可積分系とチャーン＝サイモンズ理論

山崎雅人　(東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構)*

概　要

量子場の理論は一般にはまだ数学的に厳密に定義されていない物理学の理論であるが，これまで幾多の新しい数学を生み出すと同時に，数学の諸分野を結びつける役割を果たしてきた．特に，ウィッテンは 1989 年に 3 次元チャーン＝サイモンズ量子場の理論を用いて結び目不変量を系統的に構成し，数学界に大きなインパクトを与えた．一方，結び目不変量の源流の一つであった可積分系についてその場の理論的解釈を見つける問題については，90 年代の初頭から長年の未解決問題として残されていた．近年この問題が 4 次元のチャーン・サイモンズ型量子場の理論の摂動展開を考えることにより解決され，可積分系を包括的に理解する全く新たな枠組みができあがりつつある．本講演ではこれらの発展について概説を試みたい．

1　量子場の理論の数理

数学は自らの問題意識に基づいて発展を続けていく自律的な学問であるが，その一方で，ときに外の世界と交流し，新しいアイデアを積極的に取り入れることによって更なる飛躍的な発展を遂げてきた．

21 世紀の現代数学にとって，量子場の理論はまさにそのような新しいアイデアの宝庫なのではないだろうか．量子場の理論を厳密に数学的に定式化する問題は現在も難問として残されており，その解決のめどはついていない．しかし，実は場の量子論の摂動論的定式化については既に厳密な数学的定式化が存在している [*1]（例えばコステロらによる本 [10,13,14] を参照）し，4 次元のヤン＝ミルズ理論やその超対称版など，素粒子物理学者がしばしば議論しているような場の理論についても，繰り込みやアノマリーのような場の理論の量子効果についての結果を伝統的な数学の範疇で議論することが徐々に可能になってきている．この意味で，いわゆる純粋数学者にとっても，「場の理論は数学では

* 〒277-8583 千葉県柏市柏の葉 5-1-5
e-mail: `masahito.yamazaki@ipmu.jp`
web: `http://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki`

本稿は 2023 年 3 月に中央大学において開催された日本数学会年会での企画特別講演のための予稿として用意されたものであり，日本数学会の電子的公開についての規則 `https://www.mathsoc.jp/meeting/kikaku/abst_copyright20091107.pdf` に基づいて講演後にウェブ上にて公開されたものである．講演のスライドは `https://member.ipmu.jp/masahito.yamazaki/files/2023/20230318_JMS.pdf`，またビデオは `https://www.youtube.com/watch?v=-ecNsYS1wnQ` において公開されている．公開にあたって，一部誤植を訂正するなどの修正を加えた．本研究は科研費 (課題番号:17KK0087) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 81T15, 81R10
キーワード：可積分系, 量子場の理論

*1 場の理論において数学的に未解決なのは，場の理論の非摂動的定義であるといっても基本的に正しいのではないかと思う．有名なミレニアム問題は 4 次元ヤン＝ミルズ理論の閉じ込めを数学的に示すことであるが，閉じ込めはまさにそのような非摂動的効果である．

ないから...」という言い訳が徐々に通用しにくくなってきている時代が訪れているといえよう．

本講演では，量子場理論からもたらされる新しいアイデアの一つとして，4 次元のチャーン＝サイモンズ量子場の理論の摂動展開が可積分系の様々な結果を再現するという著者らの結果 [15,16] への入門を試みる [*2]．多くの数学者にとって 4 次元チャーン＝サイモンズ理論は馴染みのないものであろうから，以下ではまず，より有名な 3 次元チャーン＝サイモンズ理論について復習することからはじめることにしよう．

2　結び目理論と 3 次元チャーン＝サイモンズ理論

量子場の理論を数学に応用する上で，お手本ともいうべき古典的結果がウィッテンによる結び目不変量の説明である [36]．これについてはご存知の方も多いと思うが，ここで簡単にまとめておこう．

3 次元球面 S^3 の中の結び目 K を考えよう．この時，結び目不変量とは K について与えられる量 $J(K)$ で K の連続変形（イソトピー）で不変な量のことである．ジョーンズによる結び目不変量の定義 [23, 24] では結び目そのものではなく結び目の二次元平面への射影を考えたが，同じ結び目でも射影の取り方を変えると二次元での図は変わってしまう（例えば図 1）．そこで，ジョーンズは不変量が変わらないことを計算により確かめることにより不変量が定義されていることを確認した．

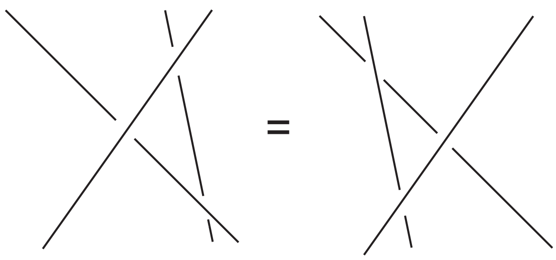

図 1　結び目のイソトロピックな変形の例．いわゆるライデマイスター変形 (III).

一方，ウィッテンは量子場の理論として 3 次元チャーン＝サイモンズ理論を考えた．半単純 Lie 群 G そのリー環 $\mathfrak{g}$ を固定しよう．M を向きづけられた閉じた 3 次元多様体とし，そこで主 G 束の接続（ゲージ場）A を考える．この時，3 次元チャーン＝サイモンズ理論の作用汎函数（ラグランジアン）は

$$S[A] = \frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right) \tag{1}$$

で与えられる．ただし，Tr は Killing 形式（$\mathfrak{g}$-不変な双線型形式）であり，k はレベルと呼ばれる整数である．このラグランジアンは M の計量を用いずに定義することができ

[*2] 筆者の YouTube チャンネル `https://www.youtube.com/@masahito.yamazaki` には本稿に関係した講義の動画がいくつか掲載されている．例えば `https://www.youtube.com/watch?v=KNGOzdPazGA`.

[*3]，考えている理論は位相的な（トポロジカルな）場の量子論になっている．このラグランジアンの導く運動方程式は平坦接続の方程式 $F = dA + A \wedge A = 0$ であるので，古典解の集合は平坦接続のモジュライ空間であり，3 次元チャーン＝サイモンズ理論はこのモジュライ空間を量子化する手続きを与えていると考えることができる [*4].

ウィッテンは結び目 K に沿ってゲージ場を積分して得られるウィルソン・ライン

$$W_R(K)[A] = \mathrm{Tr}_R\, \mathcal{P} \exp\left(\int_K A\right) \tag{2}$$

を考えた [*5]．ただし，ここで $\mathcal{P}$ は結び目に沿った順序を定めており，指数関数の部分はゲージ場の結び目に沿ったモノドロミーを表している．また G の表現 R を選び，そのウェイト空間でのトレース Tr_R を考えた．接続の空間をゲージ群の作用により同一視した空間上に形式的に径路積分の測度 $\mathcal{D}A$ が存在すると思うことにすると，ウィルソン・ラインの期待値

$$\langle W_R(K)\rangle = Z^{-1} \int \mathcal{D}A\; W_R(K)[A]\, e^{iS[A]}\;, \quad Z := \int \mathcal{D}A\; e^{iS[A]} \tag{3}$$

は定義にトポロジーしか用いていないし，特に結び目の射影をそもそも用いていないので，結び目のトポロジカル不変量が得られることは特に何の計算をしなくとも自動的である.

こうしてゲージ群 G と表現 R に付随して結び目不変量が定まることになり，例えば $G = SU(2)$，R が基本表現の時にジョーンズ不変量を再現する [36]．さらに，結び目のデーン手術を考えることで閉じた 3 次元多様体の不変量を構成することもでき，これは例えば量子群の冪根での表現論を考えることによって数学的に定式化できる [32].

3 可積分系の謎

さて，次は本題である可積分系を議論しよう．ここで前節の議論が参考になる．歴史的には結び目理論と可積分系は互いに影響を与えあいながら発展してきたし [*6]，実際，ジョーンズによる結び目不変量の発展の源流の一つが可積分系であった．今は逆に，結び目理論から可積分系に遡ろうというわけだ.

[*3] 3 次元多様体 M を境界に持つような 4 次元多様体 N を用意し（$M = \partial N$），部分積分した $S[A] = k/(4\pi)\int_N \mathrm{Tr}\,(F\wedge F)$ により作用汎函数 (1) の別の定義が与えられる．この量は k が整数なので N の選び方によらずに定まる．量子論的には分配関数は N の符号数（あるいは 2-framing と呼ばれる $TM \oplus TM$ の自明化 [2]）に依存し，理論は自然には M のトポロジーだけではなく framing の選び方にも依存する（framing anomaly）が，「標準的な」framing を選ぶことにすれば M の位相不変量を得ることもできる.

[*4] ハミルトン形式による量子化では，時間一定の切り口に現れる 2 次元面 Σ の平坦接続のモジュライ空間を考える．この空間は有限次元であり標準的なシンプレクティック形式を持つので，量子化を実行できる.

[*5] ボレル＝ヴェイユ＝ボット理論を用いると，ウィルソン・ラインを考えることは境界付き多様体 $M\backslash N(K)$ を考えることと等価であることがわかる [36]．ここで $N(K)$ は結び目の管状近傍であり，$M\backslash N(K)$ の境界でゲージ場が適切な特異性を持つ境界条件を課す．二つの等価が存在することは，チャーン＝サイモンズ理論にある種の S 双対性が存在することと関係している.

[*6] 筆者は学生の頃に和達・出口・阿久津氏による [35] に触れる機会があったので，長年両者の関連が気になっていた.

両者の類似性を端的に示すには．可積分系の定義式の一つであるヤン・バクスター方程式 [4,41]（図 2）を考えるのが良い．この図が結び目における図 1 に類似していることは一目瞭然だろう．

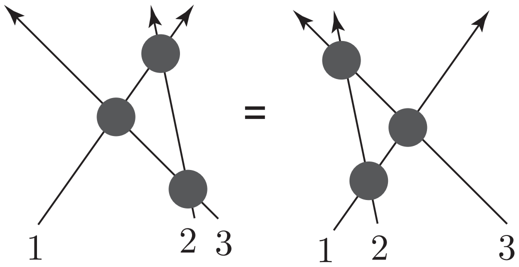

図 2　ヤン・バクスター方程式の図による表現.

図 2 の意味を説明しよう．まず三本の線 $1, 2, 3$ が交わっており，それぞれにベクトル空間 V_1, V_2, V_3 およびスペクトル変数と呼ばれる複素変数 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ が付随している．二つの線の交点には R 行列（図 3）

$$R_{ij}(z_i - z_j) \in \mathrm{End}(V_i \otimes V_j) \ . \tag{4}$$

を対応させせることにする（物理的なイメージとしては，2 つの粒子が散乱する過程を表していると考えれば良い）．このとき，ヤン＝バクスター方程式は $\mathrm{End}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$ の元の等式として

$$\begin{aligned} &R_{23}(z_2 - z_3) R_{13}(z_1 - z_3) R_{12}(z_1 - z_2) \\ &\quad = R_{12}(z_1 - z_2) R_{13}(z_1 - z_3) R_{23}(z_2 - z_3) \end{aligned} \tag{5}$$

となる．ただし，例えば $R_{12} \in \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2)$ は $R_{12} \otimes 1_{V_3} \in \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$ のことである．

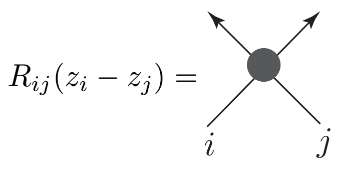

図 3　R 行列

ヤン＝バクスター方程式は可積分系の一つの特徴づけであり，仮にこの方程式を満たす R 行列が存在すれば，そこから可積分な（系の自由度と同じ数の保存量を持つ）格子模型を定義することができる．従って，例えば可積分系を分類したければこの方程式の解を分類すれば良い．ところが，行列として具体的に書き下せばわかるように，ヤン＝バクスター方程式はとても制限の強い（例えば変数の数よりも方程式の数が多い）方程式であり，闇雲に探していると，解が存在するかどうかすら明らかではない [*7]．しかし驚くべ

[*7] 実際，この世の中に存在する物理系のほとんど全ては可積分系ではないといってもよい：4 次元時空ではあ

きことに [*8]，可積分系の長年にわたる研究の中でヤン＝バクスター方程式の様々な解が構成されてきた．例えばスペクトル変数 z が $\mathbb{C}$ に限らず $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ または複素一次元トーラス E に値を持つ解（それぞれ有理型，三角型，楕円型と呼ばれる）が見つかってきた [*9]．また，これらの解には特にそのような解の背後にはヤンギアン（有理型）・量子アファイン代数（三角型）・楕円代数（楕円型）という大きな対称性が存在することが明らかになってきた．以下では簡単のため，ほとんどヤンギアンの場合を考える．

4 ヤンギアンの謎

表現論の立場から可積分系を説明する無限次元代数がドリンフェルトによって導入されたヤンギアンである [18,19]．ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ は半単純リー環 $\mathfrak{g}$ に付随して定まる代数である．その詳細についてここでは紹介しないが（例えば [8] の Chapter 12 を参照)，一つの性質として変形パラメーター $\hbar$ が 0 の時にはヤンギアンは普遍包絡環 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}[\![z]\!])$ に一致することは述べておこう．ここで，$\mathfrak{g}$ の基底を $\{\mathsf{t}_a\}$ $(a = 1, \ldots, \dim \mathfrak{g})$，その交換子を $[\mathsf{t}_a, \mathsf{t}_b] = \sum_c f_{ab}{}^c \mathsf{t}_c$ と書いた時，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}[\![z]\!])$ の基底は $\{\mathsf{t}_a^{(n)} = \mathsf{t}_a z^n\}_{n\geq 0}$ で与えられ，それらは自然な交換関係 $[\mathsf{t}_a^{(m)}, \mathsf{t}_b^{(n)}] = \sum_c f_{ab}{}^c \mathsf{t}_c^{(m+n)}$ を満たす．

ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{g})$ が与えられた時，三つの表現 $V_i(z_i)$ $(i = 1, \ldots, 3)$ を考えよう．ここで形式変数 z_i は $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}[\![z]\!])$ に現れた z と同一視できる [*10]．この時，ヤン＝バクスター方程式を解くためには，R 行列として表現のテンソル積の intertwiner $R_{i,j}(z_i, z_j) : V(z_i) \otimes V(z_j) \to V(z_j) \otimes V(z_i)$ を考えればよい．実際，ヤン＝バクスター方程式は $V(z_1) \otimes V(z_2) \otimes V(z_3) \to V(z_3) \otimes V(z_2) \otimes V(z_1)$ を二つの方法で計算した結果が整合的であるために成り立つべきものである．

こうして，可積分系の構成はヤンギアンの表現論の問題に帰着したので，表現を取り替えるごとにヤン＝バクスター方程式の解が自動的に得られることになる [*11]．このことは可積分系なりヤンギアンなりの専門家には当然のように知られているであろうし，これでひとまず一見落着といえなくもない．

る仮定のもとにそのような理論は存在しないという証明もある [9]）し，教科書にあるような熱・統計力学は理論が可積分ではないことを前提にしている．ただし，仮に出発点の理論が可積分でないとしてもその理論は繰り込み群のもとで変化し，やがては繰り込み群の固定点に行き着く．そのような固定点が可積分である例は時空 2 次元では数多く知られている．

*8 可積分系の専門家にとってこのことはしばしば自明であると感じられるようであるが，筆者にとっては全くそうではない．同様の難しさを感じているのは筆者だけではないようだ．例えば，晩年のファインマンは可積分系に興味を持っており，バクスターによる 8 頂点模型の解 [4] を自分なりの方法で導出しようと試みたが，結局失敗に終わっているのだ！ [31]

*9 R 行列が摂動展開を持つ時にはヤン＝バクスター方程式を展開することにより古典ヤン＝バクスター方程式を得るが，この方程式の解は（ある条件のもとで）有理型，三角型，楕円型に分類できることが知られている [5]．ただし，例えば量子アファイン代数の一の冪根に付随する可積分模型の R 行列はこれらの分類に含まれていない．

*10 このような表現は evaluation 表現と呼ばれる．

*11 さらに，普遍 R 行列を構成することもでき，R 行列は普遍 R 行列を考えたい表現で評価すれば得られるということまで示せる．

しかし，筆者のような素人からするとどうも腑に落ちないところがある [12]．というのも，出発点であるべきヤンギアンの定義式自体が（筆者の主観では）複雑すぎるのだ [13]．例えば $\hbar \neq 0$ の時に満たされている関係式の一つを挙げておこう：

$$\begin{aligned} &[J(\mathsf{t}_a), J([\mathsf{t}_b, \mathsf{t}_c])] + [J(\mathsf{t}_b), J([\mathsf{t}_c, \mathsf{t}_a])] + [J(\mathsf{t}_c), J([\mathsf{t}_a, \mathsf{t}_b])] \\ &\qquad = \frac{\hbar^2}{4} \sum_{d,e,f} ([\mathsf{t}_a, \mathsf{t}_d], [[\mathsf{t}_b, \mathsf{t}_e], [\mathsf{t}_c, \mathsf{t}_f]]) \{\mathsf{t}_d, \mathsf{t}_e, \mathsf{t}_f\} \, . \end{aligned} \tag{6}$$

ただし $\{\mathsf{t}_1, \mathsf{t}_2, \mathsf{t}_3\} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_3} \{\mathsf{t}_{\sigma(1)}, \mathsf{t}_{\sigma(2)}, \mathsf{t}_{\sigma(3)}, \}/3!$ と定義した．また，$\mathsf{t}_a = \mathsf{t}_a^{(0)}$ であり，J は $J(\mathsf{t}_a^{(0)}) = \mathsf{t}_a^{(1)}$ を線型に拡張して得られる写像である．左辺は $\hbar = 0$ の時ヤコビ恒等式から自明であるので，$\hbar^2$ に比例した右辺は代数への「量子補正」を表していることになる．それがなぜこんな複雑な式になるのだろうか？

関係式 (6) はヤンギアンの表現論にとっても重要である．一般に $\mathfrak{g}$ の表現 R が与えられれば，それを自然に拡張する（$\mathsf{t}_a^{(n)} = \mathsf{t}_a z^n$ ととる）ことで $Y_{\hbar=0}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}[\![z]\!])$ の表現が与えられる．ところが，$\hbar \neq 0$ の時には関係式が (6) のように補正を受けてしまうので，右辺が消えない限りもはや表現ではななくなってしまう．実際，例えば $\mathfrak{e}_8$ の随伴表現 $\mathbf{248}$ は $\hbar \neq 0$ のヤンギアンの表現ではなく，ヤンギアンの表現を得るためには自明な表現を足して $\mathfrak{e}_8$ 表現としては可約な表現 $\mathbf{248} \oplus \mathbf{1}$ を考えないとヤンギアンの表現が得られない [7]．このように，ヤンギアンの表現論には色々と微妙なところがあるのだ．

5　4 次元 Chern-Simons 理論と可積分系

さて，ここまで可積分系とヤンギアンについて説明してきた．次に説明するのは，既存の結果のインプットなしに，量子場の理論のロジックだけを使ってこれらを導出するためにはどうしたら良いのだろうか？

ここで指針となるのは結び目理論と可積分系の類似（2 節）である．特に，二つの図，図 1 と図 2 を改めて比較してみよう．類似点も多いが，重要な違いも存在する：(1) 結び目では結び目の射影での交点で over-crossing/under-crossing を区別し 3 次元的であるが，可積分系ではそのような区別はないので図が 2 次元的になっている (2) 追加のデータとして，可積分系では各々の線にスペクトル変数 $z \in \mathbb{C}$ が指定されている．

通常の可積分系の議論では可積分模型の格子は 2 次元空間（座標をいれて x, y-平面としよう）に実現され，スペクトル変数は付随的なデータとして扱われる．しかしここでは

---

[12] 歴史的にはドリンフェルトは R 行列から出発することにより（いわゆる RTT 関係から）ヤンギアンを導いた．この意味ではヤンギアンは自然だと考えるのが普通の考えかもしれない．しかし，ヤンギアンの定義に R 行列を使うことにすると，少なくとも何らかの R 行列を仮定しなくてはならない．R 行列を導くためにヤンギアンを使いたかったのだから，本当にミニマルな立場から出発したければ，R 行列自体もどこか別のところから導出できなければいけない．

[13] 数学において定義は一旦受け入れて進むのが王道かもしれず，筆者も実際にはそうすることがある．しかし，出発点となる定義を何らかの方法で自分なりに納得できないと，筆者の場合はいつまでたっても理解した気になれない．なお，三角型，楕円型などへと一般化していくと基本的な構造には違いはないが式はより複雑になっていくので，習熟が必要とされる．

スペクトル変数も幾何に含めて考えることとし，4 次元多様体 $\mathbb{R}^2_{x,y} \times \mathbb{C}_z$ を考えることにしよう [*14]．ここで，$\mathbb{R}^2_{x,y}$ 方向は可積分格子模型の住んでいる 2 次元空間であり，$\mathbb{C}_z$ はスペクトル変数 z およびその共役 $\bar{z}$ を座標とする 2 次元空間である．可積分系ではしばしばスペクトル変数は補助的なものとして現れるが，それを文字通り幾何の一部として考えるわけである [*15]．

この準備のもとで，4 次元チャーン＝サイモンズ理論の作用汎函数は

$$S[A] = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{\mathbb{R}^2_{x,y} \times \mathbb{C}_z} dz \wedge \mathrm{Tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \tag{7}$$

と書き下すことができる．

一般に 4 次元理論では，通常 4 つの方向どの方向の並行移動にも接続を使うことができる．しかし，今の場合，ラグランジアンが dz を含んでいるので接続の dz 成分はなくなり，$A = A_x dx + A_y dy + A_{\bar{z}} d\bar{z}$ と $\mathbb{C}_z$ 方向には部分的な接続になる [*16]．もっとも，これは幾何学的にはそれほど不自然ではない．ラグランジアン (7) から定まる運動方程式は，$A_{\bar{z}} = 0$ なるゲージを取ることにすると（1）xy 方向には平坦：$F_{xy} = 0$（2）z 方向には正則：$\partial_{\bar{z}} A_x = \partial_{\bar{z}} A_y = 0$ となっている．理論は Σ の方向にはトポロジカルであり，C の方向には正則である．特に，全ての方向についてトポロジカルである 3 次元チャーン＝サイモンズ理論の場合とは異なり，部分的にしかトポロジカルではないことに注意したい．

さて，可積分系における格子は，3 次元チャーン＝サイモンズ理論における結び目であったので，格子を作るには (3) と同様にウィルソン・ラインを考えたい．

$$W_R = \mathrm{Tr}_R \, \mathcal{P} \, \exp \left(\int_\gamma A(z_0) \right) = \mathrm{Tr}_R \, \mathcal{P} \, \exp \left(\int_\gamma \sum_a \mathsf{t}_a A^a(z_0) \right) \tag{8}$$

ただし，今格子を作りたいのは $\mathbb{R}_{x,y}$-方向なので，γ は点 $z = z_0$ に位置し，x 軸あるいは y 軸に並行な直線である．また，トレースにおいてはゲージ群 G の表現 R を考えた．

さて，ここまでの説明で，既にヤン＝バクスター方程式を説明するための道具立ては整っている．今 4 次元理論を考え，そのうち理論がトポロジカルな方向にウィルソン・ラインを考えた．ヤン＝バクスター方程式（図 2）はこのウィルソン・ラインの相対的な位置を変えても答えが変わらないというのが主張だが，今理論はトポロジカルなのでこのような連続変形をしてももちろん変わらない．従って，ヤン＝バクスター方程式を満た

[*14] ただし，量子効果（framing anomaly）によりこの二つの多様体は直積ではなくなる [15]．可積分系では，しばしば R 行列の引数であるスペクトル変数が $\hbar$ に比例したシフトを受けることがあるが，これはこの framing anomaly の現れである．

[*15] このように情報をできるだけ幾何的に表現しようとする考え方は，超弦理論において頻出するものである．

[*16] このことに関連して，作用汎函数はエルミートではなく，経路積分においては収束のために適切な積分径路を選んでやる必要がある．物理的には，これは 5 次元超対称 $\mathcal{N} = 2$ ヤン＝ミルズ理論のトポロジカル・ツイストを考え，4 次元チャーン＝サイモンズ理論をその教会として実現することと関連している（[1] 参照）．このあたりの事情は体積予想の議論に現れる複素 3 次元チャーン＝サイモンズ理論の議論と類似しており [37]，後者の場合は幾何ラングランズの文脈で考えられた 4 次元 $\mathcal{N} = 4$ 理論のトポロジカル・ツイスト [25] が現れる．

していることは構成から自動的に保証されているのである．なぜヤン＝バクスター方程式が解けるかが簡単に説明できてしまったのだ！なんだか騙されたようなようではあるが，この説明は，ウィッテンによる3次元チャーン＝サイモンズ理論による結び目理論の説明とかなり直接的に対応していることがわかるだろう [*17].

6 量子化からヤンギアンへ

ここまでで一通りセットアップは済んだので，今度はより具体的にどうやってヤンギアンが現れるのかを調べてみよう．作用汎函数 (7) を眺めると，大体これは $x, y, \bar{z}$-方向についての3次元チャーン＝サイモンズ理論 (1) と同じで，z はエクストラなパラメーターとして現れているように見える．つまり，$\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}[\![z]\!]$ に置き換わっているように見える．これは古典極限 $\hbar = 0$ でヤンギアンは普遍包絡環 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}[\![z]\!])$ であったこととうまくマッチしている．

このことはウィルソン・ラインについても当てはまる．ゲージ場の z-微分を考えることにすれば，(8) よりもさらに一般的に，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}[\![z - z_0]\!])$ の表現 $\hat{R}$ から定まるウィルソン・ラインを考えることができる：

$$W_R = \mathrm{Tr}_{\hat{R}} P \exp\left(\int_\gamma \sum_a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\mathtt{t}_a (z - z_0)^n}_{\mathtt{t}_a^{(n)} \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}[\![z - z_0]\!])} \partial_z^n A^a(z_0) \right) . \tag{9}$$

さて次に量子効果を考え，$\hbar \neq 0$ の場合を考えることにしよう．ここで我々は本格的に量子場の理論の範疇に入ってくることになる．量子場の理論は一般にはまだ厳密な数学になっていないというのは事実であるが，幸いなことに，ここで我々が必要とするのは場の理論の摂動展開（「プランク定数」$\hbar$ について展開）に関する部分だけであり，既に1節で述べたとおり，これはファインマン図の足しあげとして数学的に厳密に定式化することができる [*18]．場の理論の摂動展開を行うためには古典解を選ぶ必要がある．ここでは自明な解 $A = 0$ を選び，その周りに展開することを考えると，場の理論の手法を用いてさまざまな物理量の値を摂動的に計算することができる [*19]．例えば，ウィルソン・ラ

[*17] 両者の対応は，弦理論における T 双対の場の理論版として直接的に定式化できる [39]．ヤンギアンの三角版である量子アファイン代数は量子群を部分代数として含んでおり，T 双対では両者の関係が議論される．なお，T 双対はミラー対称性と関係していることが知られている [33] が，ここでの T 双対も部分的なミラー対称性になっており，トポロジカルな4次元チャーン＝サイモンズ理論の一部の方向が正則になっているのはその現れである．このような「部分的なミラー対称性」の有用性は，筆者と植田氏によるホモロジカル・ミラー対称性の研究においても現れたものである [34, 38].

[*18] 場の理論の古典的な教科書では，ファインマン図の計算において発散（無限大）が存在し，これをパラメーターに「繰り込む」という説明がよく見られる．この時発散が起こるのは，無限に高いエネルギーまでずっと積分するからである．しかし，場の理論についてのより現代的な理解では，そもそも場の理論は有効場の理論であり，あるカットオフエネルギーまでしか定義されていない（そのエネルギーを超えると，例えば超弦理論が現れる）．従って，積分は有限領域で行われることになり，発散は起きない．場の量子論の現状の数学的定式化の多くは有効場の理論の考えが理解せされる以前に定式化されており，十分にこの考えが取り入れられているとは言えない．

[*19] なお，場の理論の摂動展開自体は，3次元チャーン＝サイモンズ理論でもチャーン＝サイモンズ摂動論 [3, 26]

インの交差に対して摂動計算を行うと，可積分系の R 行列を摂動的に再現することができる．本稿では紙数も限られているので摂動計算の詳細を説明することはしない（論文 [15, 16] に様々な計算が載せられている [*20]）が，摂動展開の枠組みでヤンギアン関係式 (6) をどう理解するのかに少しだけコメントしておこう．

既に述べたとおり，(6) の左辺はリー環のヤコビ恒等式に相当するものである．それでは，そもそもなぜゲージ場の理論にリー環が必要だったのだろうか？実は答えのウィルソン・ラインのゲージ不変性から導かれるものなのである．

図 4 の三つのファインマン図を考えよう．ここで直線はウィルソン・ラインに対応しており，$\mathfrak{g}$ の表現 R に付随している．一方，4 次元次元空間内を自由に動くゲージ場を表しており，$\mathfrak{g}$ の随伴表現に付随している．これらのファインマン図では 2 本の波線が生えているので，物理的にはウィルソン・ラインから 2 つのゲージ場が吸収・放出されるプロセスが表現されていると考えれば良い．ファインマン図の詳細を知らなくとも，この三つのファインマン図が関係式 $\mathsf{t}_a\mathsf{t}_b - \mathsf{t}_b\mathsf{t}_a = \sum_c f_{ab}{}^c\mathsf{t}_c$ のそれぞれの項に対応することは想像がつくだろう．実は，これらのダイアグラムのそれぞれはゲージ不変ではなく，これら三つを足し上げた時初めてゲージ不変性が回復するようになっているのである．さらに，ウィルソン・ラインから 3 本の波線が生えている状況のゲージ不変性を要請することで，リー環のヤコビ恒等式を満たしていることも導くことができる．本稿ではゲージ理論の定義にに最初からリー環を使ってしまったが，場の理論そのものからリー環が必要であることも導くことができるのである．

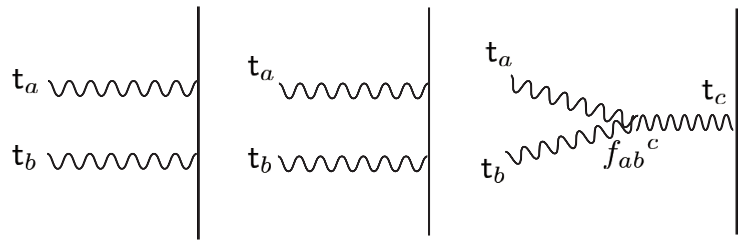

図 4　ゲージ場がリー環に値を持たなければいけないことは，次の三つのダイアグラムを足し上げたときにゲージ不変であるという物理的要請から従う．

さて，ここまでは古典的な考察であったが，同様の制限は量子論的にも存在する．ヤンギアンの関係式 (6) の右辺は $\hbar^2$ に比例しているので，摂動展開の 2 次のオーダー（いわゆる 2 ループ）での補正が存在することを示しており，実際に 2 次のオーダーで計算を行うと，図 5 のファインマン図から右辺の項が得られることを確認できる．こうして，具体的な計算からヤンギアンの関係式 (6) を直接示すことができる．

として議論されており，摂動展開により得られた展開係数は結び目の有限型不変量を与える．また，その文脈でのヤコビ図は場の量子論の Feynman 図に対応するものである．

[*20] ただし，[15,16] では物理学者に理解してもらうことを主眼においたので，数学的に厳密な形式では書かれていない部分も多数存在することはお断りしておく．

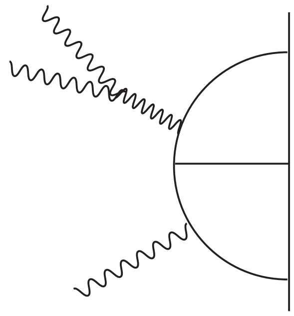

図 5　ヤンギアンの関係式 (6) の右辺を与えるファインマン図．この図には「穴」が二つ存在し，そのことが (6) の右辺に $\hbar^2$ が現れることと対応している．実際には，この他にもファインマン図は多数存在するので，アノマリーにはこの図のみが寄与することをコホモロジーを用いた議論により示す必要がある．

なお，ここでの議論はあくまで摂動展開の 2 次のオーダーについてのものであり，例えば 3 次のオーダーで (6) の右辺に補正がある可能性は排除できない．一般に摂動論のすべての次数でヤンギアンの関係式を導くには，ヤン＝バクスター方程式の一つの変種である RTT 関係式を用いればよく，この関係式自体も 4 次元チャーン＝サイモンズ理論から正当化することができる [16].

7　より一般の場の量子論の理解に向けて

ここまで，4 次元チャーン＝サイモンズ理論の立場からの可積分系の導出の基礎的な考えに焦点を当てて説明してきたところで既に紙数が尽きようとしている．本講演ではより具体的な成果にも触れる予定であるが，ここでは場の理論から可積分系にとって新しい結果が数多くもたらされていることに触れておこう．例えば本稿の構成を拡張することにより，新たに無限個の 2 次元（古典）可積分場の理論が構成された [17]．また，5 次元のチャーン＝サイモンズ理論を考えることで，ヤンギアンのアフィン類似であるアフィン・ヤンギアンの導出も試みられている [11,30][*21].

これらの発展からどんな教訓が得られるのだろうか？

第一の教訓は，これまで数学においてほとんど研究されてこなかったより一般の場の理論を研究することで，とても豊かな数理が得られるということである．本稿で議論した 4 次元チャーン＝サイモンズ理論は，2 次元方向にはトポロジカルであり，残りの 2 次元方向には正則になっており，前者を記述する位相的場の理論と，後者を記述する 2 次元共形場理論の正則部分（頂点作用素代数によって記述される）とをいわば組み合わせた構造になっている [*22]．もちろん，これは場の量子論の膨大な可能性の中ではごく特殊な

[*21] なお，近年，ディンキン図ではなくより一般の箙から定まる箙ヤンギアンが提唱されており [27,40]，アフィン・ヤンギアンの拡張となっているが，これらについてはチャーン＝サイモンズ理論的解釈はまだ与えられていない.

[*22] より一般の設定では例えば [21] を参照.

例に過ぎず，より一般の理論を考えることで全く新しい数学が発見される可能性がある．例えば，近年 4 次元（複素 2 次元）で正則な理論を考えることにより，Kac-Moody 代数の高次元版が得られる可能性が探究されている [20, 22]（[28] も参照）．

第二の教訓は，一見ばらばらに見える可積分系の別の側面も，実は深いところでは結びついているということだ．例えば，4 次元反自己双対ヤン＝ミルズ方程式の次元還元から得られる一連の方程式はラックス表示を持つなどの意味で可積分である [29] が，その可積分性は上で議論してきたヤン＝バクスター方程式の意味での可積分性とは大きく異なっているように見える．しかし，6 次元のチャーン＝サイモンズ理論（正則チャーン＝サイモンズ理論）から出発することでこれらの理論を結びつける試みがなされている [6, 12]．これらの場の理論は全て超弦理論において実現され，そこでは超弦理論の双対性を自由自在に活用することができる．そも意味で本稿の内容は超弦理論に含まれていると言える．超弦理論はこれまでも様々な数学を結びつけ，思いもかけぬ発展をもたらしてきた．超弦理論からどのような数学を引き出すことができるのか，そしてそれは既存の数学をどう変えていくのか，その問いに答えることは，21 世紀の数理物理に残された大きな課題である．

参考文献

[1] Meer Ashwinkumar, Meng-Chwan Tan, and Qin Zhao, *Branes and categorifying integrable lattice models*, Adv. Theor. Math. Phys. **24** (2020), no. 1, 1–24. MR4106881

[2] Michael Atiyah, *On framings of* 3*-manifolds*, Topology **29** (1990), no. 1, 1–7. MR1046621

[3] Scott Axelrod and I. M. Singer, *Chern-Simons perturbation theory*, Proceedings of the XXth International Conference on Differential Geometric Methods in Theoretical Physics, Vol. 1, 2 (New York, 1991), 1992, pp. 3–45. MR1225107

[4] Rodney J. Baxter, *Partition function of the eight-vertex lattice model*, Ann. Physics **70** (1972), 193–228. MR290733

[5] A. A. Belavin and V. G. Drinfel′ d, *Solutions of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **16** (1982), no. 3, 1–29, 96. MR674005

[6] Roland Bittleston and David Skinner, *Twistors, the ASD Yang-Mills equations, and 4d Chern-Simons theory* (202011), available at 2011.04638.

[7] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley, *Fundamental representations of Yangians and singularities of R-matrices*, J. Reine Angew. Math. **417** (1991), 87–128. MR1103907

[8] ———, *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR1300632

[9] Sidney R. Coleman and J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys. Rev. **159** (1967), 1251–1256.

[10] Kevin Costello, *Renormalization and effective field theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 170, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. MR2778558

[11] ———, *M-theory in the Omega-background and 5-dimensional non-commutative gauge theory* (201610), available at 1610.04144.

[12] ———, *Topological strings, twistors, and Skyrmions* (202004). https://www.youtube.com/watch?v=ZlDNpPHvA8A&ab_channel=WHCGP.

[13] Kevin Costello and Owen Gwilliam, *Factorization algebras in quantum field theory. Vol. 1*, New Mathematical Monographs, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge, 2017. MR3586504

[14] ———, *Factorization algebras in quantum field theory. Vol. 2*, New Mathematical Monographs, vol. 41, Cambridge University Press, Cambridge, 2021. MR4300181

[15] Kevin Costello, Edward Witten, and Masahito Yamazaki, *Gauge theory and integrability, I*, ICCM Not. **6** (2018), no. 1, 46–119. MR3855889

[16] ———, *Gauge theory and integrability, II*, ICCM Not. **6** (2018), no. 1, 120–146. MR3855890

[17] Kevin Costello and Masahito Yamazaki, *Gauge Theory And Integrability, III* (20198), available at `1908.02289`.

[18] V. G. Drinfel′ d, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **283** (1985), no. 5, 1060–1064. MR802128

[19] ———, *A new realization of Yangians and of quantum affine algebras*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **296** (1987), no. 1, 13–17. MR914215

[20] Giovanni Faonte, Benjamin Hennion, and Mikhail Kapranov, *Higher Kac-Moody algebras and moduli spaces of G-bundles*, Adv. Math. **346** (2019), 389–466. MR3910800

[21] Owen Gwilliam, Eugene Rabinovich, and Brian R. Williams, *Quantization of topological-holomorphic field theories: local aspects* (20217), available at `2107.06734`.

[22] Owen Gwilliam and Brian R. Williams, *Higher Kac-Moody algebras and symmetries of holomorphic field theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **25** (2021), no. 1, 129–239. MR4320072

[23] V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. of Math. (2) **126** (1987), no. 2, 335–388. MR908150

[24] Vaughan F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), no. 1, 103–111. MR766964

[25] Anton Kapustin and Edward Witten, *Electric-magnetic duality and the geometric Langlands program*, Commun. Number Theory Phys. **1** (2007), no. 1, 1–236. MR2306566

[26] Maxim Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 1994, pp. 97–121. MR1341841

[27] Wei Li and Masahito Yamazaki, *Quiver Yangian from crystal melting*, J. High Energy Phys. **11** (2020), 035, 124. MR4204250

[28] Andrei Losev, Gregory W. Moore, Nikita Nekrasov, and Samson Shatashvili, *Four-dimensional avatars of two-dimensional RCFT*, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **46** (1996), 130–145, available at `hep-th/9509151`.

[29] L. J. Mason and N. M. J. Woodhouse, *Integrability, self-duality, and twistor theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 15, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996. Oxford Science Publications. MR1441309

[30] Jihwan Oh and Yehao Zhou, *Feynman diagrams and Ω-deformed M-theory*, SciPost Phys. **10** (2021), no. 2, Paper No. 029, 51. MR4237705

[31] John Preskill, *Quantum computing 40 years later* (20216), available at `2106.10522`.

[32] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), no. 3, 547–597. MR1091619

[33] Andrew Strominger, Shing-Tung Yau, and Eric Zaslow, *Mirror symmetry is T-duality*, Nuclear Phys. B **479** (1996), no. 1-2, 243–259. MR1429831

[34] Kazushi Ueda and Masahito Yamazaki, *Homological mirror symmetry for toric orbifolds of toric del Pezzo surfaces*, J. Reine Angew. Math. **680** (2013), 1–22. MR3100950

[35] Miki Wadati, Tetsuo Deguchi, and Yasuhiro Akutsu, *Exactly solvable models and knot theory*, Phys. Rep. **180** (1989), no. 4-5, 247–332. MR1015045

[36] Edward Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), no. 3, 351–399. MR990772

[37] ———, *Analytic continuation of Chern-Simons theory*, Chern-Simons gauge theory: 20 years after, 2011, pp. 347–446. MR2809462

[38] Masahito Yamazaki, *Brane tilings and their applications*, Fortschr. Phys. **56** (2008), no. 6, 555–686. MR2423955

[39] ———, *New T-duality for Chern-Simons theory*, J. High Energy Phys. **12** (2019), 090, 11. MR4061201

[40] ———, *Quiver Yangians and crystal meltings: A concise summary*, J. Math. Phys. **64** (2023), no. 1, Paper No. 011101, 7. MR4532676

[41] C. N. Yang, *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1312–1315. MR261870