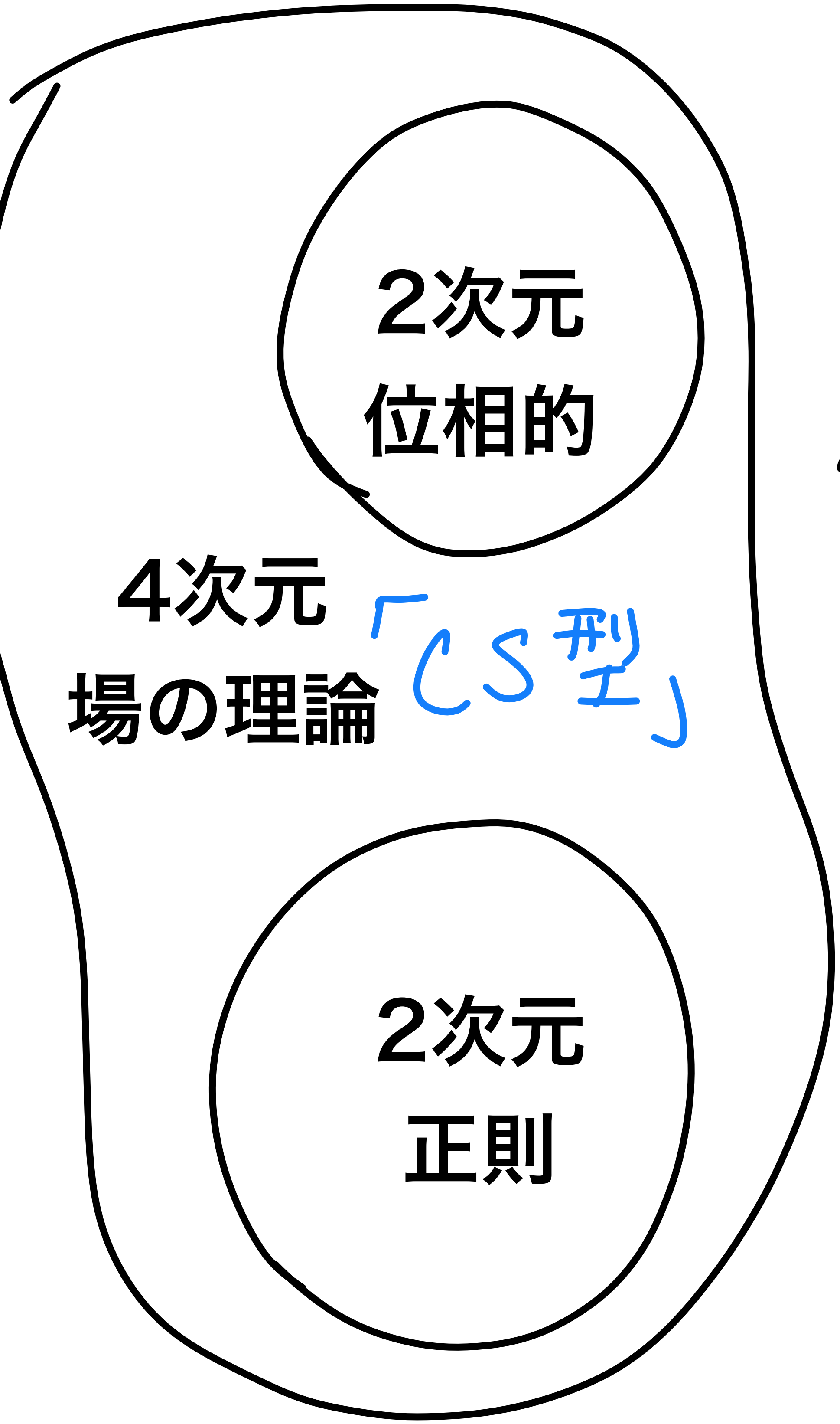


正則: z

「E_2代数と頂点作用素代数を合わせた」**因子化代数**

$$(\Lambda^*(\mathfrak{g}[[z]])^*, d) \ @ \ \hbar=0$$

もっと一般の構造は？ [Costello]



正則: z

「E_2代数と頂点作用素代数を合わせた」**因子化代数**

$$(\Lambda^*(\mathfrak{g}[[z]])^*, d) \quad @\ \hbar = 0$$

$\updownarrow$ Koszul双対

$$U(\mathfrak{g}[[z]], d) \quad @\ \hbar = 0$$

$$\rightsquigarrow Y_\hbar(\mathfrak{g})$$

Yangian

可積分！

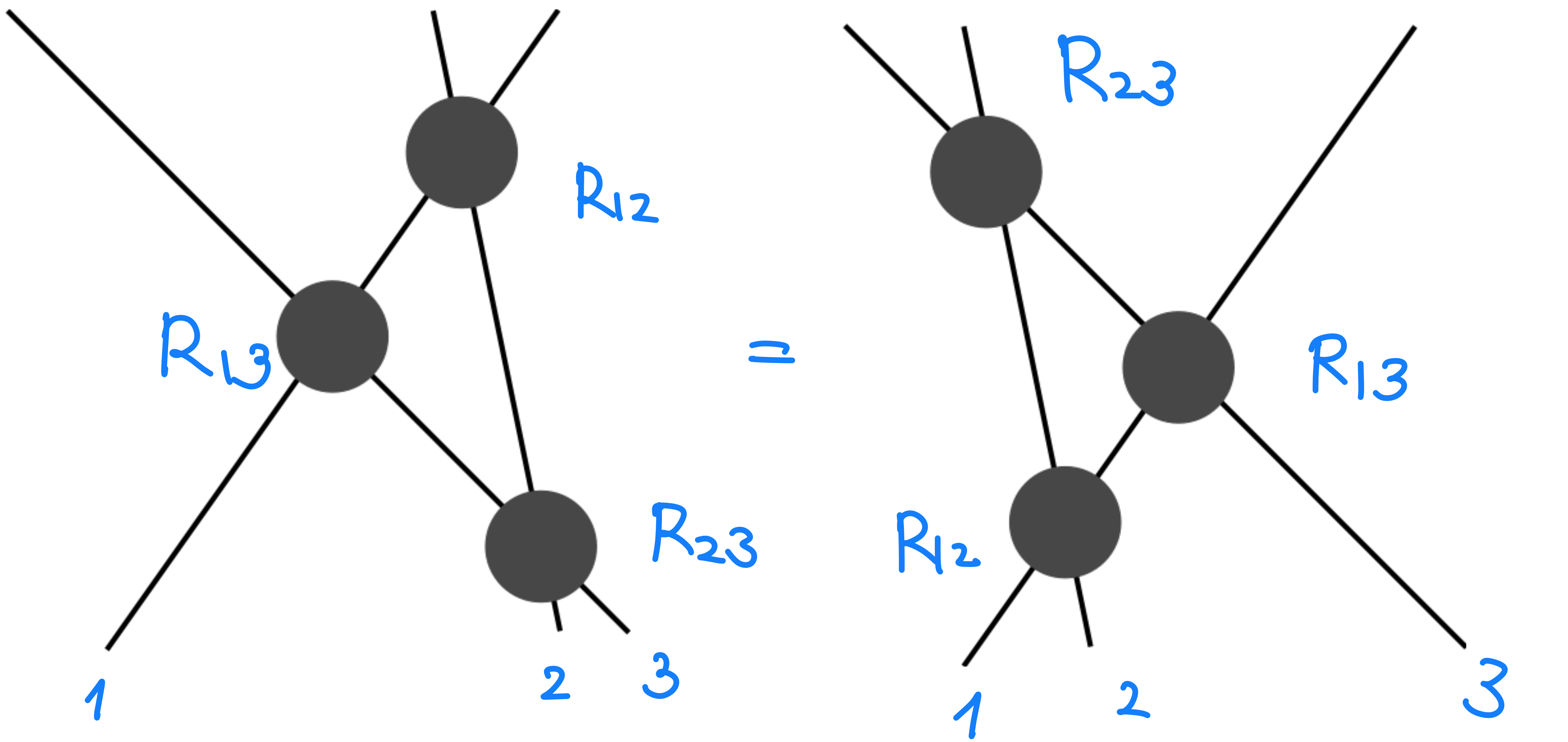
3d CS

4d CS

結び目と可積分系の

関係をもう一度整理…

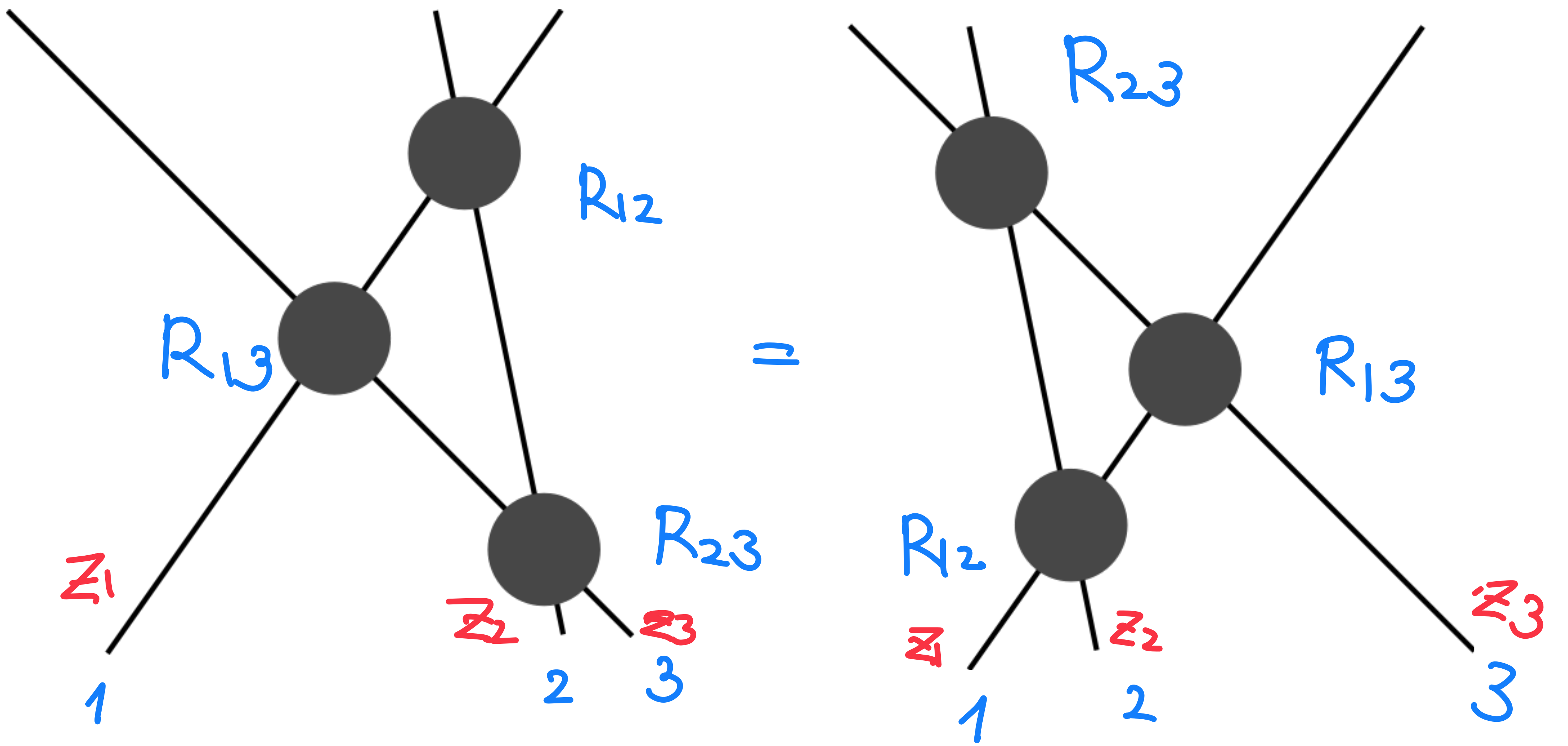
可積分性: ヤン・バクスター方程式



$$R_{12}\,R_{13}\,R_{23} = R_{23}\,R_{13}\,R_{12} \in \mathrm{End}\Big(\bigotimes_{i=1,2,3} V_i\Big)$$

$$R_{12} \in \mathrm{End}\,(V_1 \otimes V_2) \quad \text{etc.}$$

可積分性: ヤン・バクスター方程式

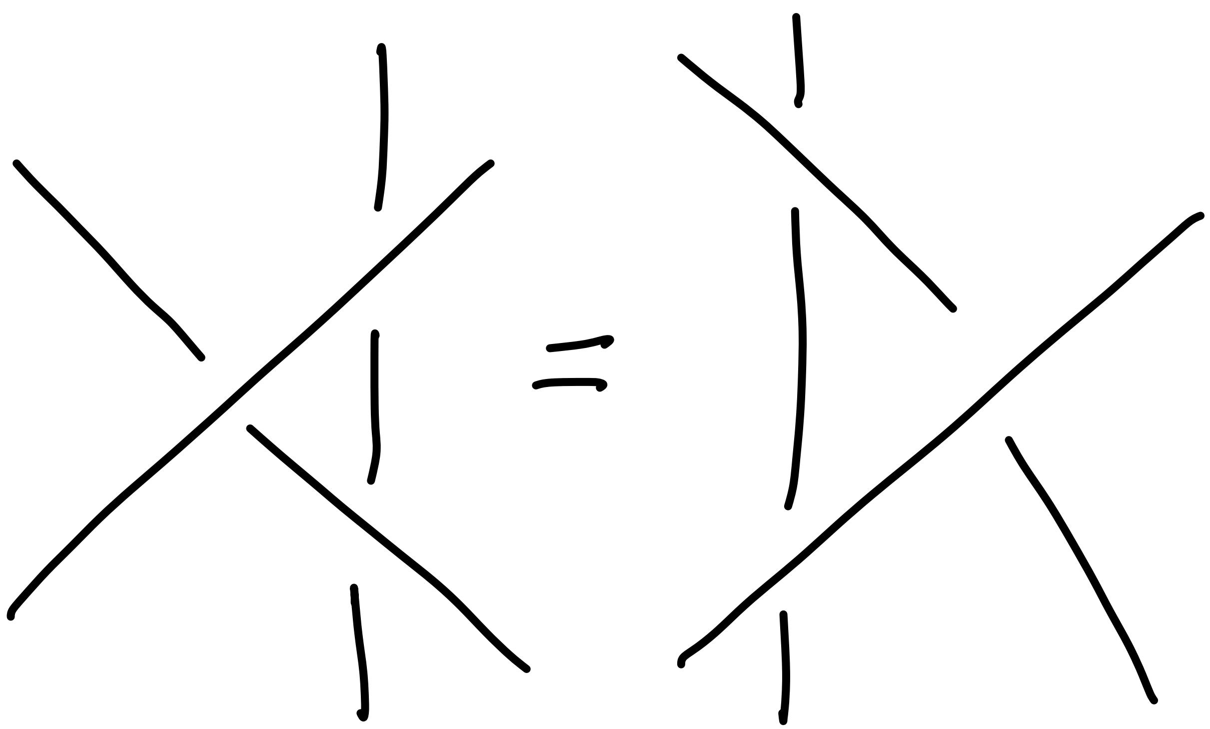


$$R_{12}\ R_{13}\ R_{23} = R_{23}\ R_{13}\ R_{12}$$

$$R_{ij} = R_{ij}(z_i - z_j)$$

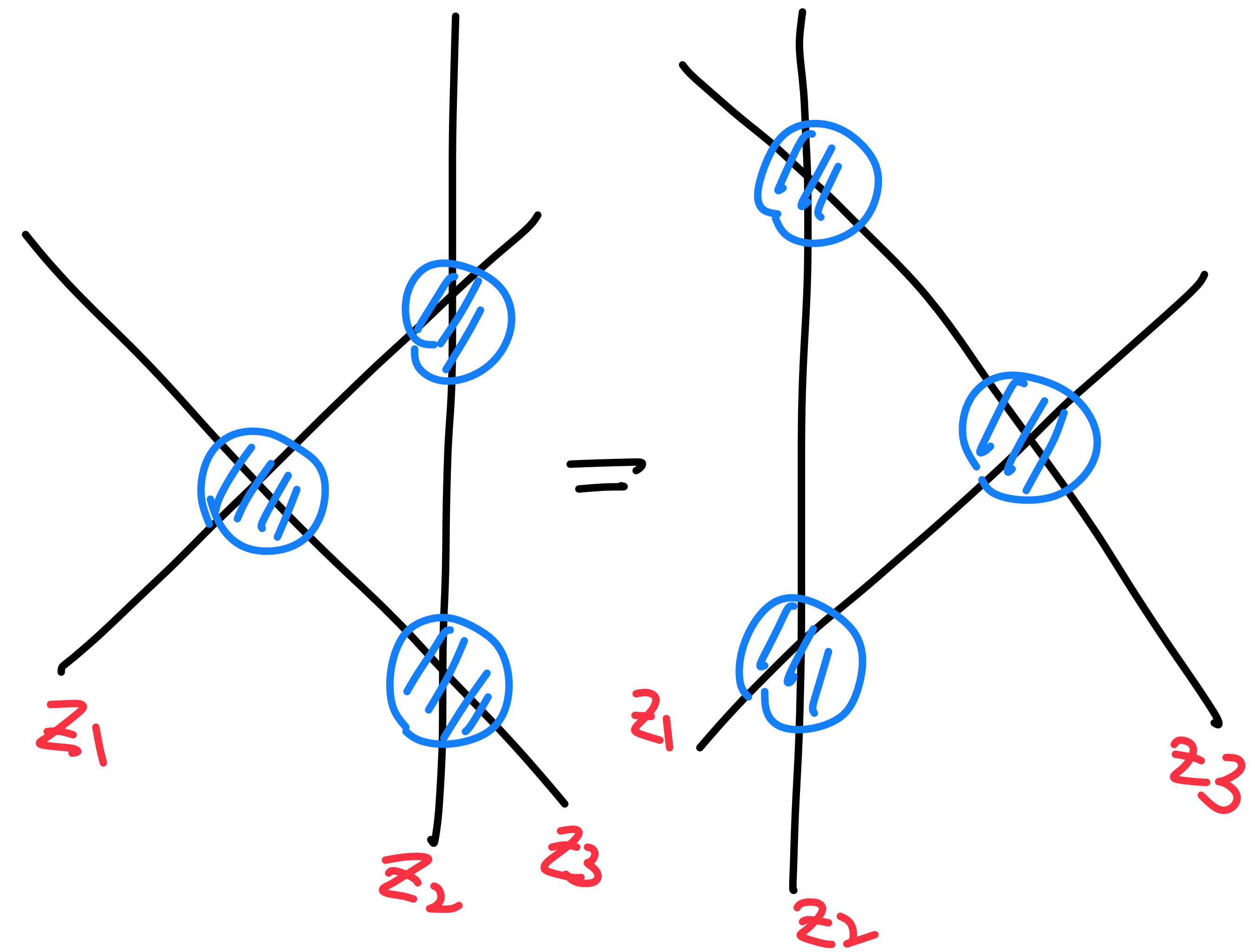
z_i: スペクトル変数

結び目理論と可積分系の類似と相違



結び目理論

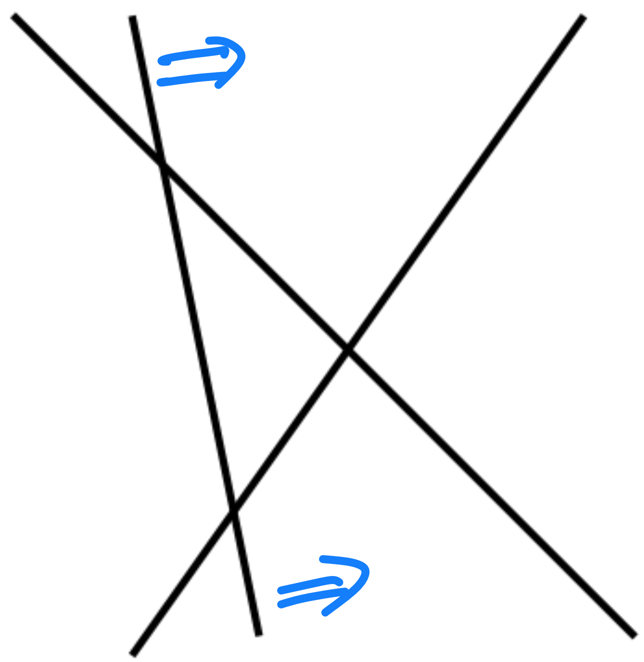
上下の区別あり

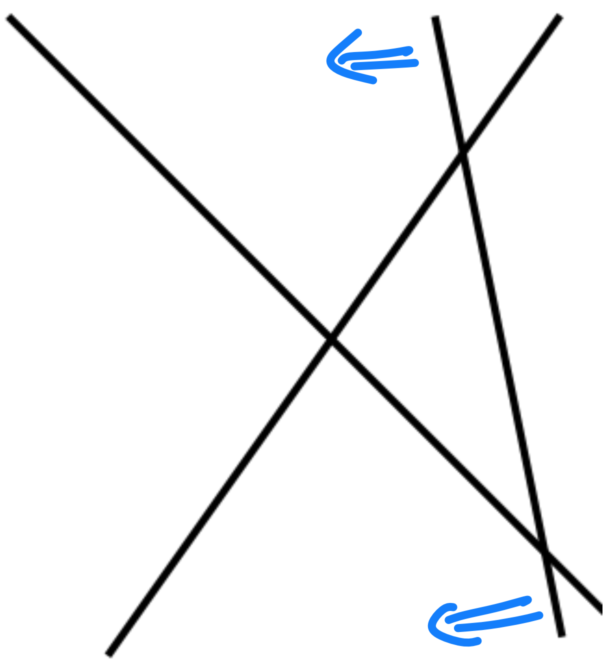


可積分系

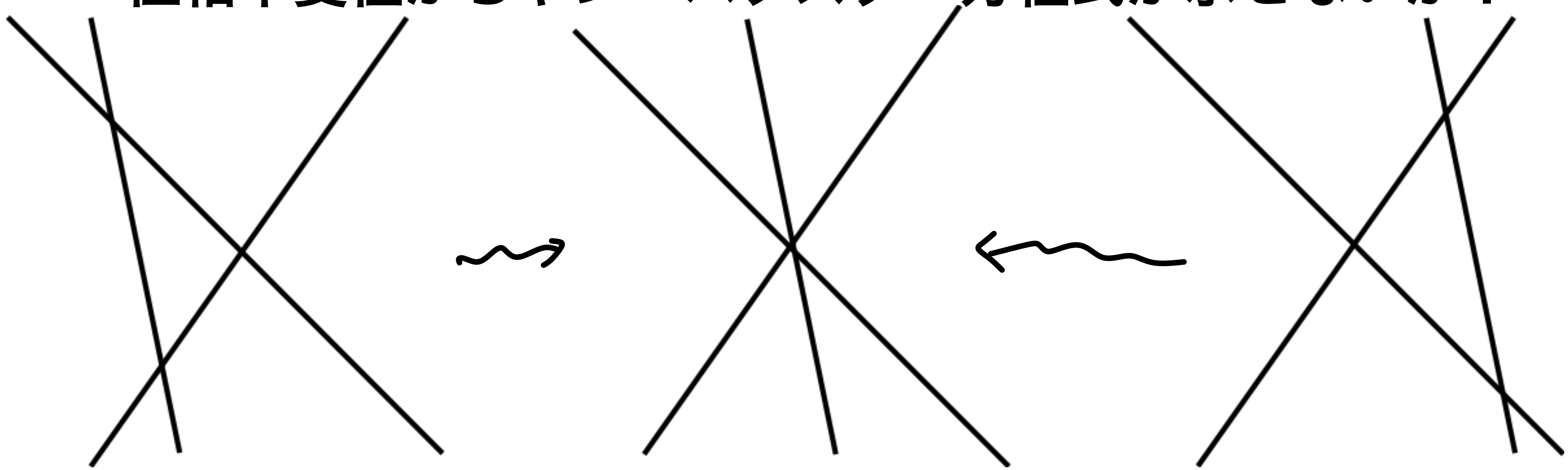
スペクトル変数

3次元チャーン・サイモンズ理論の
位相不変性からヤン・バクスター方程式が示せないか？





3次元チャーン・サイモンズ理論の
位相不変性からヤン・バクスター方程式が示せないか？



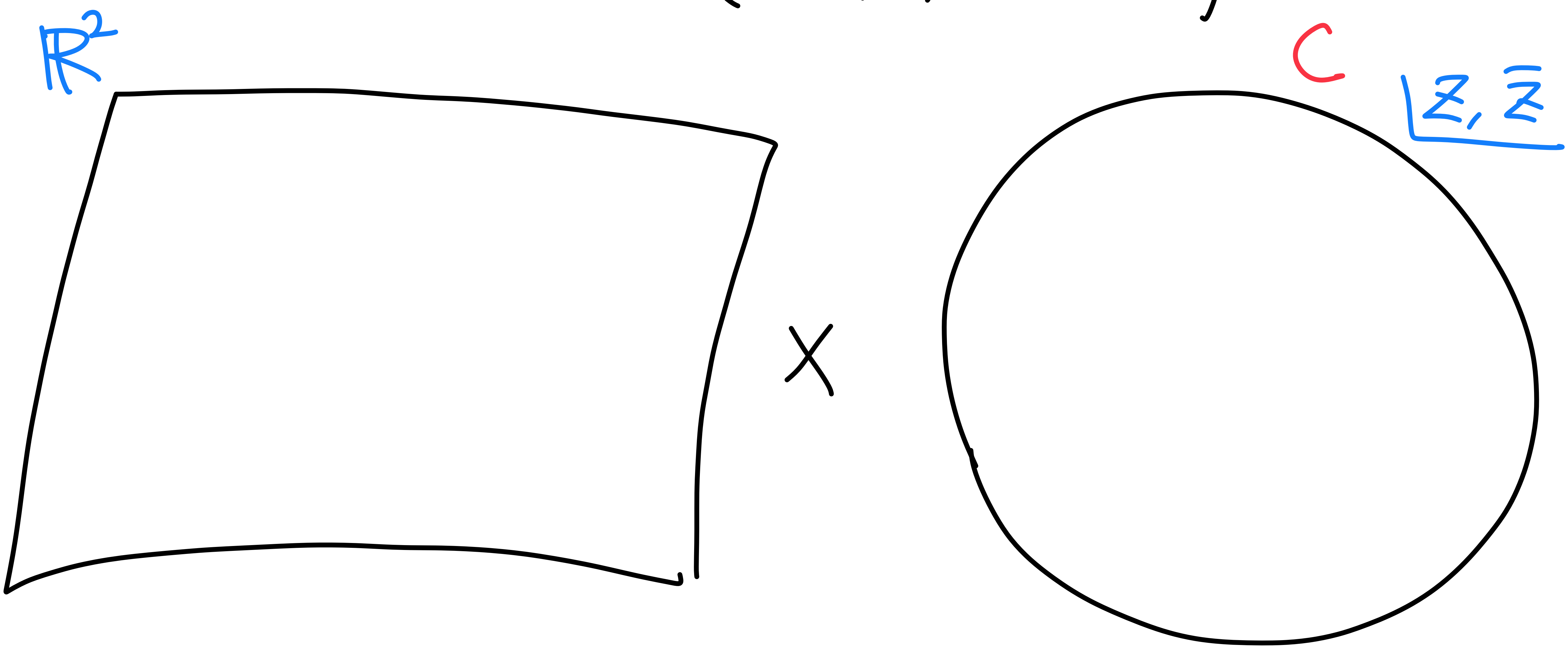
可積分系の時は二次元的なので
途中で特異点が生じるように見える

チャーン・サイモンズ理論には**スペクトル変数**も見当たらない

4次元のCS型の理論を考える　[Costello, Costello+ Witten + MY]

$$S = \frac{1}{K} \int_{\mathbb{R}^2 \times C} \omega \wedge \mathrm{Tr}\left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A\right)$$

(hol. 1-form on C)



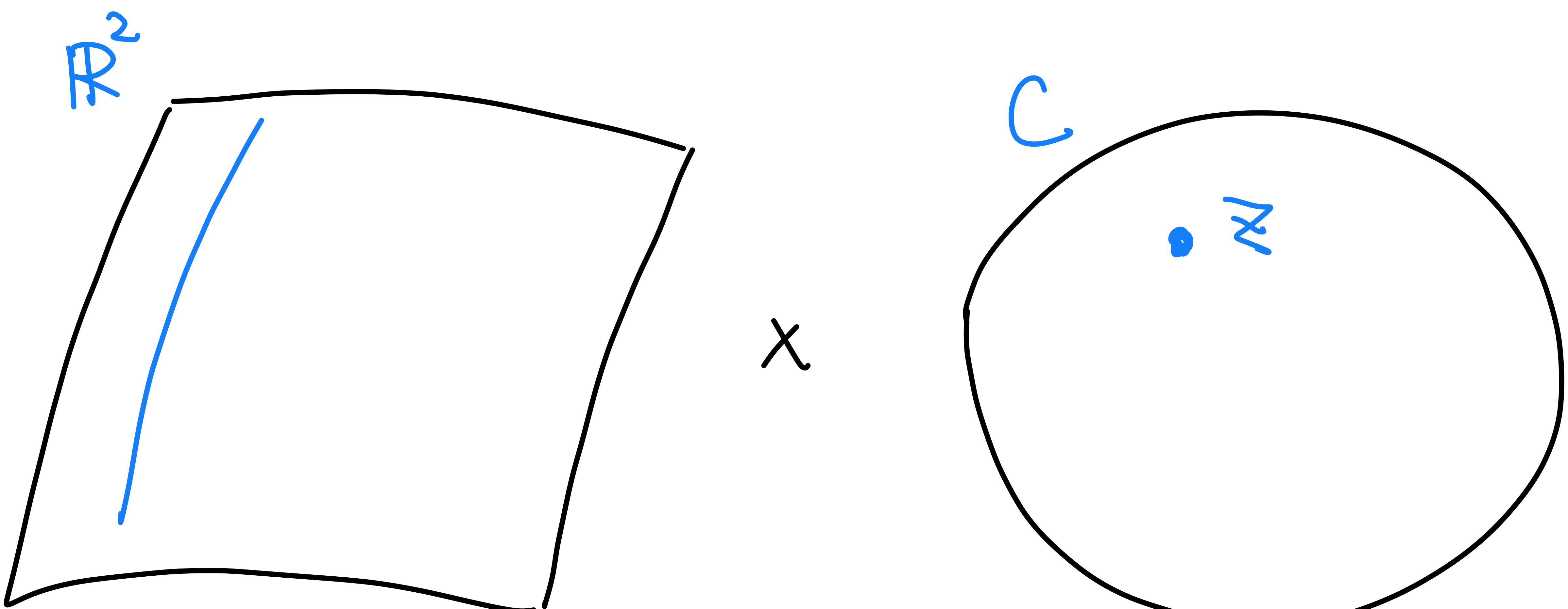
２次元部分：
トポロジカル

残りの２次元：
正則

設定は変わっても考えるのは

ゲージ場の1次元的な演算子（ウィルソン・ライン）

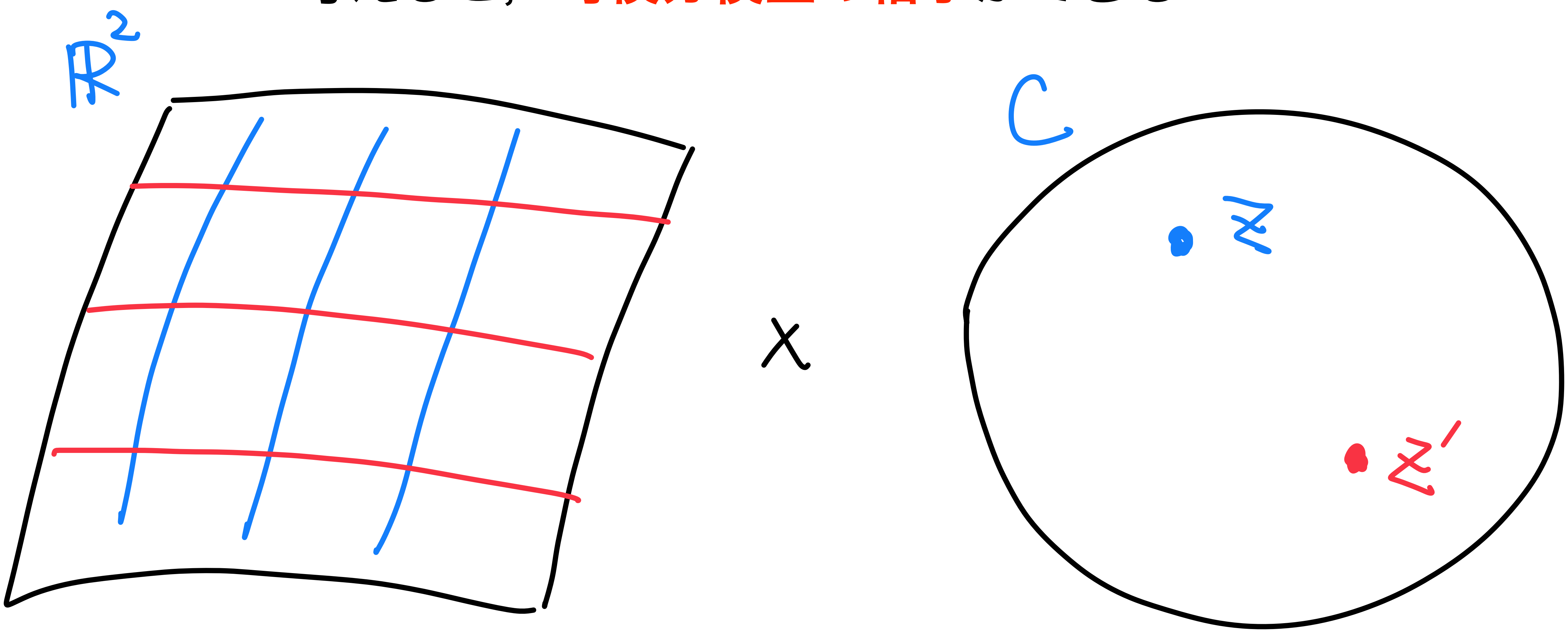
$$\langle W_C \rangle = \left\langle \mathrm{Tr}\, P\left(\exp \oint_C A\right) \right\rangle$$



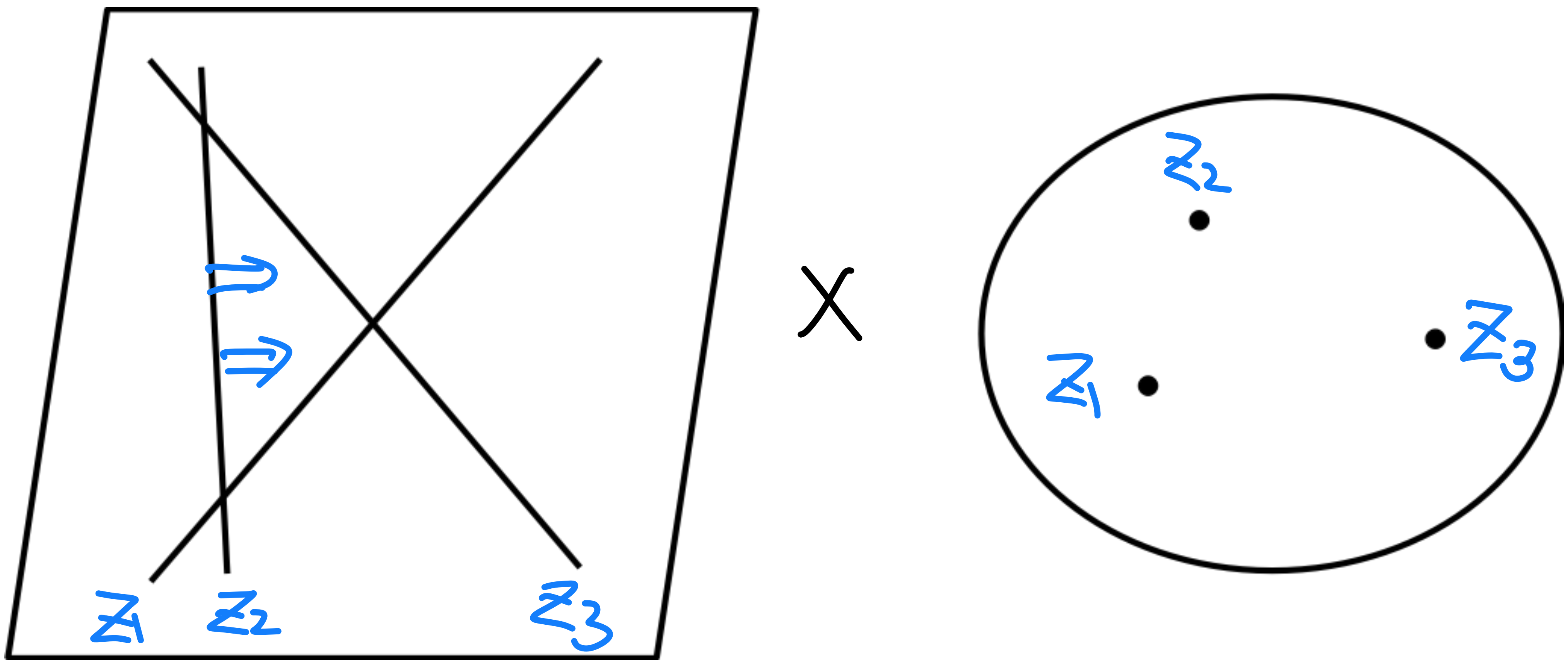
設定は変わっても考えるのは
ゲージ場のウィルソン・ライン

$$\langle W_C \rangle = \left\langle \mathrm{Tr}\, P \left(\exp \oint_C A \right) \right\rangle$$

たくさんのウィルソン・ラインを
考えると，可積分模型の格子ができる

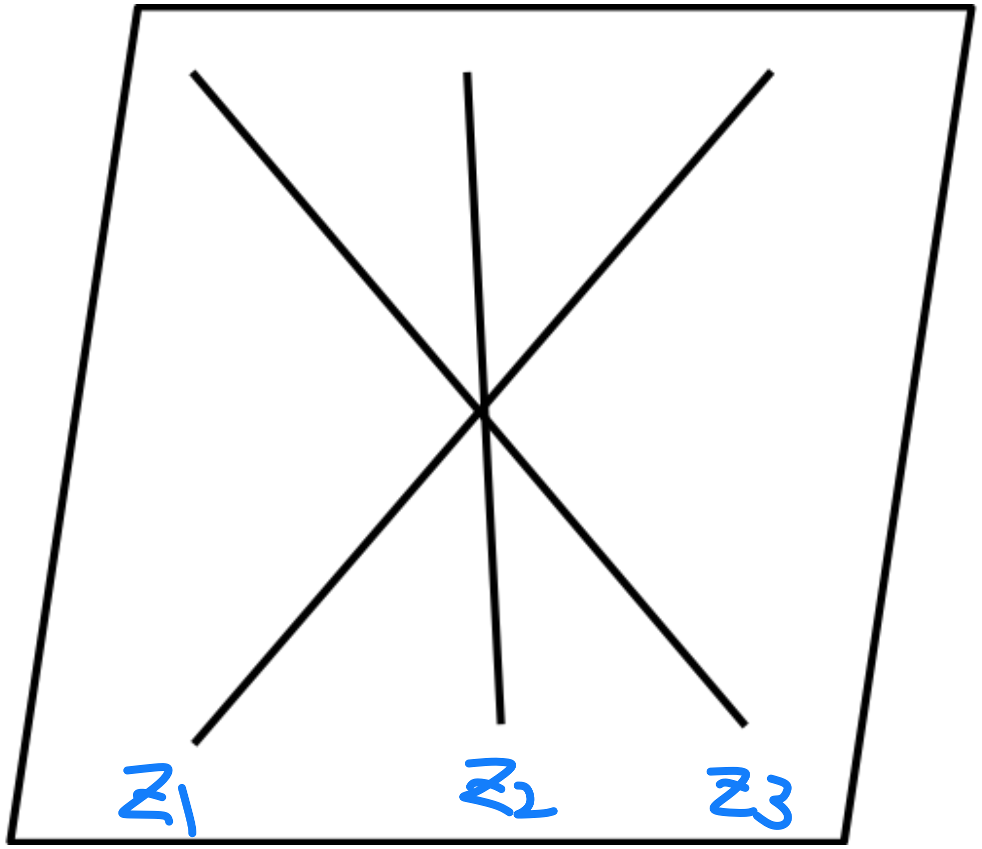


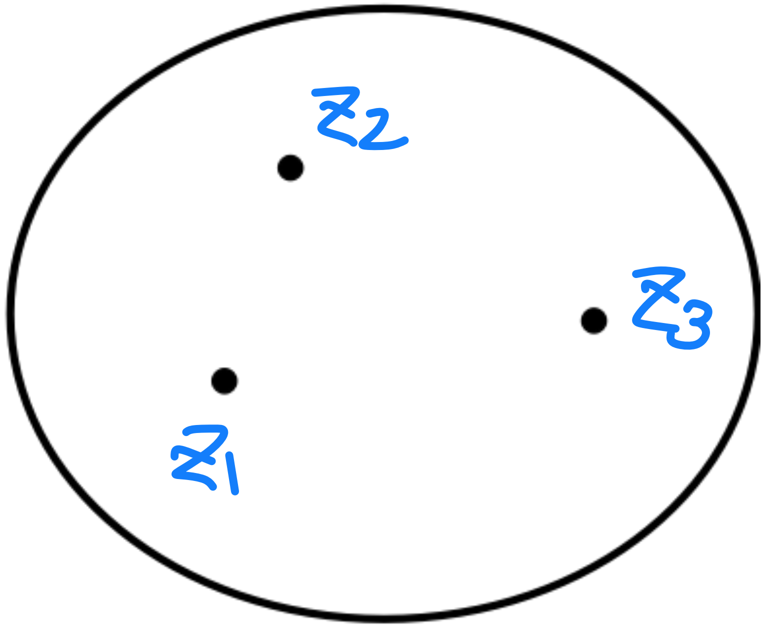
トポロジカルな方向にウィルソンラインを動かしても
「余剰次元」のためにウィルソンラインは交わらない



トポロジカルな方向にウィルソンラインを動かしても
「余剰次元」のためにウィルソンラインは交わらない

よって，ヤン・バクスター方程式は自動的

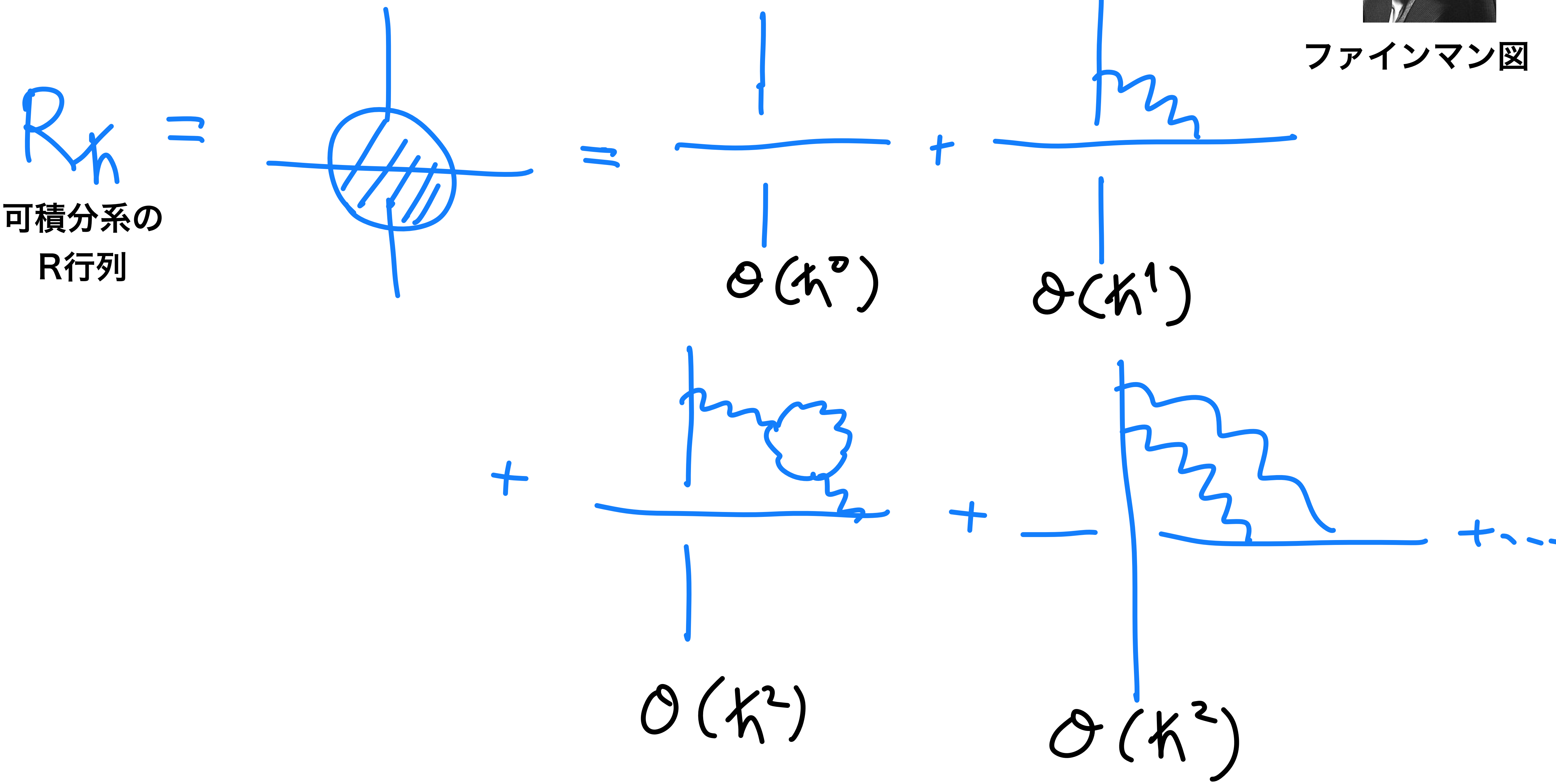




場の理論の**量子効果を摂動的に計算**することで,
可積分系の結果を系統的に再現できる

[Costello, Witten + MY]

ファインマン図

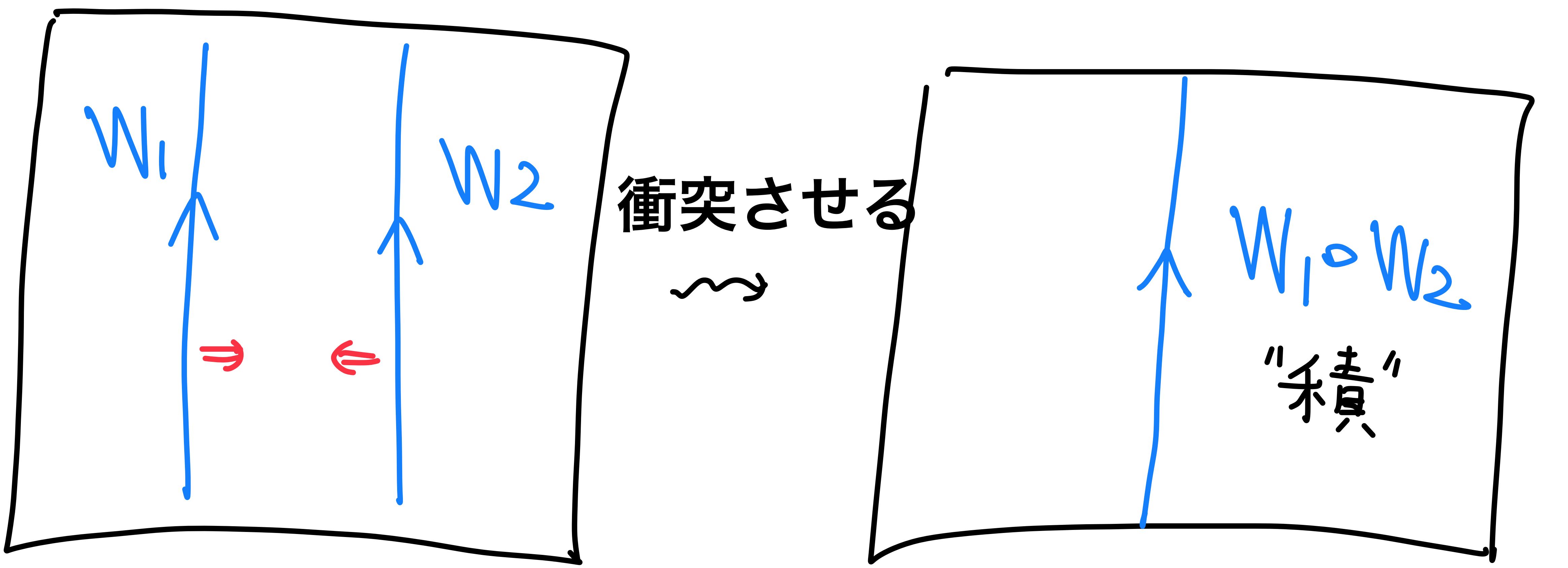


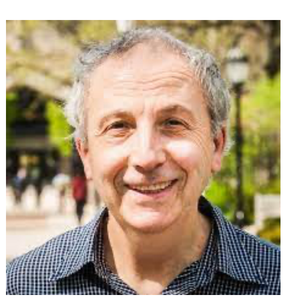
可積分系の
R行列

逆に言えば，これは摂動論の任意の次数で物理量が計算できる

「ウィルソン・ラインのなす代数」
を考えることで，可積分系の背後にある無限次元代数
（ヤンギアンとその仲間たち）を導出できる

[Costello, Witten + MY]





Drinfeld

$Y_\hbar(\mathfrak{g})$, $U_{q,\hbar}(\mathfrak{g})$, $U_{\tau,\hbar}(\mathfrak{g})$

有理　三角　楕円

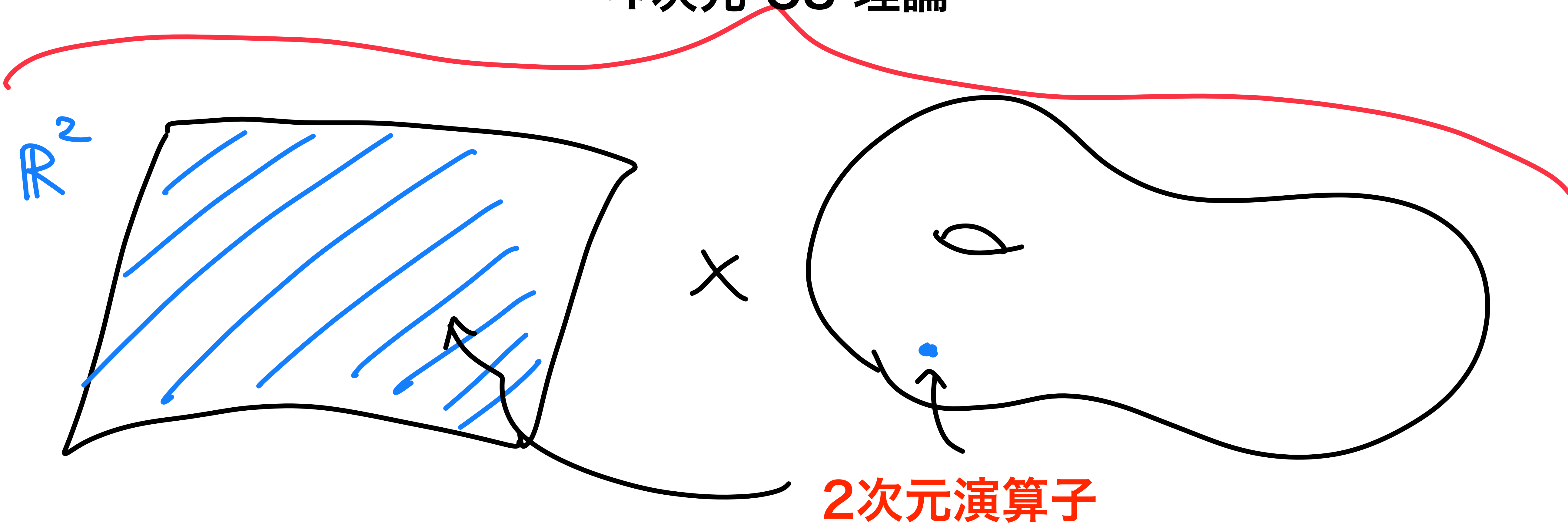
$\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^\times$, $E \leftsquigarrow \mathbb{C}$

更なる発展の例

ここまで1次元的な演算子を考えた。

しかし例えば2次元的な演算子も考えられる。

4次元 CS 理論



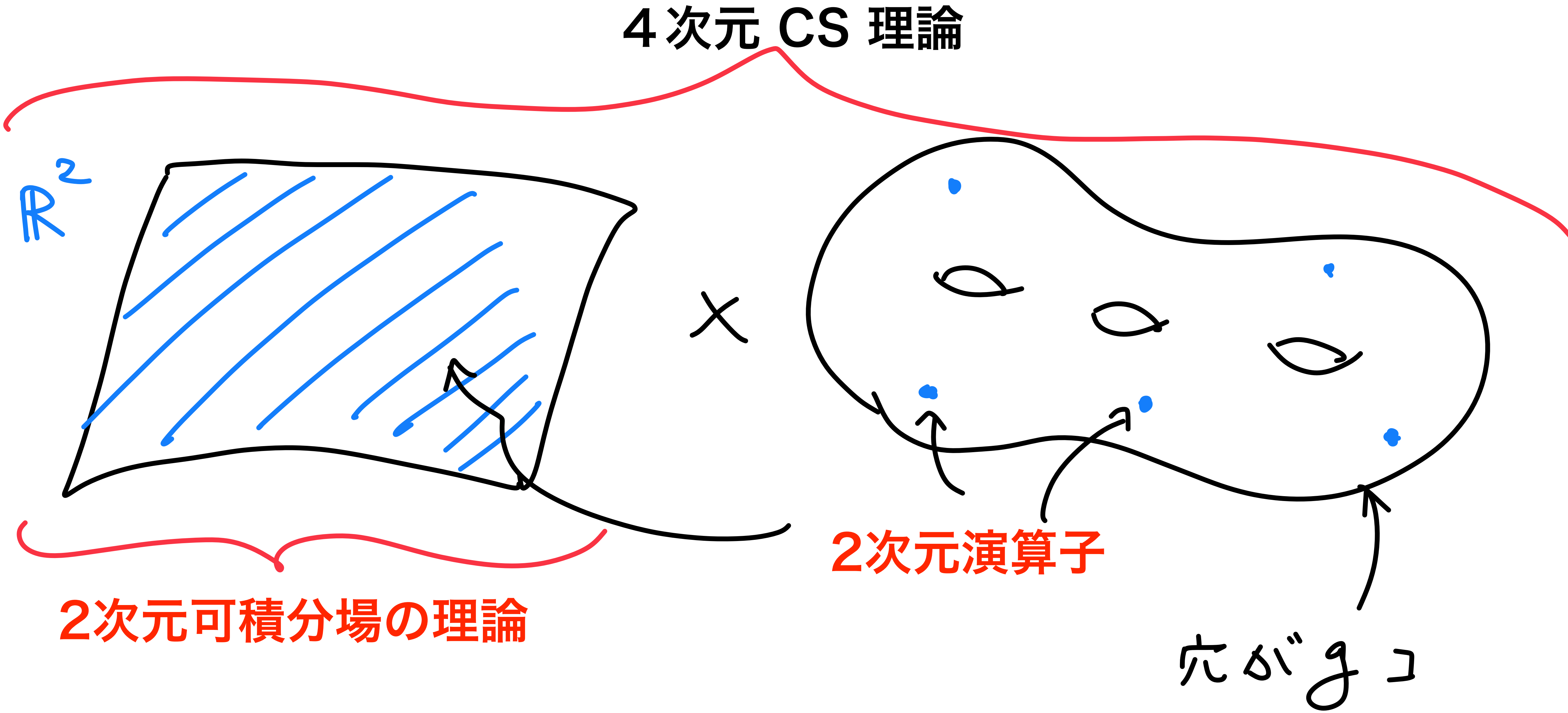
ここまで1次元的な演算子を考えた。

しかし例えば2次元的な演算子も考えられる。

4次元 CS 理論

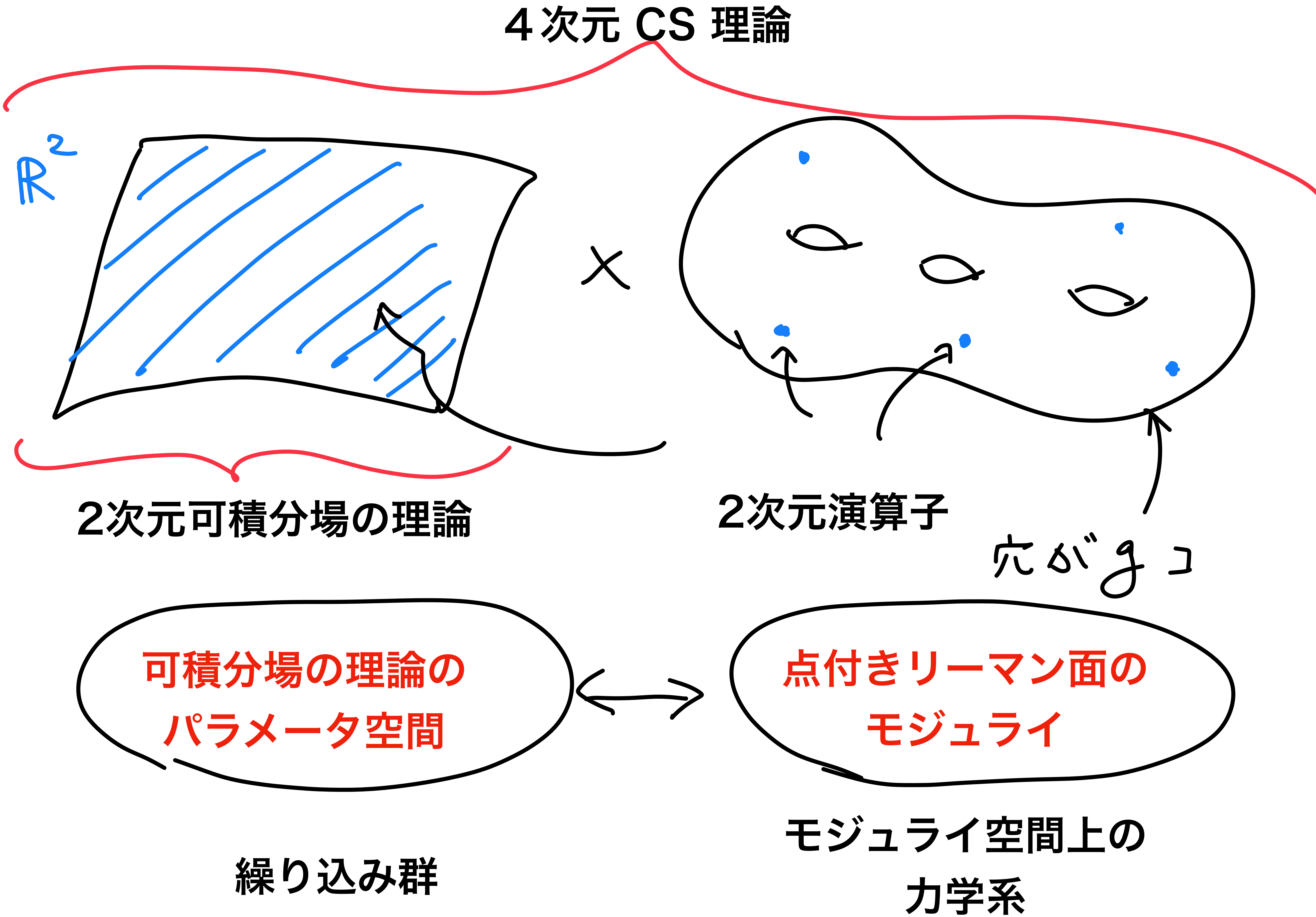
ここまで1次元的な演算子を考えた。

しかし例えば2次元的な演算子も考えられる。



無限個の新しい可積分場の理論を系統的に構成　[Costello + MY]

既存の可積分模型は，文字通り氷山の一角だった！



4次元 CS 理論
$\mathbb{R}^2$
×
2次元可積分場の理論
2次元演算子
穴がgコ
可積分場の理論のパラメータ空間
点付きリーマン面のモジュライ
繰り込み群
モジュライ空間上の力学系

この構成を高次元に持ち上げることができる

[Costello, Bittleston-Skinner]

４次元CS

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1$

$\xrightarrow{\mathbb{P}^1}$

2次元WZW

$\mathbb{R}^2$

可積分

この構成を高次元に持ち上げることができる

[Costello, Bittleston-Skinner]

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{6次元CS}\\ \text{``}\mathbb{R}^2\times E\times\mathbb{P}^1\text{''}\end{array} \arrow[r, "\mathbb{P}^1"] \arrow[d, "E"] & \begin{array}{c}\text{4次元WZW}\\ \mathbb{R}^2\times E\end{array} \arrow[d, "E"] \\
\begin{array}{c}\text{4次元CS}\\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{P}^1\end{array} \arrow[r, "\mathbb{P}^1"] & \begin{array}{c}\text{2次元WZW}\\ \mathbb{R}^2\\ \text{可積分}\end{array}
\end{tikzcd}$$

この構成を高次元に持ち上げることができる

[Costello, Bittleston-Skinner]

$$
\begin{tikzcd}
\begin{matrix}\text{6次元CS}\\ \text{“}\mathbb{R}^2\times E\times\mathbb{P}^1\text{”}\end{matrix} \arrow[r, "\mathbb{P}^1"] \arrow[d, "E"] \arrow[dd, bend right] & \begin{matrix}\text{4次元WZW}\\ \mathbb{R}^2\times E\end{matrix} \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, "E"] & \begin{matrix}\text{4次元}\\ \text{ADSYM}\end{matrix} \arrow[d, squiggly] \\
\begin{matrix}\text{4次元CS}\\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{P}^1\end{matrix} \arrow[r, "\mathbb{P}^1"] & \begin{matrix}\text{2次元WZW}\\ \mathbb{R}^2\end{matrix} & \begin{matrix}\text{沢山の可積分}\\ \text{方程式}\end{matrix} \\
\simeq \mathbb{P}^3/\mathbb{P}^1 & &
\end{tikzcd}
$$

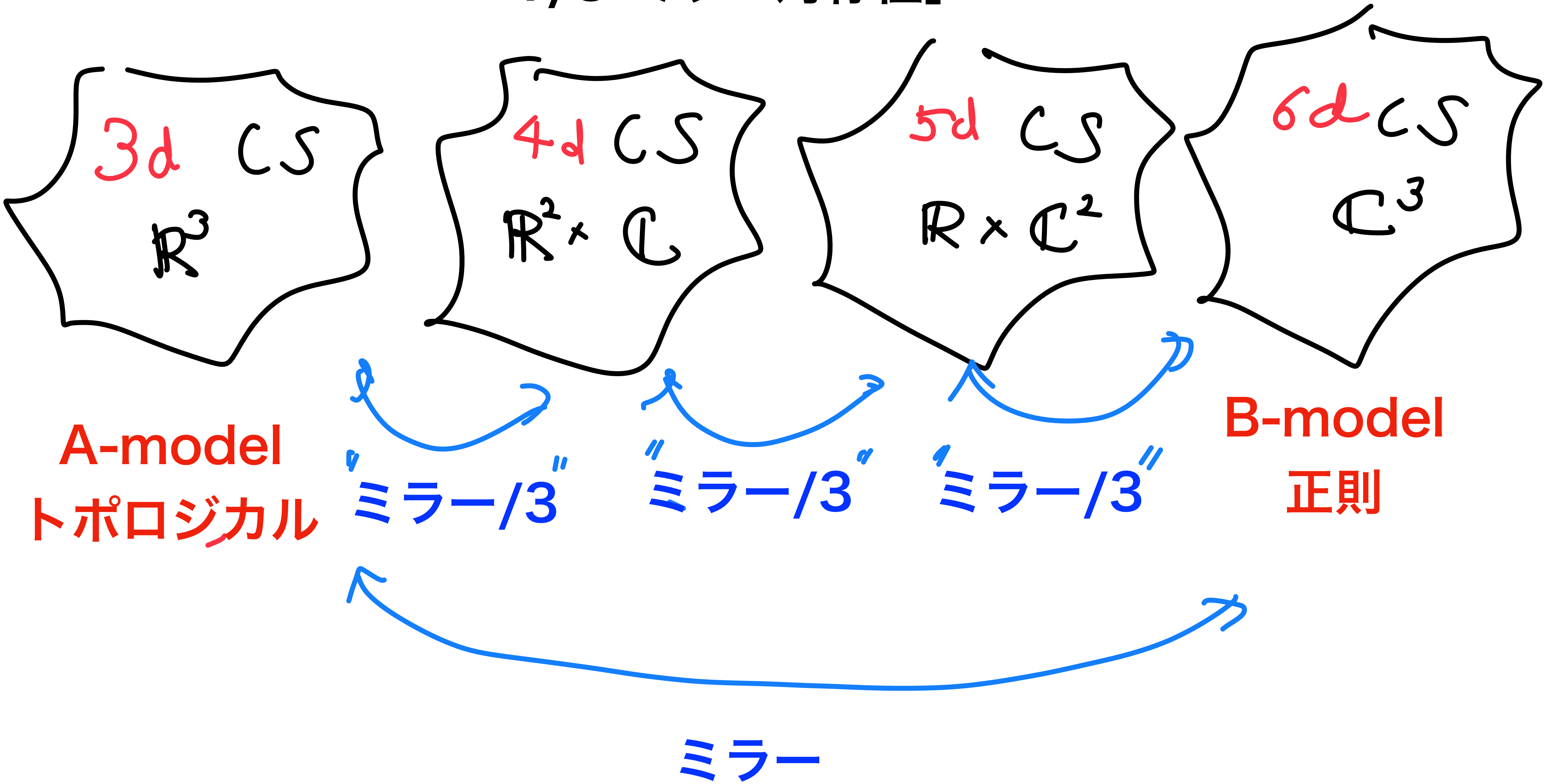
ツイスター空間

可積分

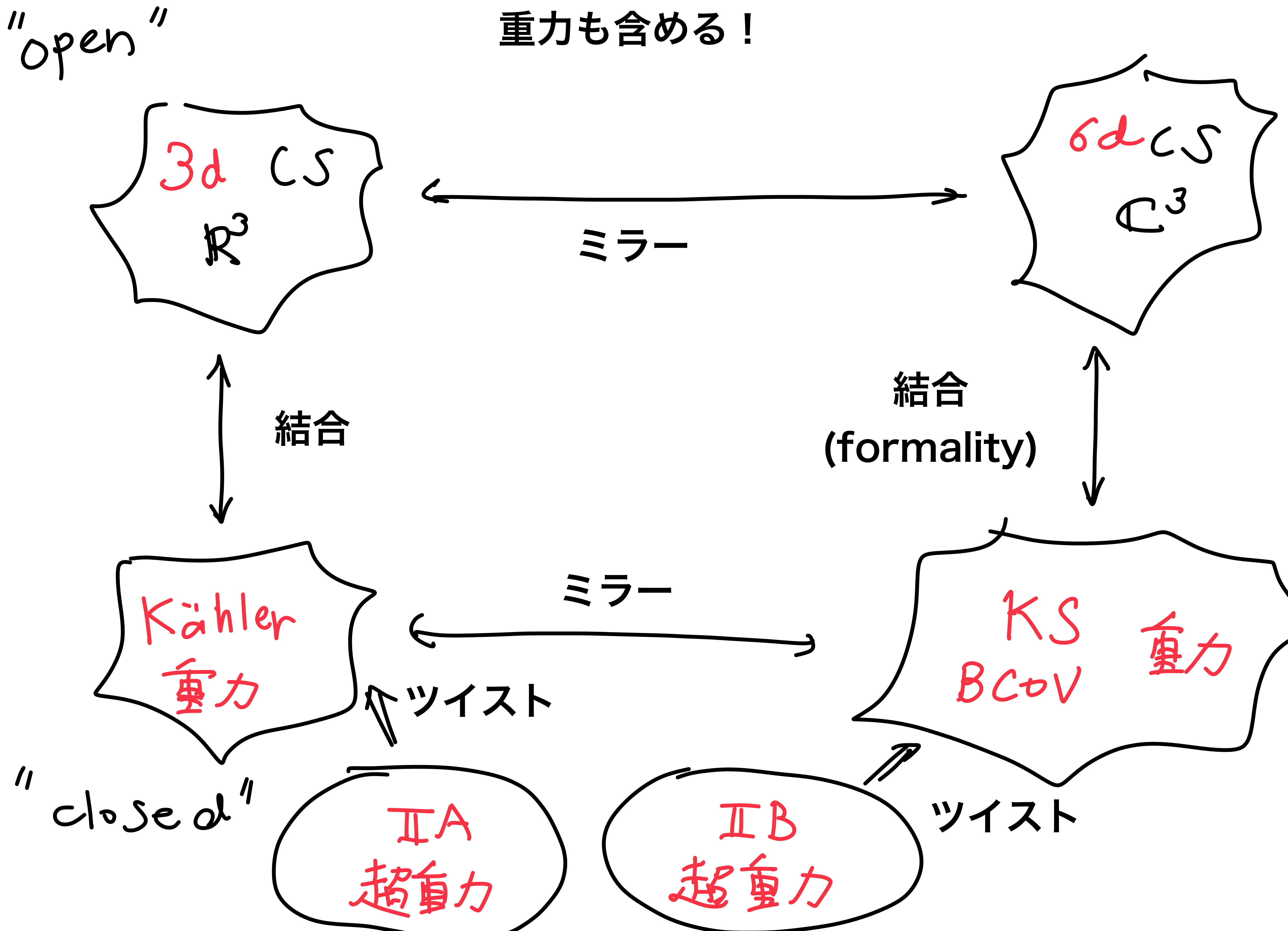
別の意味の可積分

可積分系の統一理論？

「1/3 ミラー対称性」



cf. 一般化された複素構造



重力も含める！
"open"
3d CS
$\mathbb{R}^3$
6d CS
$\mathbb{C}^3$
ミラー
結合
結合
(formality)
Kähler
重力
ミラー
KS
BCOV
重力
ツイスト
"closed"
IIA
超重力
IIB
超重力
ツイスト

まとめ

場の理論の数学的枠組みは摂動論的にはすでに存在する

3次元チャーン＝サイモンズ理論 ⇝ 結び目

4次元チャーン＝サイモンズ理論 ⇝ 可積分系

可積分系に限らず，様々な数学の分野を結びつける？

未知の数学が，量子場の理論にまだまだ潜んでいる？