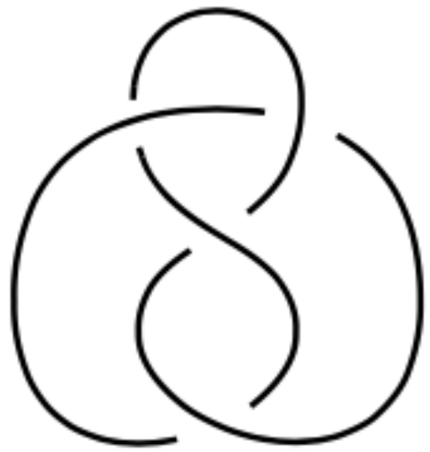
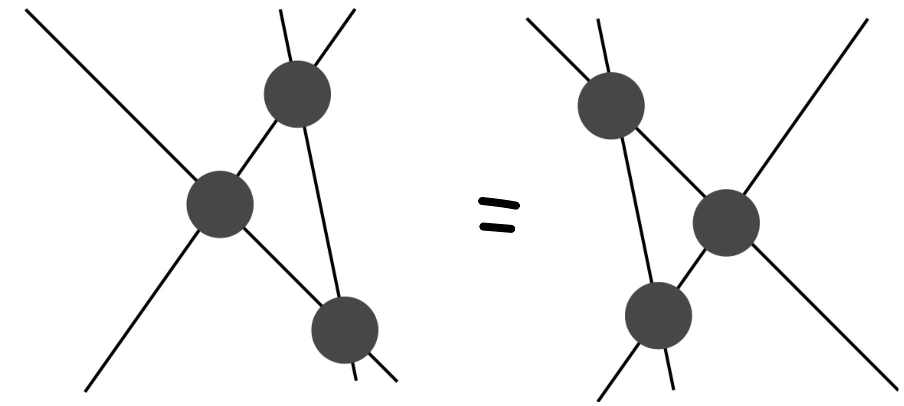




数理としての
場の量子論

山崎雅人

KAVLI IPMU

東大数理談話会

2023年7月21日

東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

MENU

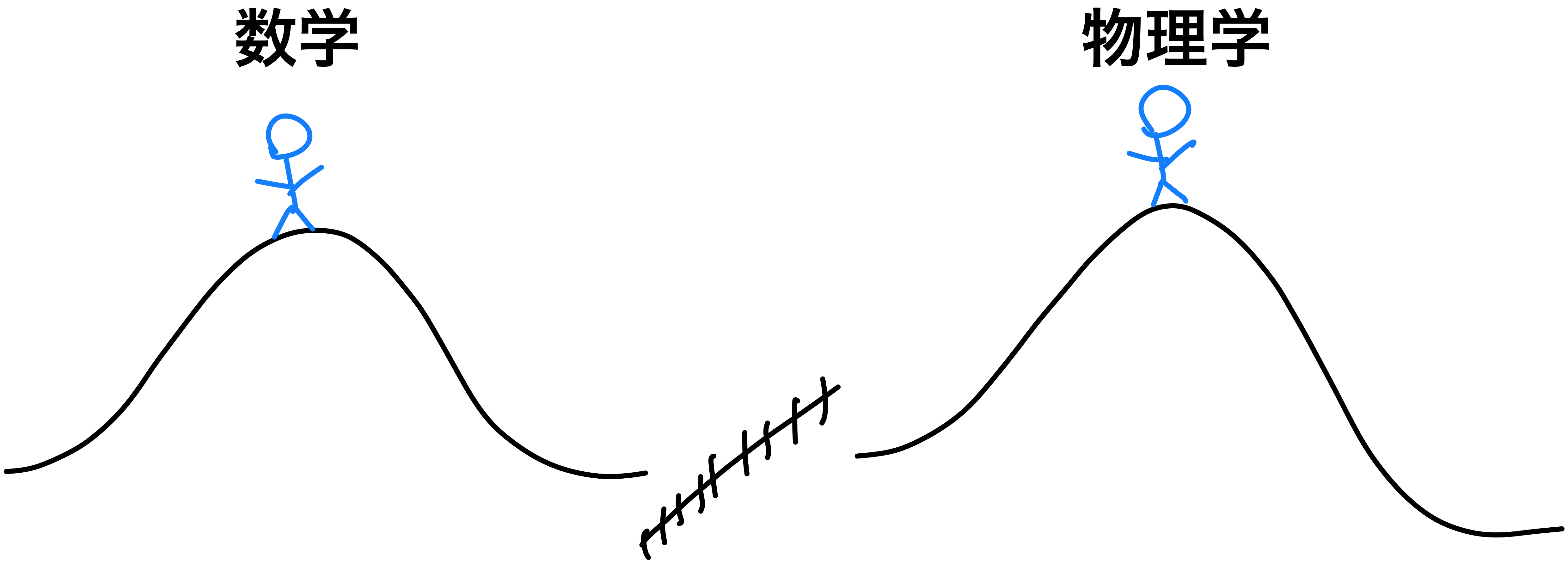
東京大学大学院数理科学研究科・理学部数学科

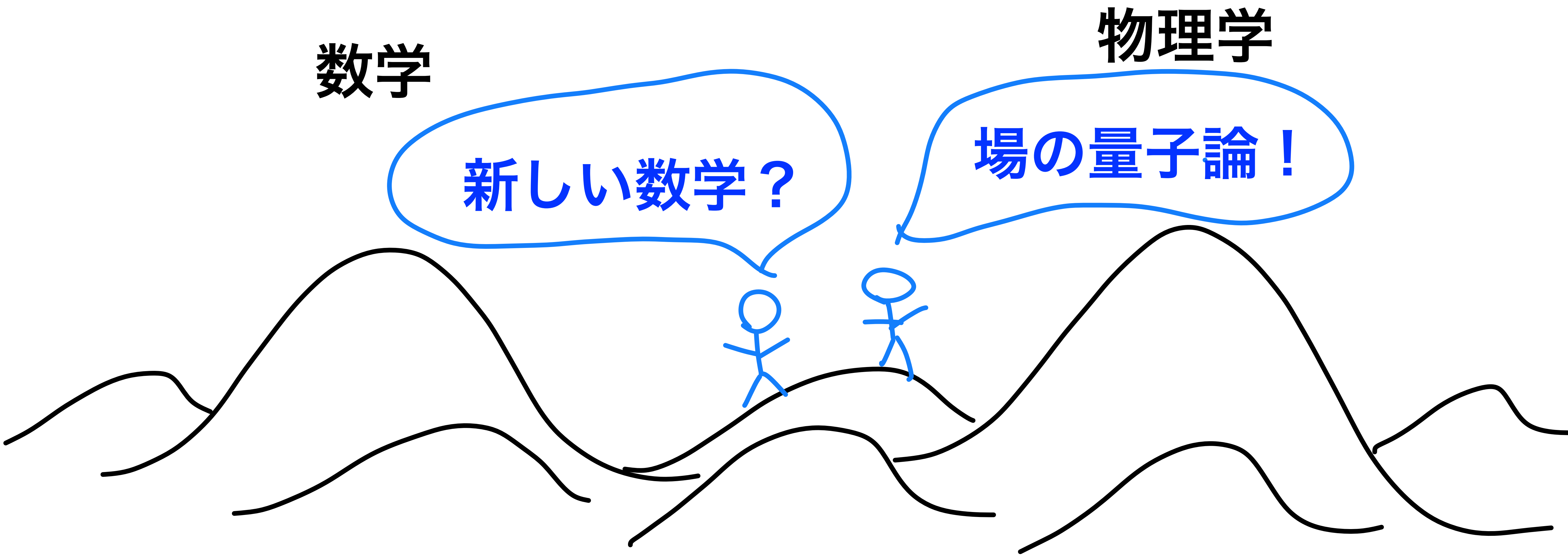
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO

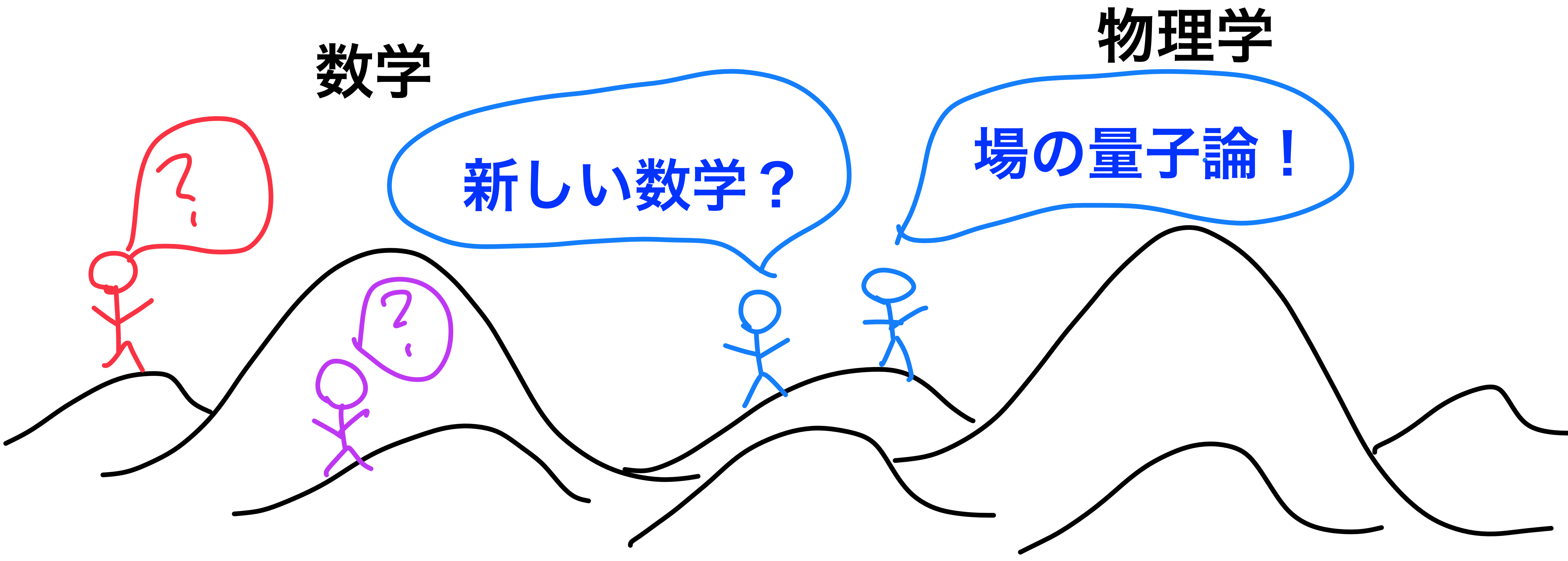
東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

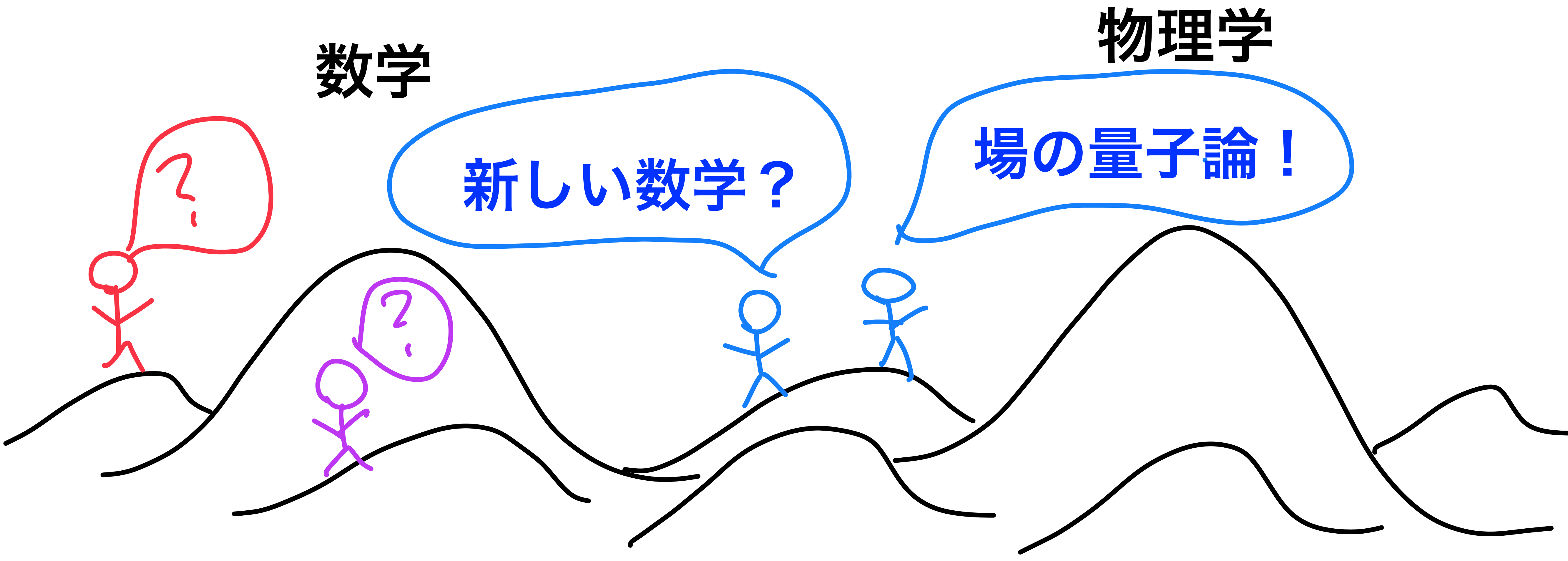
MENU

東京大学大学院数理科学研究科・理学部数学科
Graduate School of Mathematical Sciences, THE UNIVERSITY OF TOKYO


数学
物理学


数学
物理学
新しい数学？
場の量子論！


数学
物理学
?
?
新しい数学？
場の量子論！



しかし，場の理論が数学的に
定式化されていないのは大問題

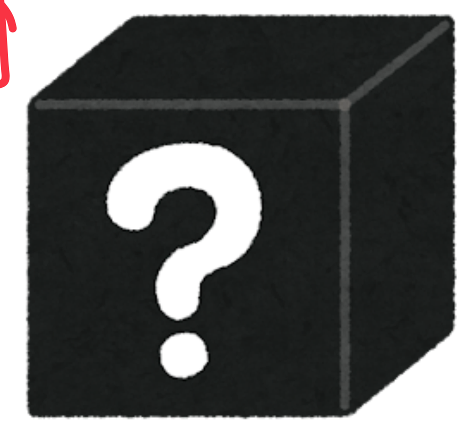
数学者から見た場の量子論？

数学の世界

数学ではない
怪しげ？なもの

数学的なインプット

数学者



物理学者

数学的なアウトプット

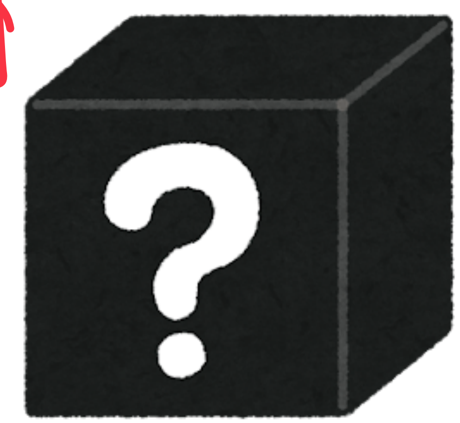
数学者から見た場の量子論？

数学の世界

数学ではない
怪しげ？なもの

数学的なインプット

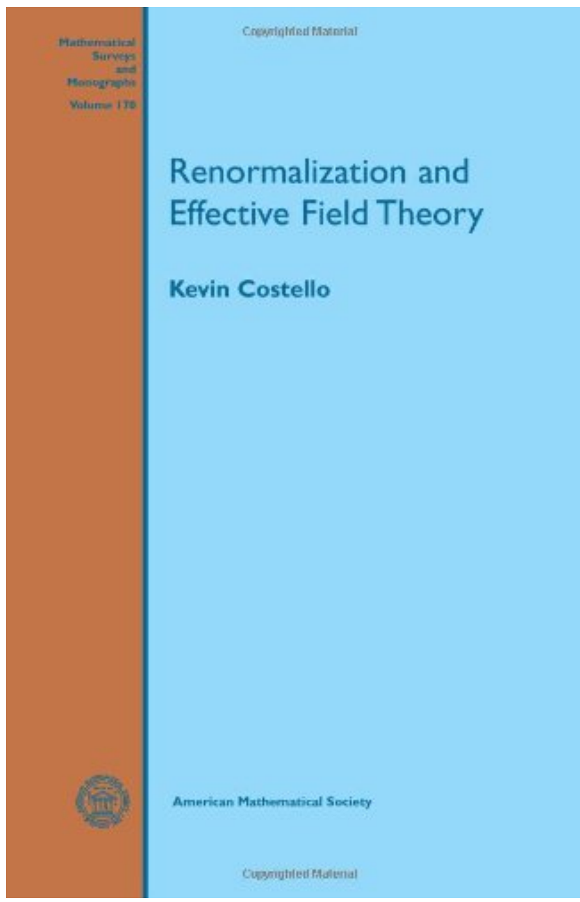
数学者

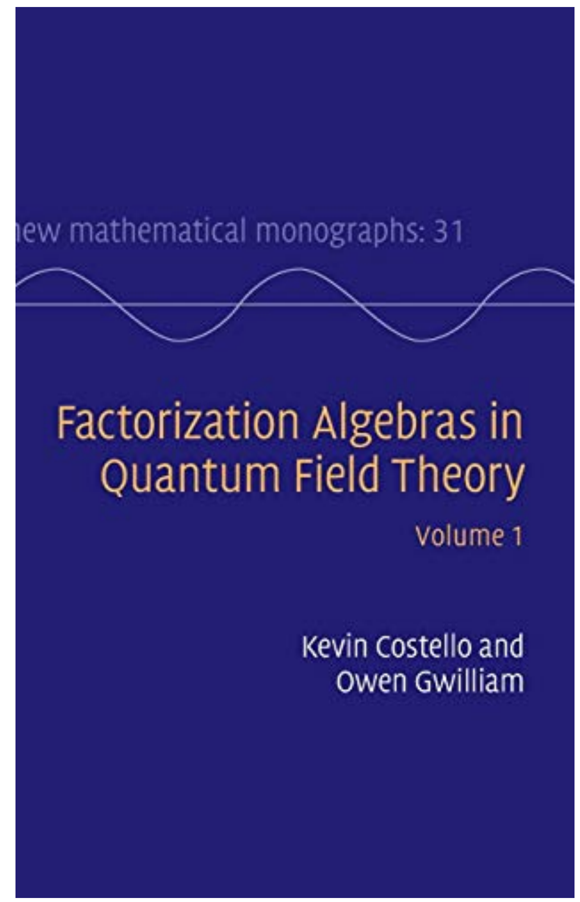


物理学者

数学的なアウトプット

実は，かなり一般のクラスの場の理論は既に
摂動的には「数学的に定式化されている」





[Costello, Costello-Gwilliam (Vol. 1/2)]

(Pre)-Factorization Algebra (因子化代数)

- ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \phi(\square + m^2)\phi$$

mass

ラプラシアン

スカラー場

$$\phi \in C^\infty(U)$$

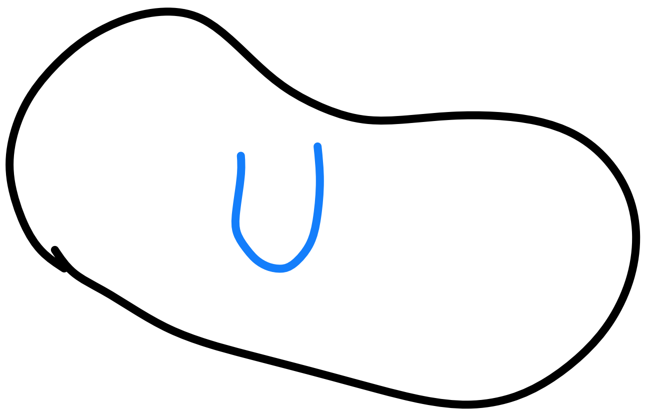
- 運動方程式

$$(\square + m^2)\phi = 0$$

- "Derived"な解のなす複体 (BRST-BV量子化)

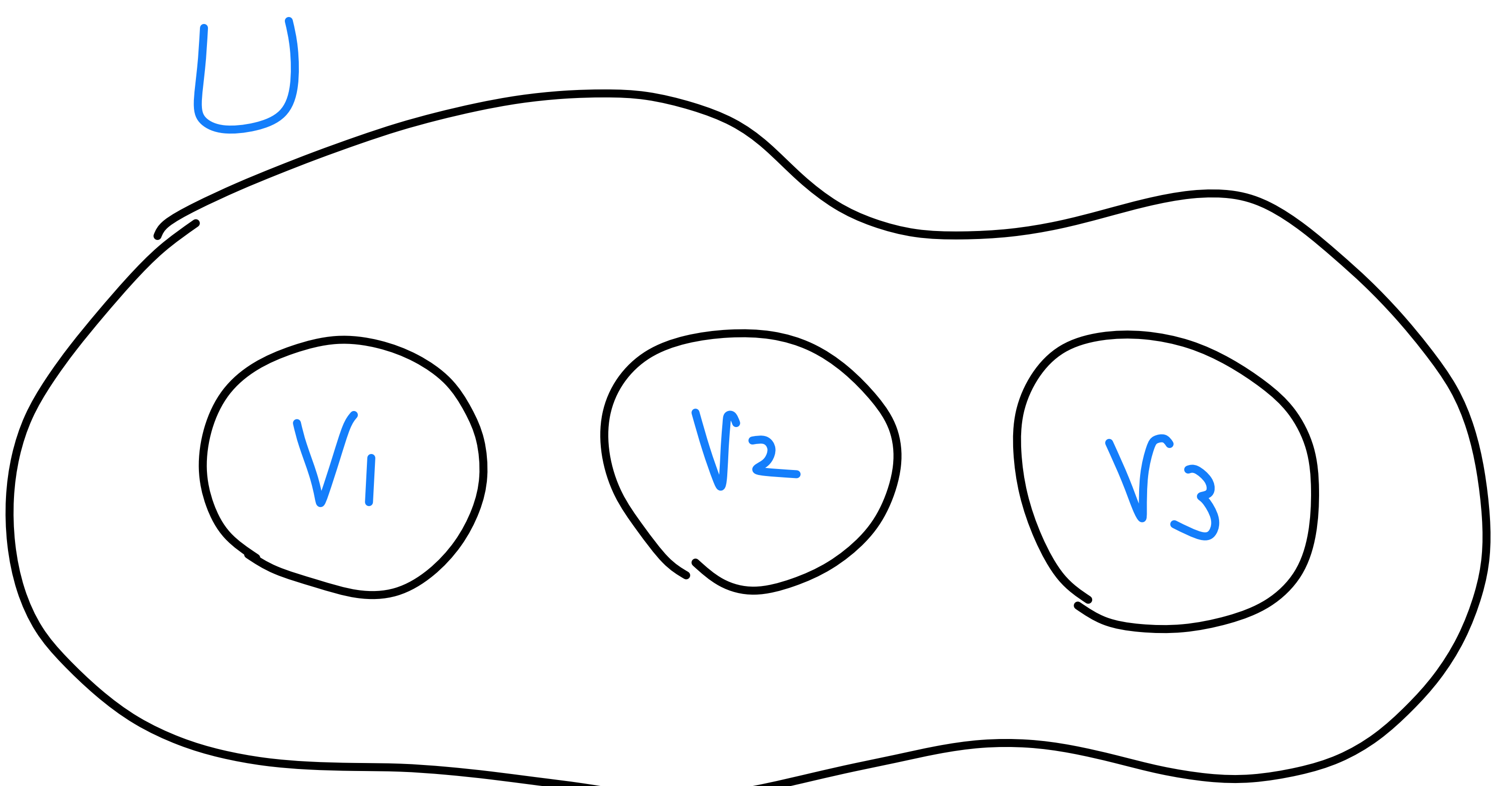
$$\mathcal{F}(U) := \left\{ C^\infty(U) \xrightarrow[\square + m^2]{} C^\infty(U) \right\}$$

(Pre)-Factorization Algebra (因子化代数)



$\rightsquigarrow \mathcal{F}(U)$: cochain complex

"U上の場"



$\bigotimes_i \mathcal{F}(V_i) \to \mathcal{F}(U)$

- 「場」ができたので，それらの関数空間 $\mathcal{O}$ ができる

古典的

- 特に，あるエネルギースケール μ で理論を指定する量子的な**有効作用** I_μ を構成できる

$$I_\mu \in \mathcal{O}[[\hbar]]$$

$\hbar$について形式級数

- 「場」ができたので，それらの関数空間 $\mathcal{O}$ ができる
  古典的
- 特に，あるエネルギースケール μ で理論を指定する
  量子的**有効作用** I_μ を構成できる

$$I_\mu \in \mathcal{O}[[\hbar]]$$

$\hbar$について形式級数

- エネルギースケールの変化を表す**繰り込み群方程式**

$$I_\mu \rightsquigarrow \underbrace{W}_{\text{Feynman 図}}\big(\underbrace{P(\mu, \mu')}_{\text{propagator}}, I_\mu\big) = I_{\mu'}$$

(heat kernel)

※ 発散はない（有効場の理論）

この定式化での場の理論の計算は
あるパラメーターについての摂動論

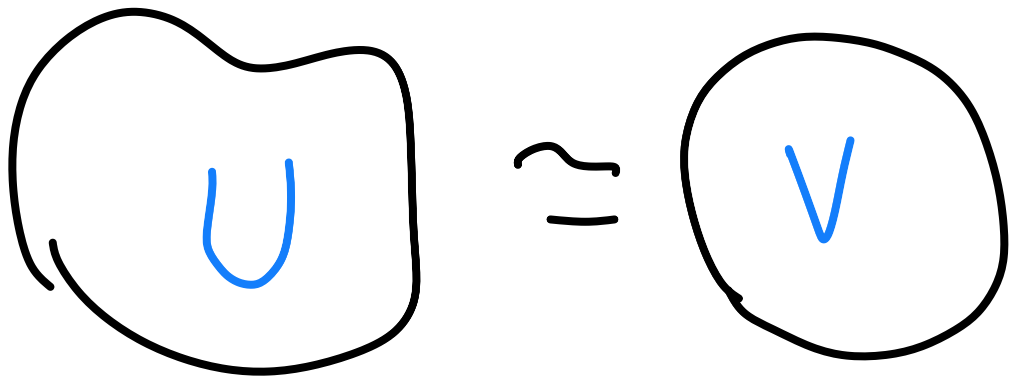
$$\langle O \rangle = \underbrace{O_0}_{} + \underbrace{O_1}_{}\hbar + \underbrace{O_2}_{}\hbar^2 + \cdots\cdots$$

展開のそれぞれは有限個のファインマン図からの寄与でwell-defined

ただし，この級数は発散級数で収束半径はゼロ
うまい関数に足し上がるかは（物理的にも）とても非自明
Borel sum, trans-series, resurgence, …
"exact WKB"

トポロジカルな理論 (TQFT)

n次元

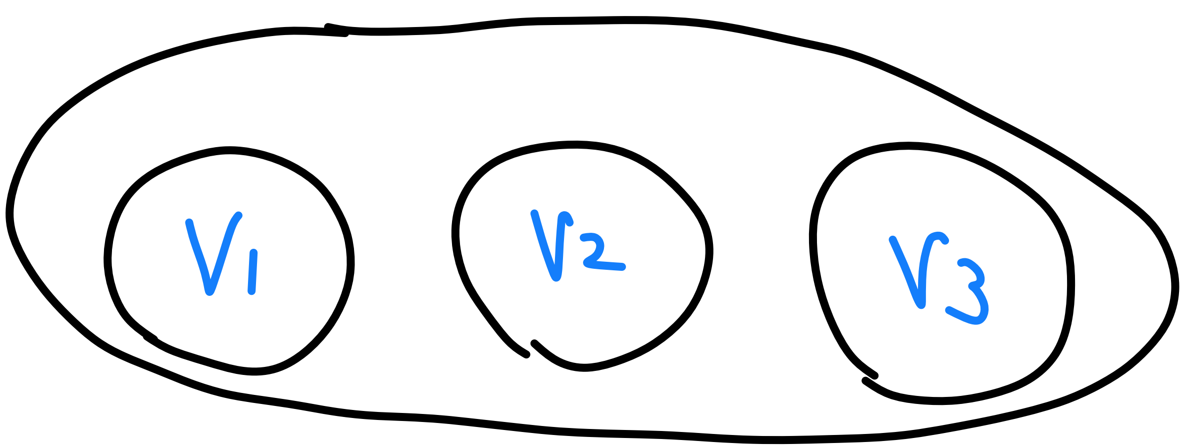


$\rightsquigarrow \mathcal{F}(U) \simeq \mathcal{F}(V)$

quasi-iso

"locally constant"

U



$\rightsquigarrow \bigotimes_i \mathcal{F}(V_i) \to \mathcal{F}(U)$

Locally constantな因子化代数

|| Lurie

E_n-代数 (E_n-operad上の代数)

例：チャーン＝サイモンズ理論 [Witten]

G-接続

$$Z=\int \underbrace{\mathcal{D}A}_{\text{経路積分}}\, e^{iS[A]}, \qquad S[A]=\frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}\left(A\wedge dA+\frac{2}{3}A^3\right)$$

S^3

平坦接続
(の量子化)

$$F=dA+A\wedge A=0$$

$$W_{\underbrace{R}_{\text{表現}}}=\mathrm{Tr}_R\left(\underbrace{\exp\int_K A}_{\mathrm{Hol}_{\underbrace{K}_{\text{結び目}}}(A)}\right) \Longrightarrow$$

[Jones, ...]

結び目不変量

J_K

例：チャーン＝サイモンズ理論

CS理論

Witten

経路積分

3次元多様体の分配関数

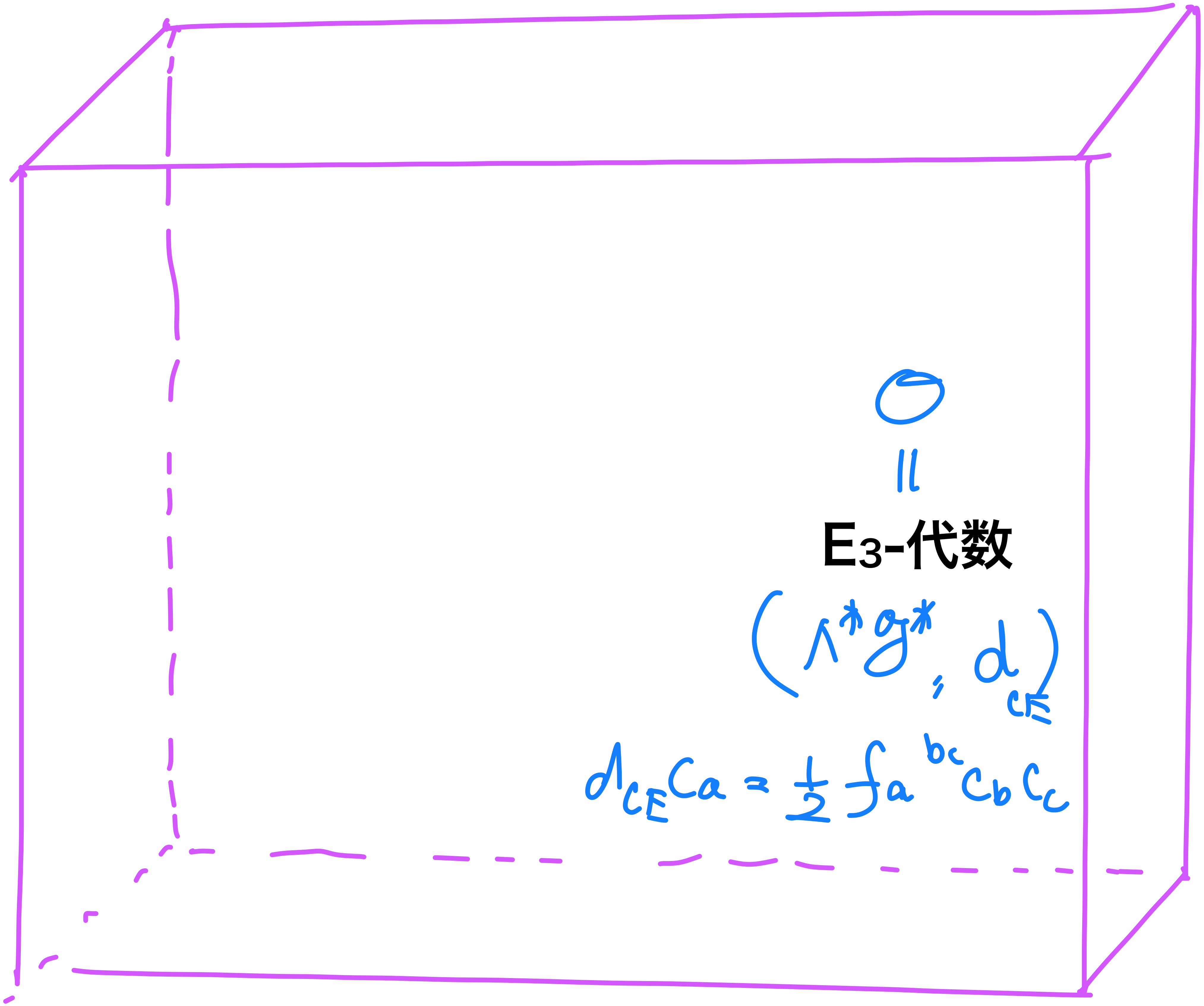
WRT不変量

量子群（から作られる Ribbon Hopf代数）の表現論

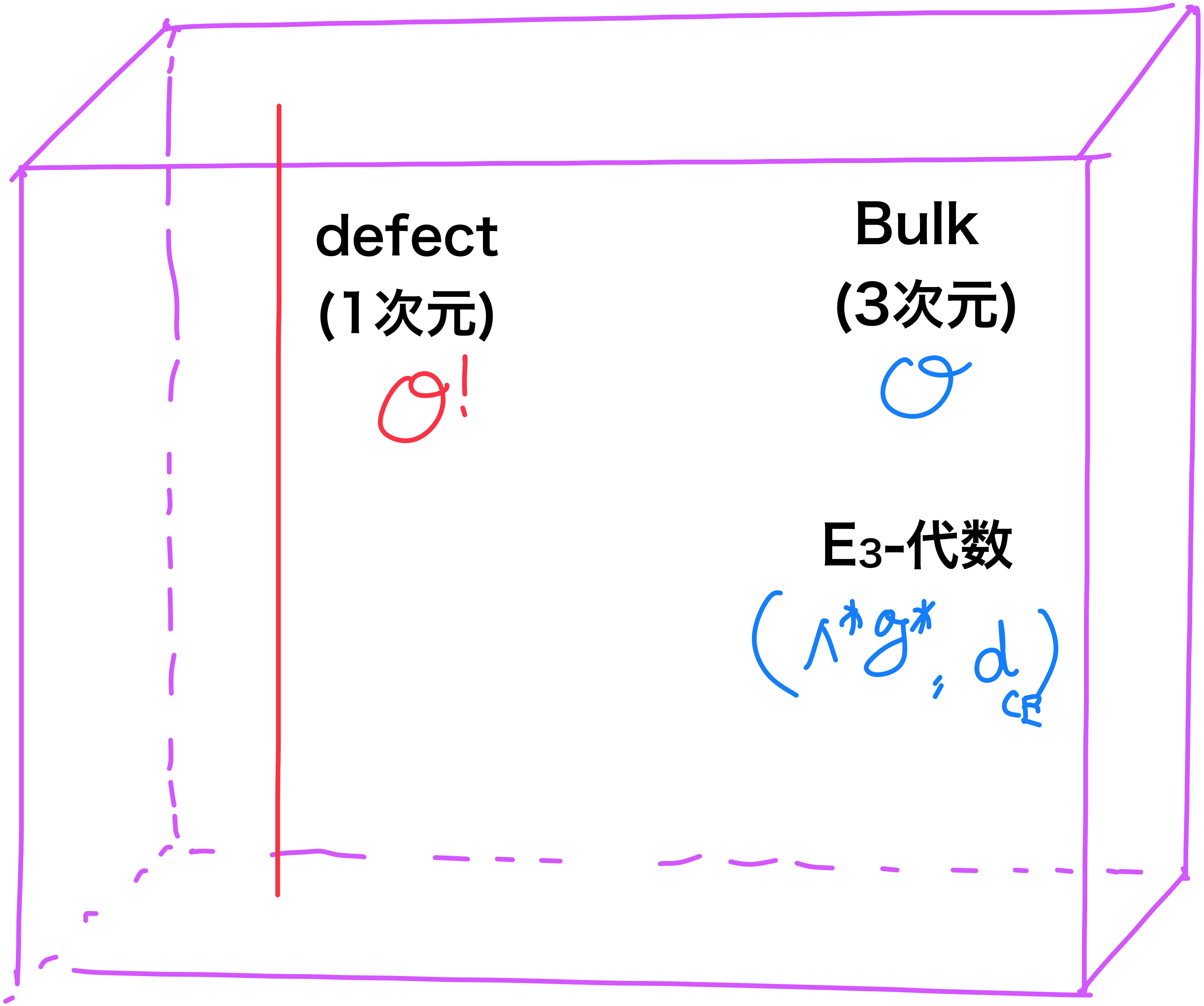
$U_q(\mathfrak{g})$

Reshetikhin-Turaev

量子群の起源

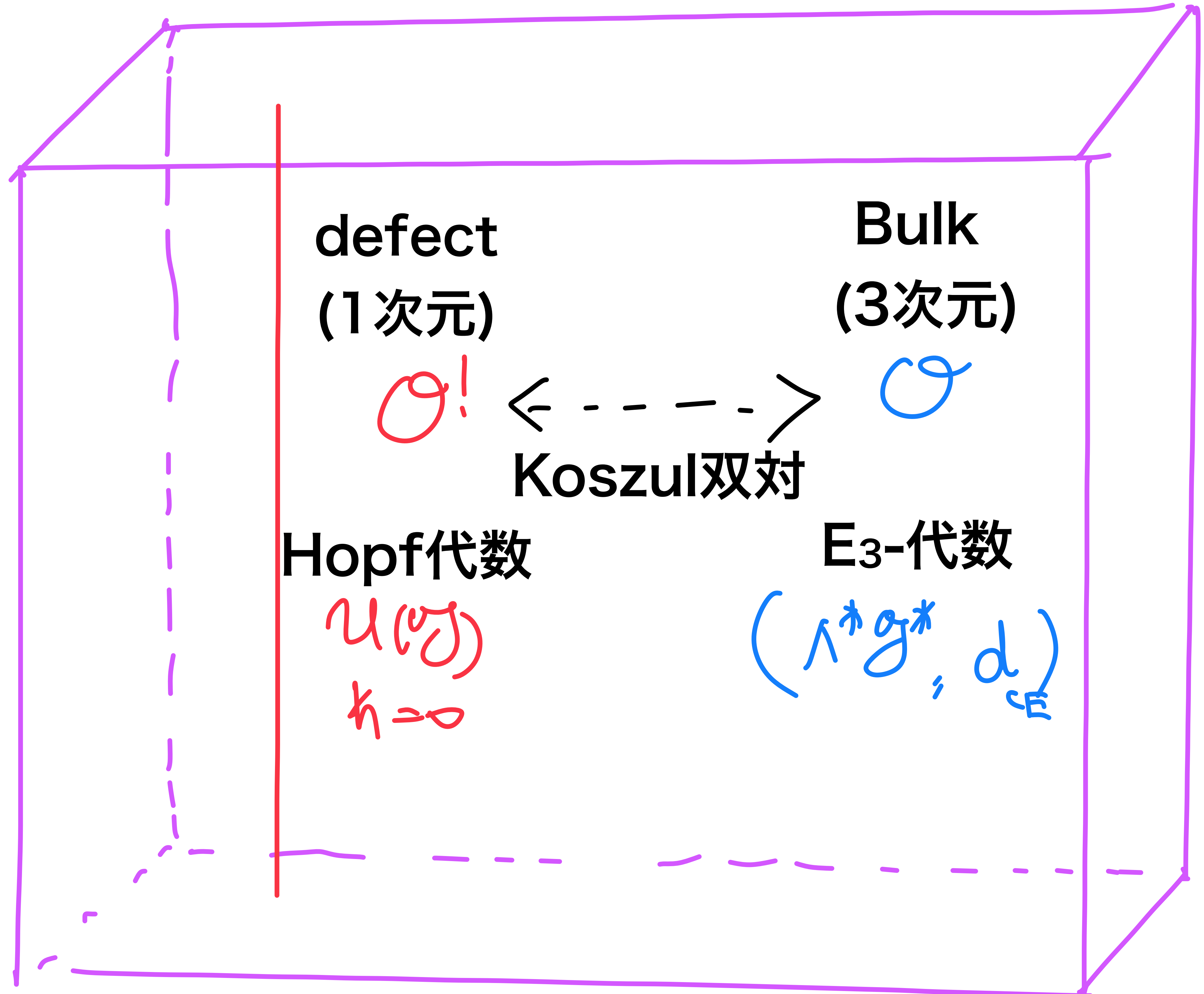

$\mathcal{O}$
$\shortparallel$
E_3-代数
$(\wedge^* \mathfrak{g}^*, d_{CE})$
$d_{CE} c_a = \frac{1}{2} f_a{}^{bc} c_b c_c$

量子群の起源

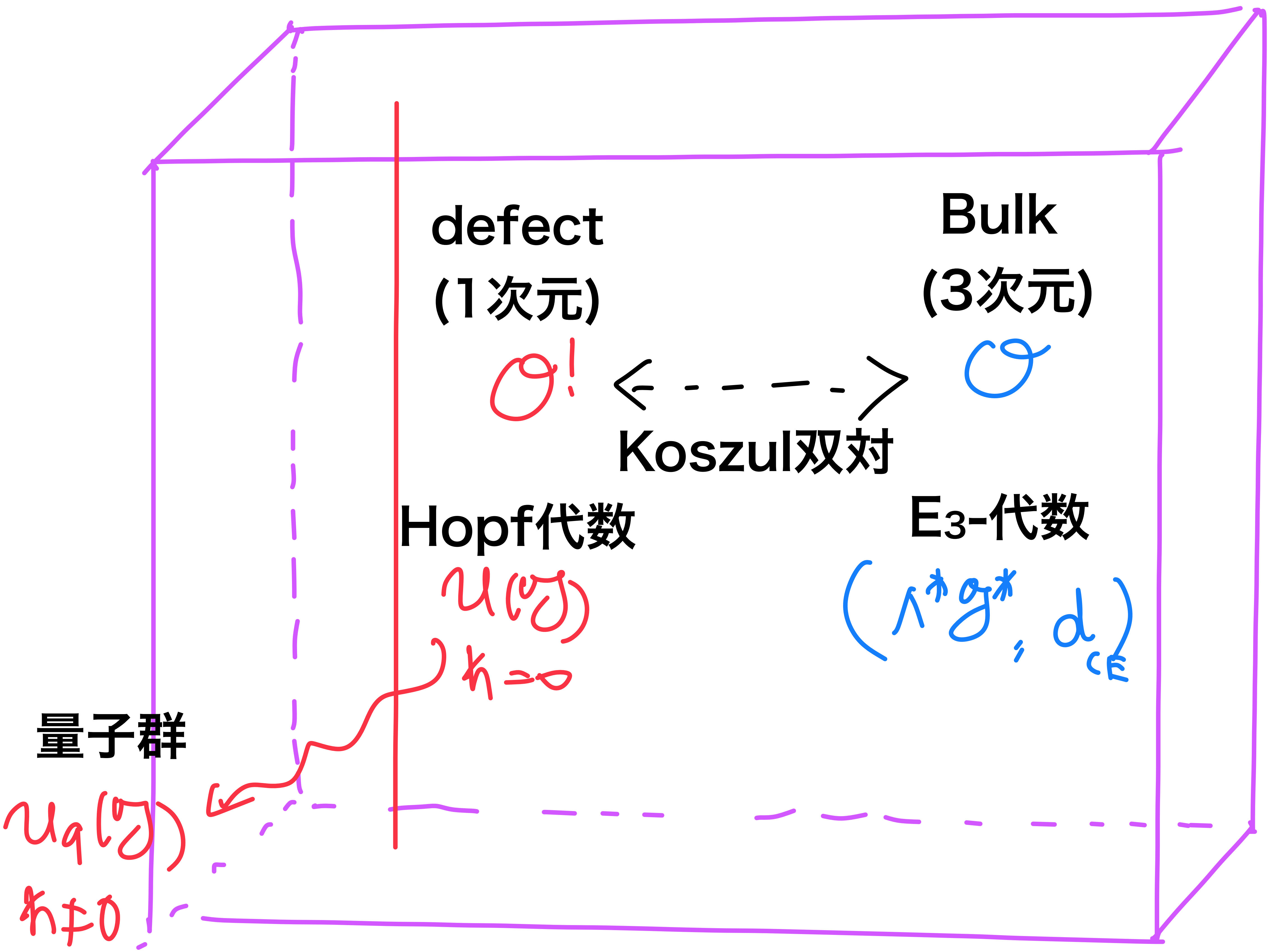


defect
(1次元)
$\mathcal{O}$!
Bulk
(3次元)
$\mathcal{O}$
E3-代数
$(\Lambda^* \mathfrak{g}^*, d_{CE})$

量子群の起源


defect
(1次元)
$\mathcal{O}^!$
Bulk
(3次元)
$\mathcal{O}$
Koszul双対
Hopf代数
$U(\mathfrak{g})$
$\hbar=0$
E3-代数
$(\Lambda^*\mathfrak{g}^*, d_{CE})$

量子群の起源


defect
(1次元)
$\mathcal{O}^!$
Koszul双対
Bulk
(3次元)
$\mathcal{O}$
Hopf代数
$U(\mathfrak{g})$
$\hbar = 0$
E_3-代数
$(\Lambda^* \mathfrak{g}^*, d_{CE})$
量子群
$U_q(\mathfrak{g})$
$\hbar \neq 0$

最近の研究の例

* Non-compact ゲージ群に対応するTQFT

$G = G_{\mathbb{C}}$ (e.g. $SL(2,\mathbb{C})$) CS

量子タイヒュミュラー
理論 / TQFT

体積予想

量子
ダイログ関数

“3d/
3d”

Liouville理論
/ Irrational CFT

3次元
超対称場の理論

* CS理論は重力ともみなすことができる (Achúcarro-Townsend, Witten)

@ 3d $SL(2,\mathbb{C})$ CS ~ 3d 重力

$$" Z_{重力} \sim \sum_{M:\text{mfd}} Z_M "$$

幾何の足し上げの母関数

@ Abelian CS ?

$$S = \sum_{i,j=1}^{p+q} \int \frac{1}{4\pi} Q_{ij} A_i \wedge dA_j$$

二次形式

signature (p, q)

非正則
アイゼンシュタイン級数

レンズ空間の分配関数

$$E_Q(\tau,\bar{\tau}) = 1 + \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ c>0}} \frac{\gamma_Q(c,d)}{(c\tau+d)^{p/2}\,(c\bar{\tau}+d)^{q/2}}$$

$$= \int_{\mathcal{M}_Q} [dm]\ \vartheta_Q(\tau,\bar{\tau};m)$$

Siegel-Weil
公式

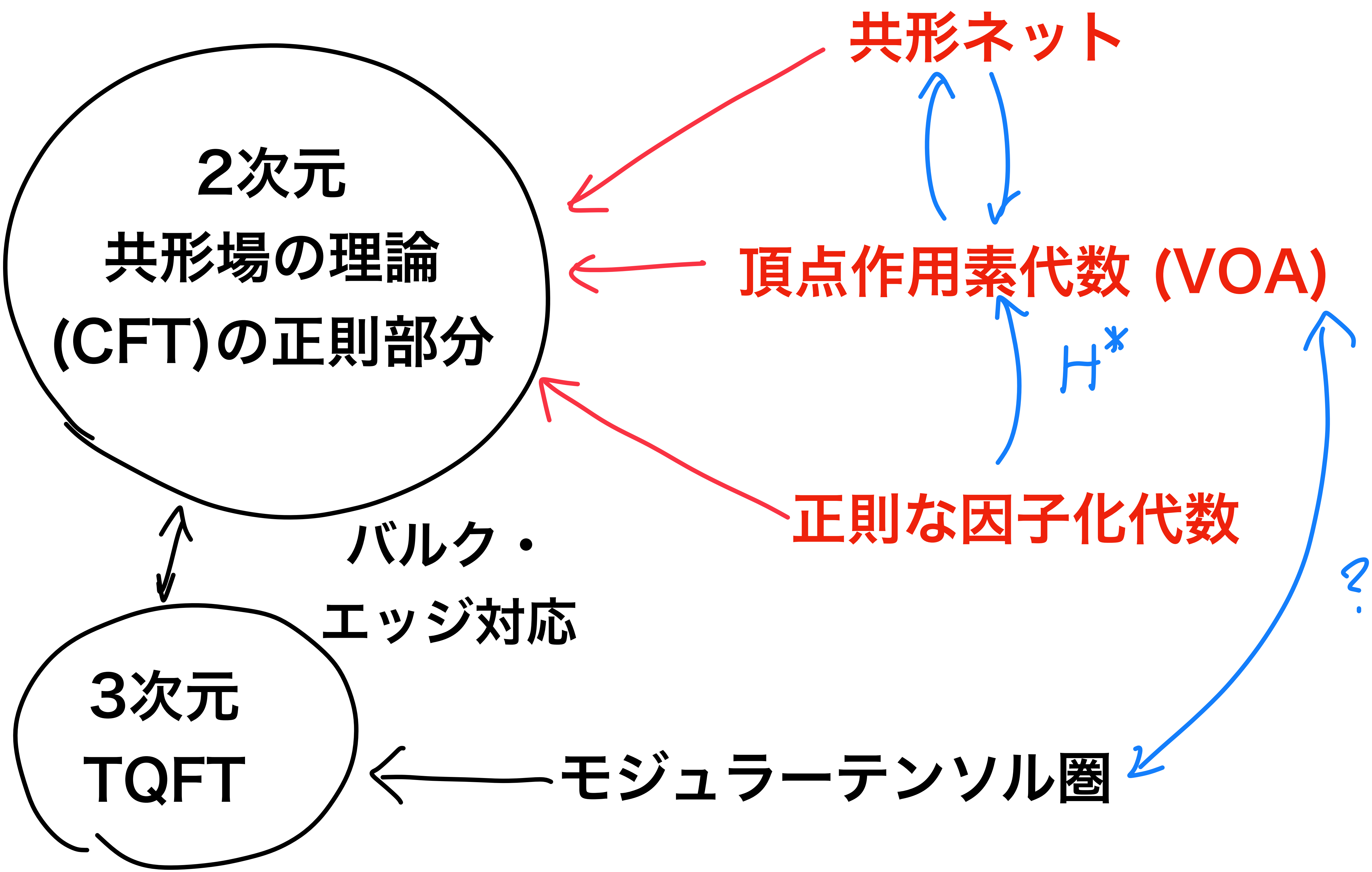
テータ関数

$$O_Q(\mathbb{Z}) \backslash O(p,q) / O(p)\times O(q)$$

ホログラフィーの立場から解釈・一般化

(Ashwinkumar-Kidambi-Leedom-MY)

Beyond TQFT


2次元
共形場の理論
(CFT)の正則部分
共形ネット
頂点作用素代数 (VOA)
H^*
正則な因子化代数
?
バルク・
エッジ対応
3次元
TQFT
モジュラーテンソル圏

もっと一般の構造は？

2次元
トポロジカル場の理論
(TQFT)

$\Longrightarrow$

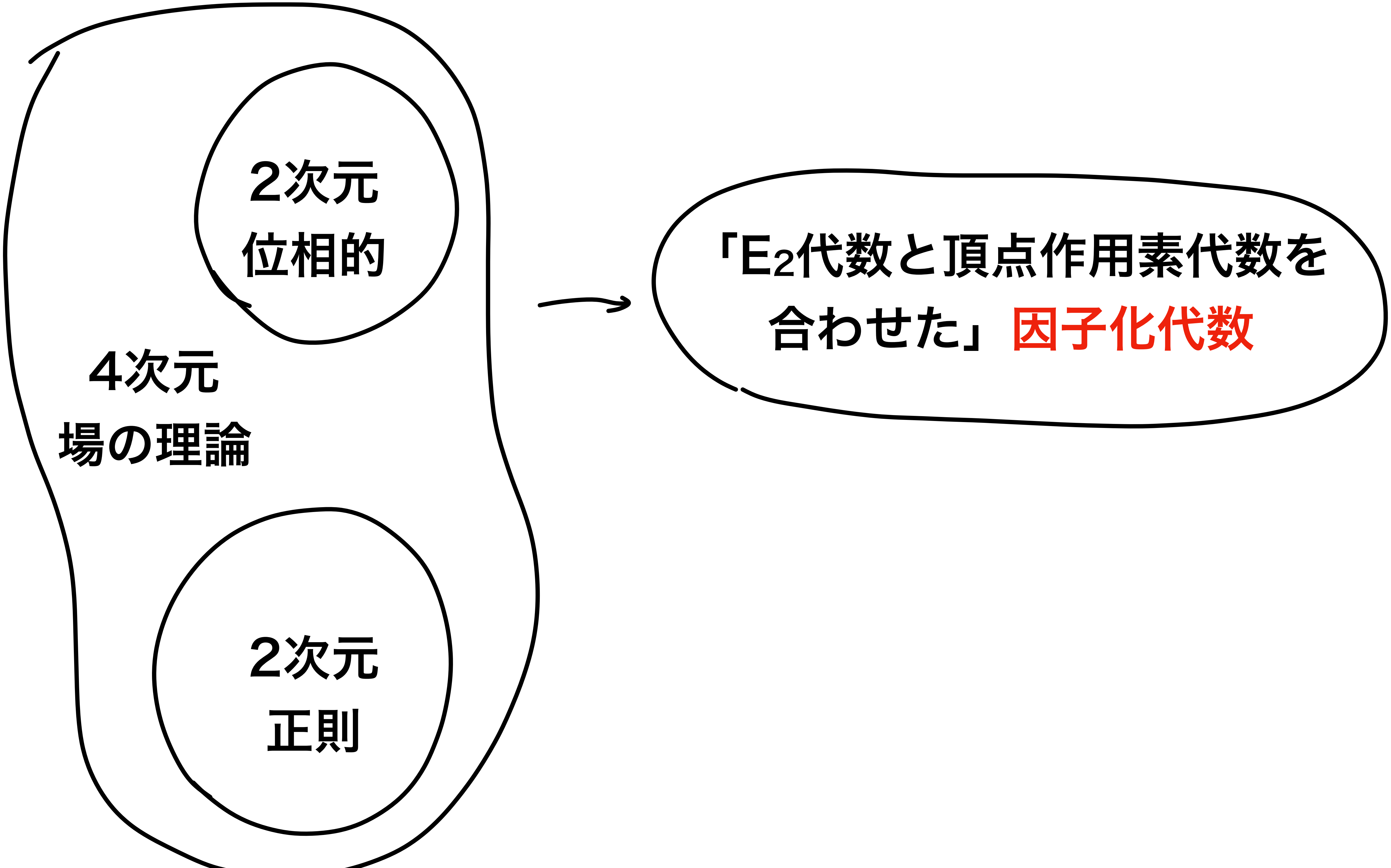
トポロジカルな因子化代数
E_2代数

2次元
正則場の理論

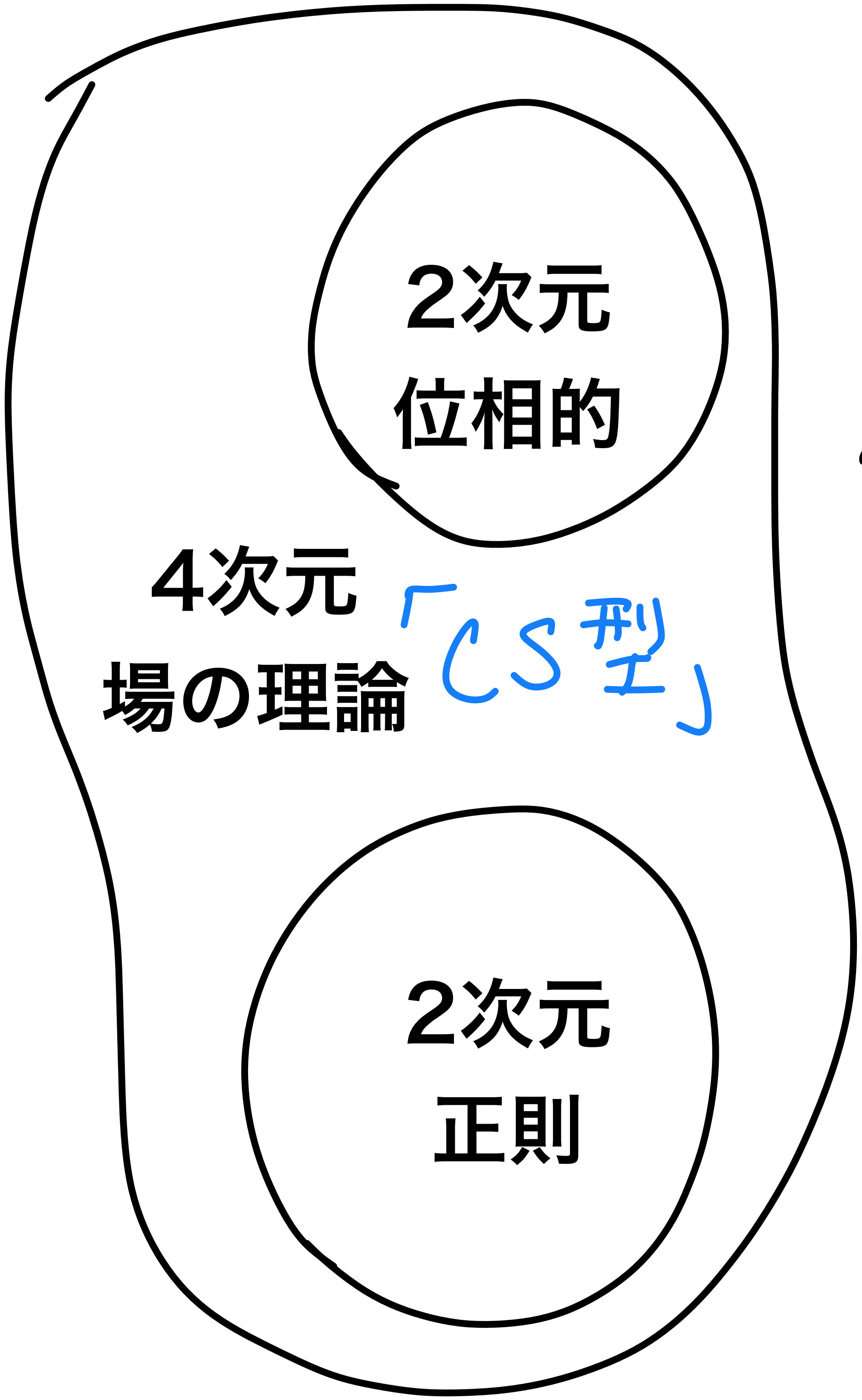
$\Longrightarrow$

正則な因子化代数
頂点作用素代数

もっと一般の構造は？ [Costello]



もっと一般の構造は？ [Costello]

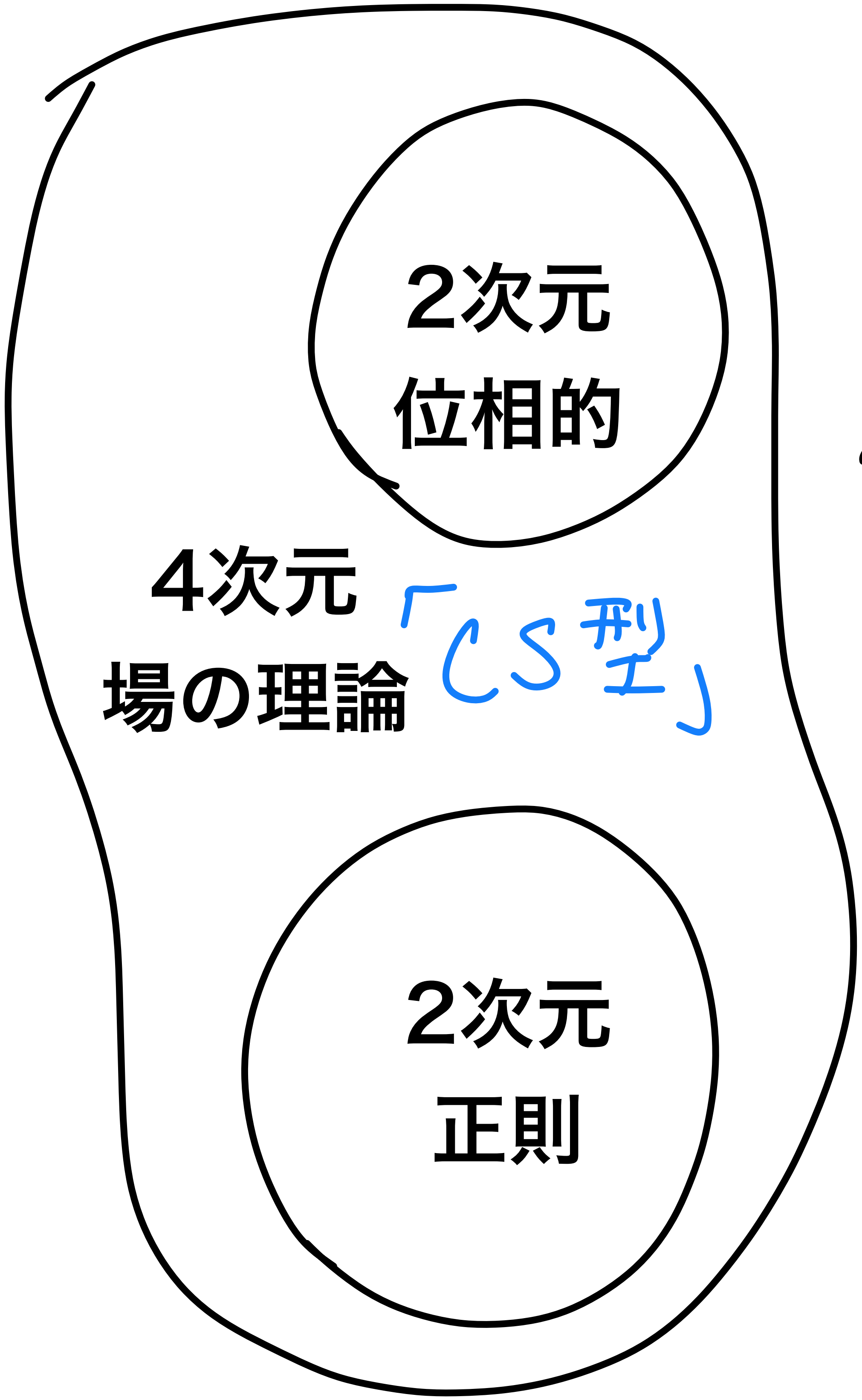


正則: z

「E_2代数と頂点作用素代数を合わせた」**因子化代数**

$(\Lambda^*(\mathfrak{g}[[z]])^*, d)$ @ $\hbar = 0$

もっと一般の構造は？ [Costello]



$\rightsquigarrow$

正則：z

「E_2代数と頂点作用素代数を合わせた」**因子化代数**

$(\Lambda^*(\mathfrak{g}[[z]])^*, d)$ @ $\hbar = 0$

$\updownarrow$ Koszul双対

$U(\mathfrak{g}[[z]], d)$ @ $\hbar = 0$

$\rightsquigarrow$

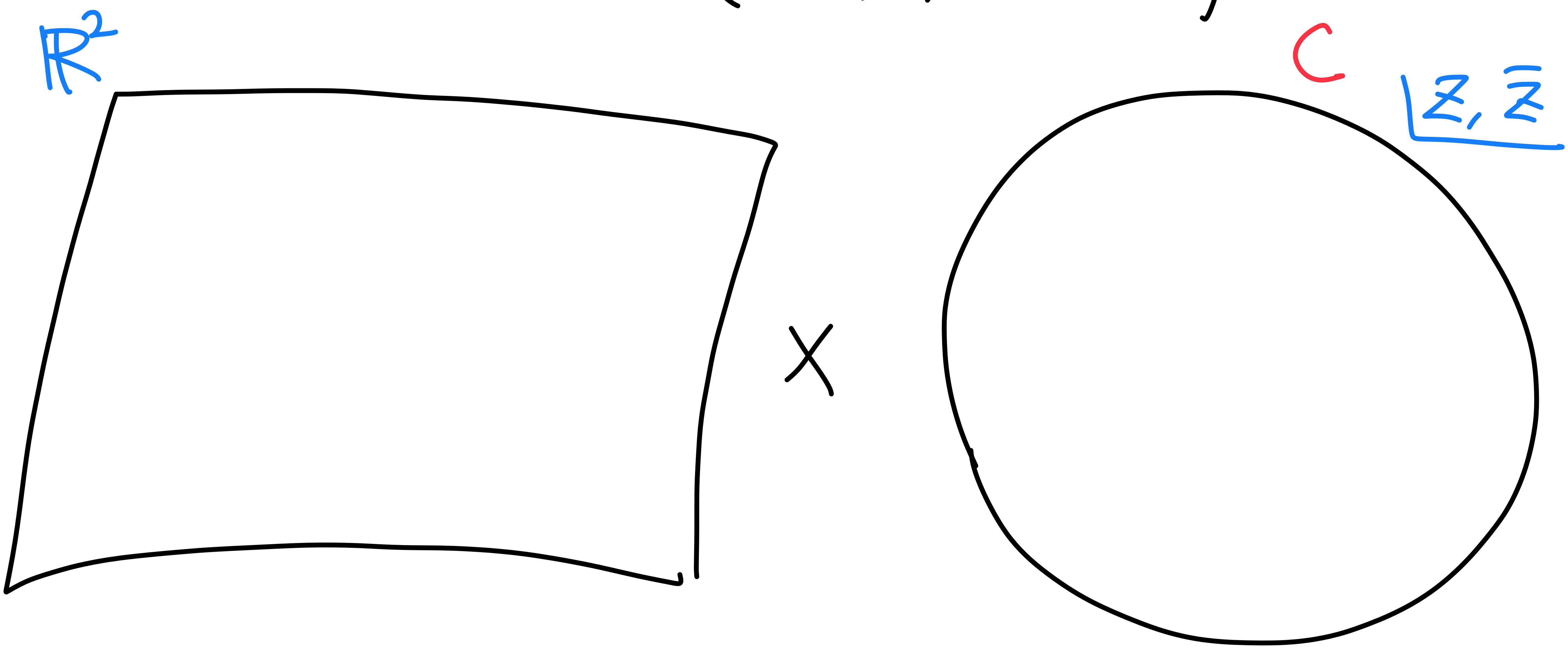
$Y_\hbar(\mathfrak{g})$ **Yangian**

可積分！

4次元のCS型の理論を考える [Costello, Costello+ Witten + MY]

$$S = \frac{1}{\hbar}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{C}} \omega \wedge \mathrm{Tr}\left(A\wedge dA + \frac{2}{3}A\wedge A\wedge A\right)$$

(hol. 1-form on $\mathbb{C}$)



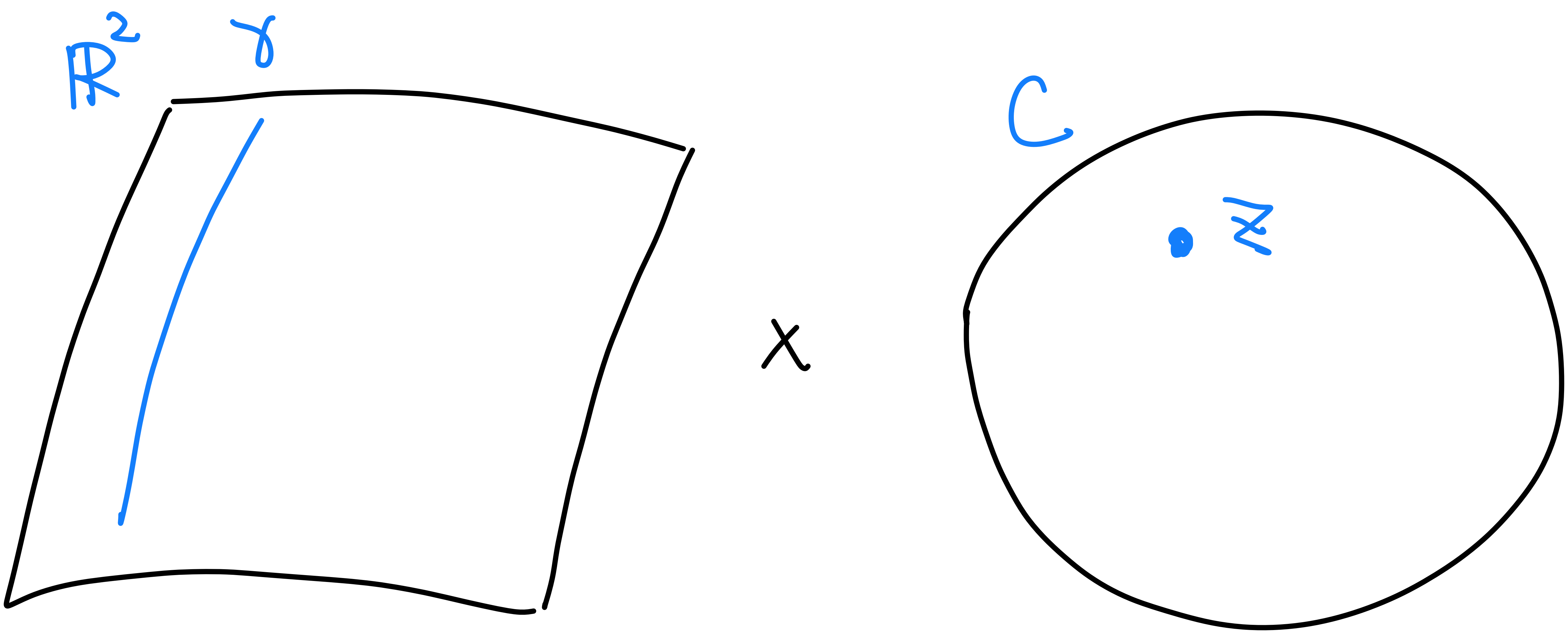
２次元部分：
トポロジカル

残りの２次元：
正則

設定は変わっても考えるのは

ゲージ場の1次元的な演算子（ウィルソン・ライン）

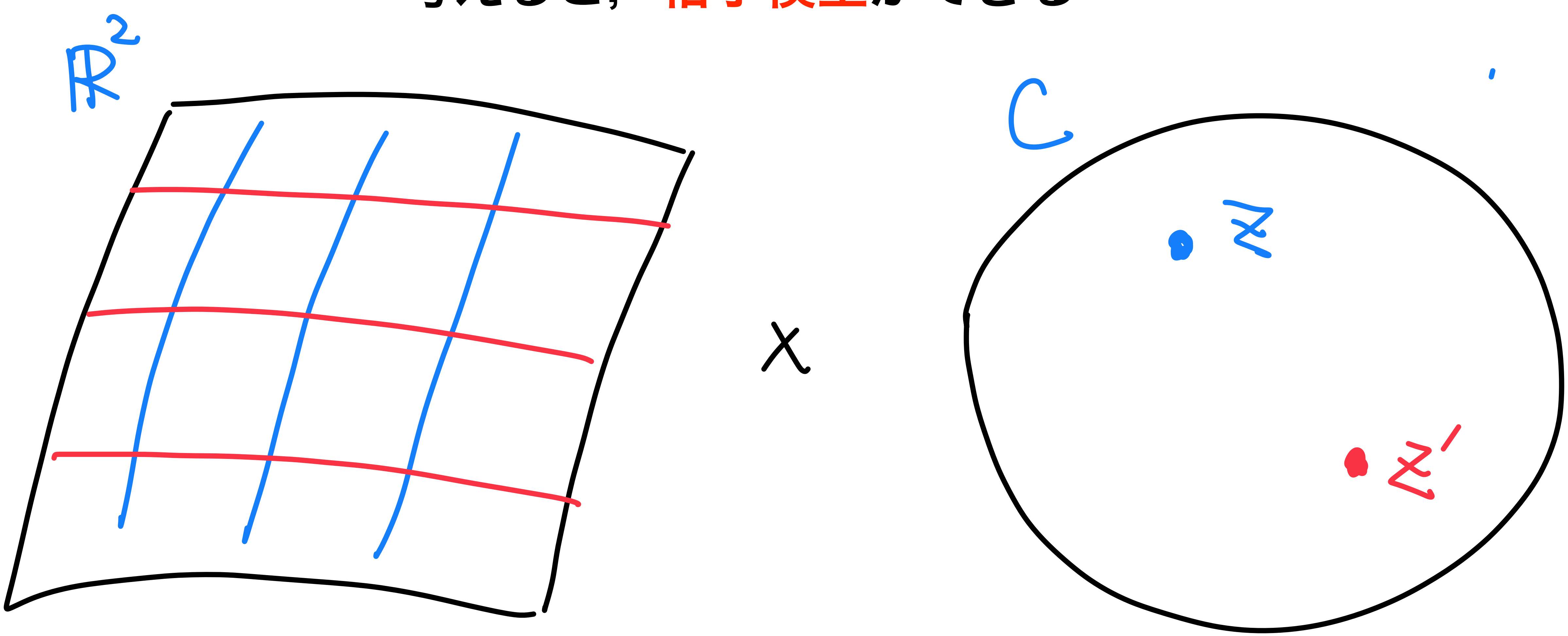
$$\langle W_\gamma \rangle = \langle \underbrace{\mathrm{Tr}\, P\left(\exp \oint_\gamma A\right)}_{\mathrm{Hol}_\gamma(A)} \rangle$$



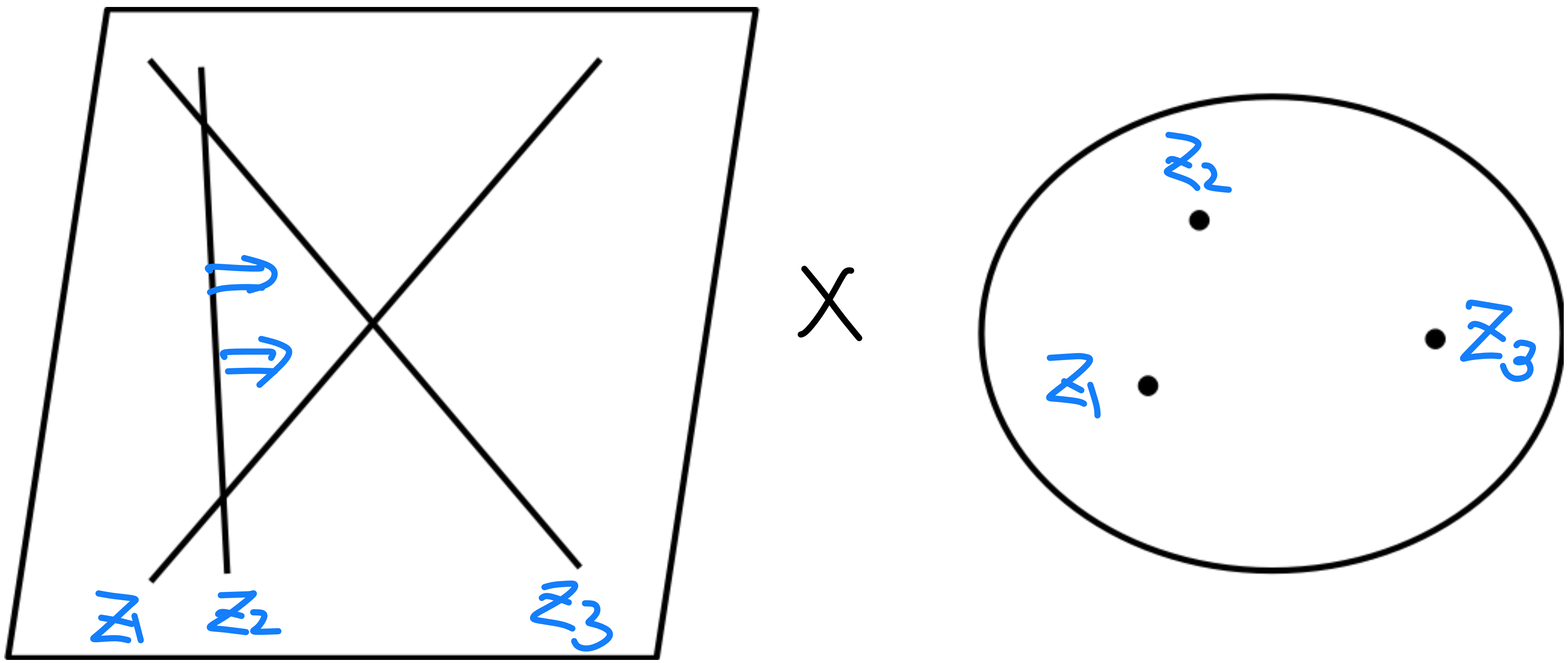
設定は変わっても考えるのは
ゲージ場のウィルソン・ライン

$$\langle W_\gamma \rangle = \left\langle \mathrm{Tr}\, P\left(\exp \oint_\gamma A\right) \right\rangle$$

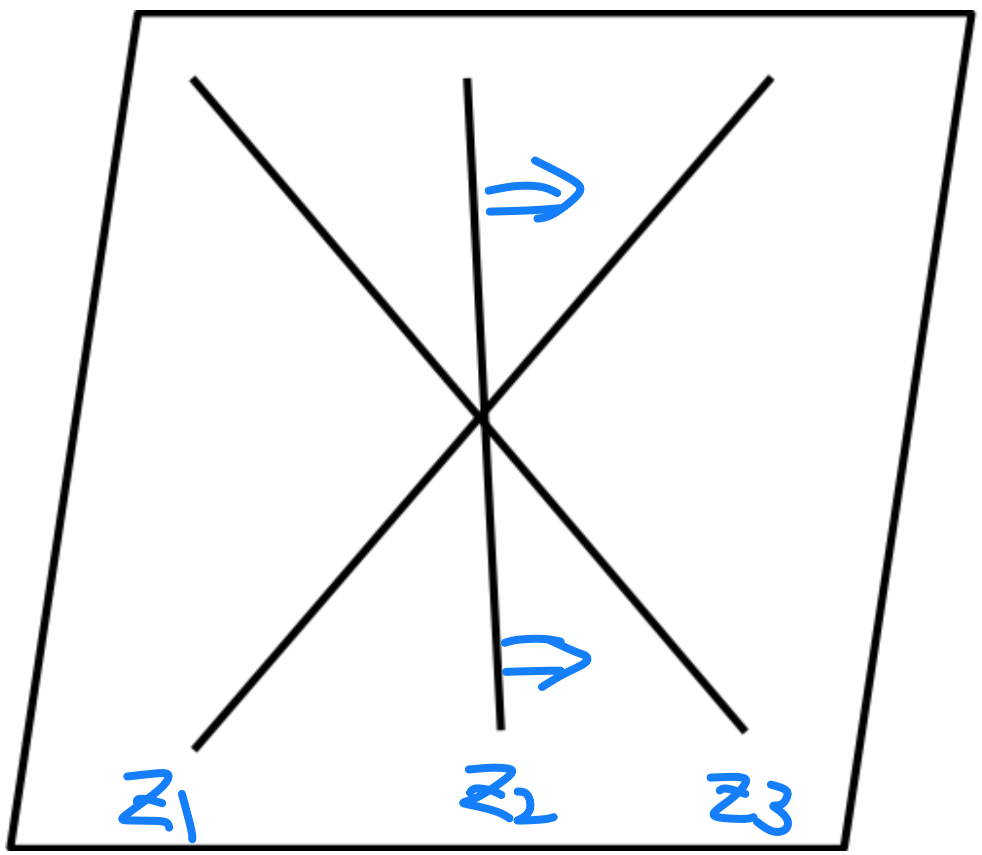
たくさんのウィルソン・ラインを
考えると，**格子模型**ができる

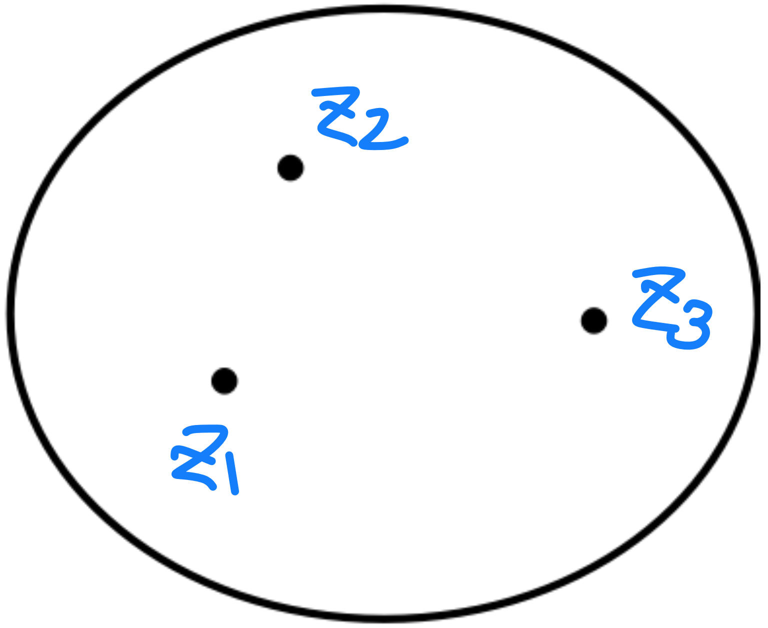


トポロジカルな方向にウィルソンラインを動かしても
「余剰次元」のためにウィルソンラインは交わらない

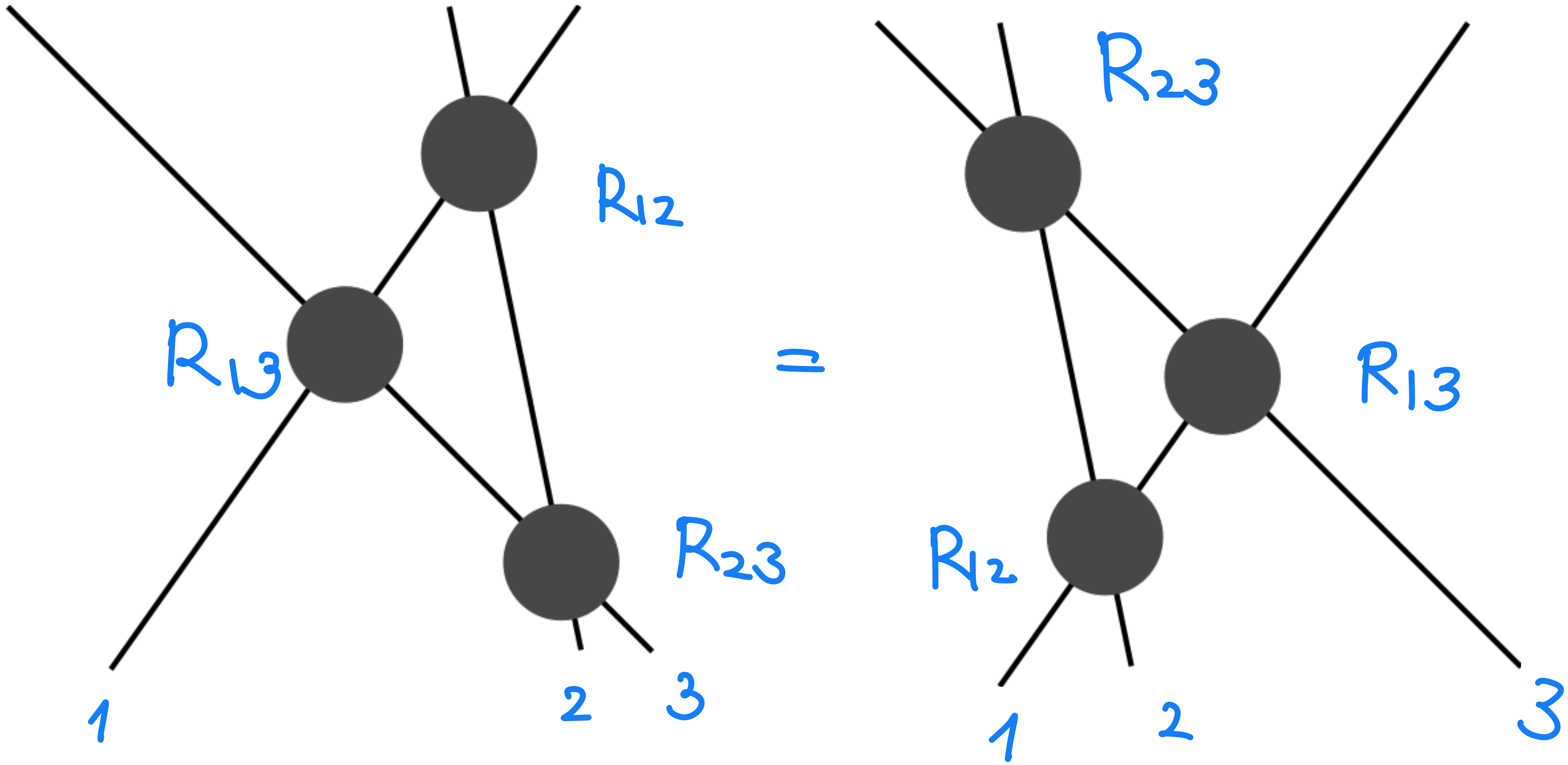


トポロジカルな方向にウィルソンラインを動かしても
「余剰次元」のためにウィルソンラインは交わらない





得られた方程式: ヤン・バクスター方程式



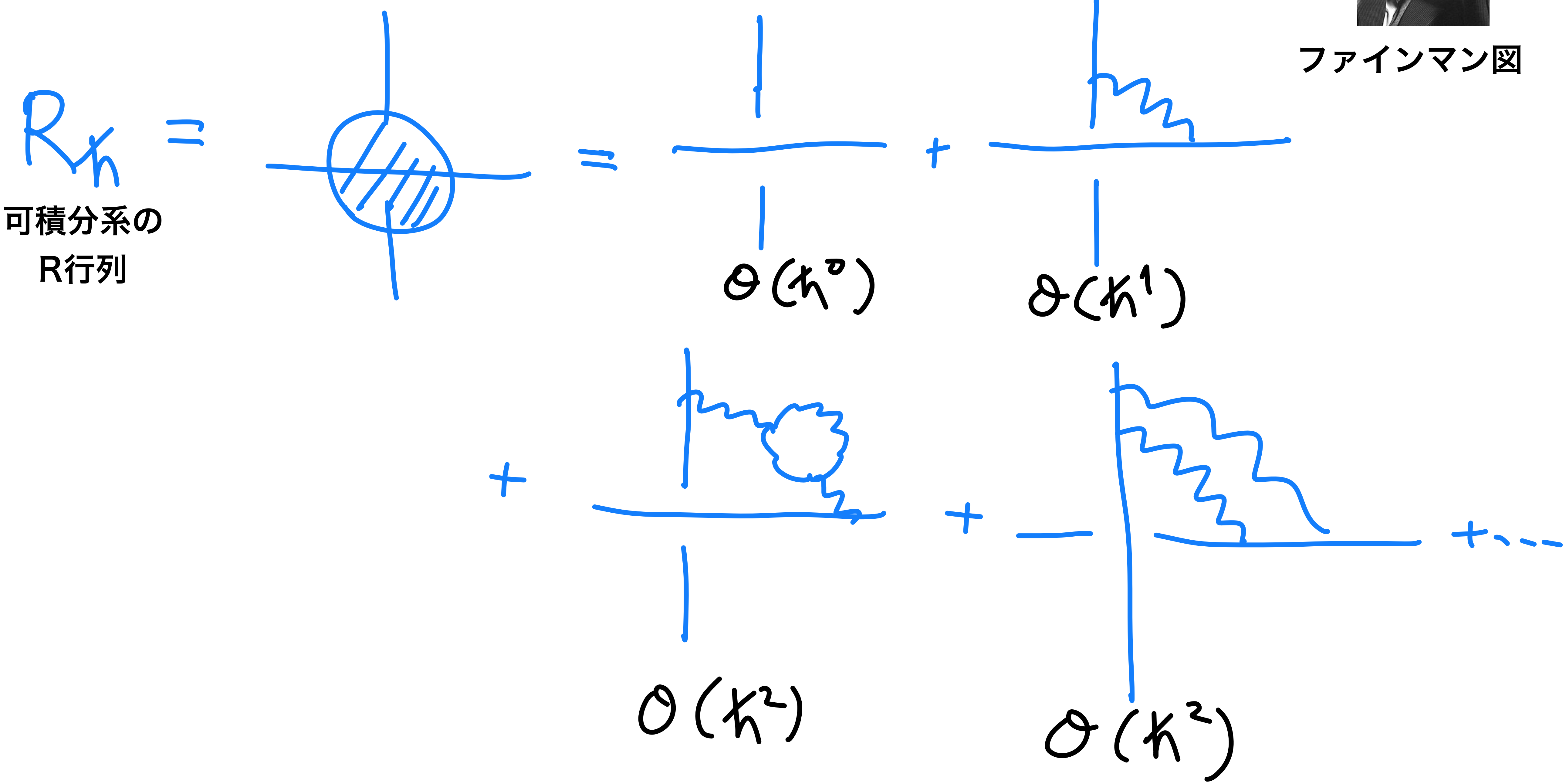
$$R_{12}\, R_{13}\, R_{23} = R_{23}\, R_{13}\, R_{12} \in \mathrm{End}\Big(\bigotimes_{i=1,2,3} V_i\Big)$$

$$R_{12} \in \mathrm{End}(V_1 \otimes V_2) \quad \text{etc.}$$

場の理論の量子効果を摂動的に計算することで,
可積分系の結果を系統的に再現できる

[Costello, Witten + MY]

ファインマン図

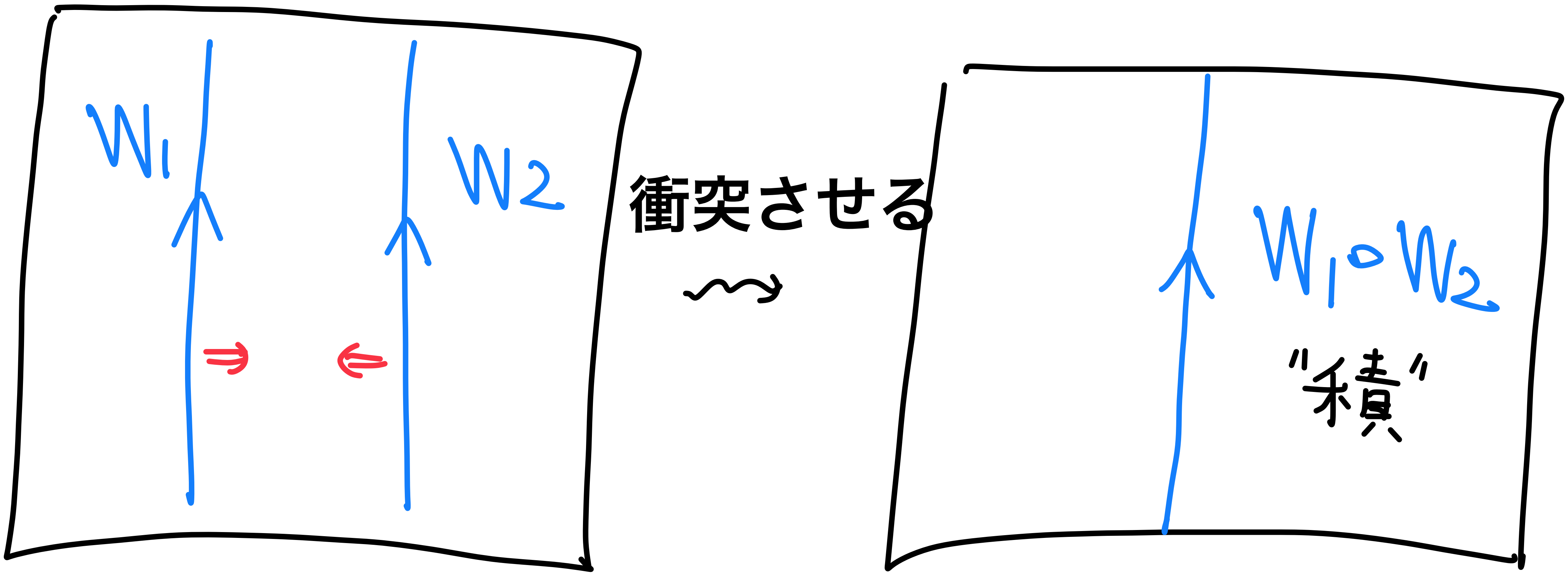


逆に言えば,これは摂動論の任意の次数で物理量が計算できる

「ウィルソン・ラインのなす代数」
を考えることで，可積分系の背後にある無限次元代数
（ヤンギアンとその仲間たち）を導出できる

Drinfeld

[Costello, Witten + MY]



$Y_\hbar(\mathfrak{g})$, $U_{q,\hbar}(\mathfrak{g})$, $U_{\tau,\hbar}(\mathfrak{g})$

有理　三角　楕円

$\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^\times$, $E \longleftarrow \mathbb{C}$

発展

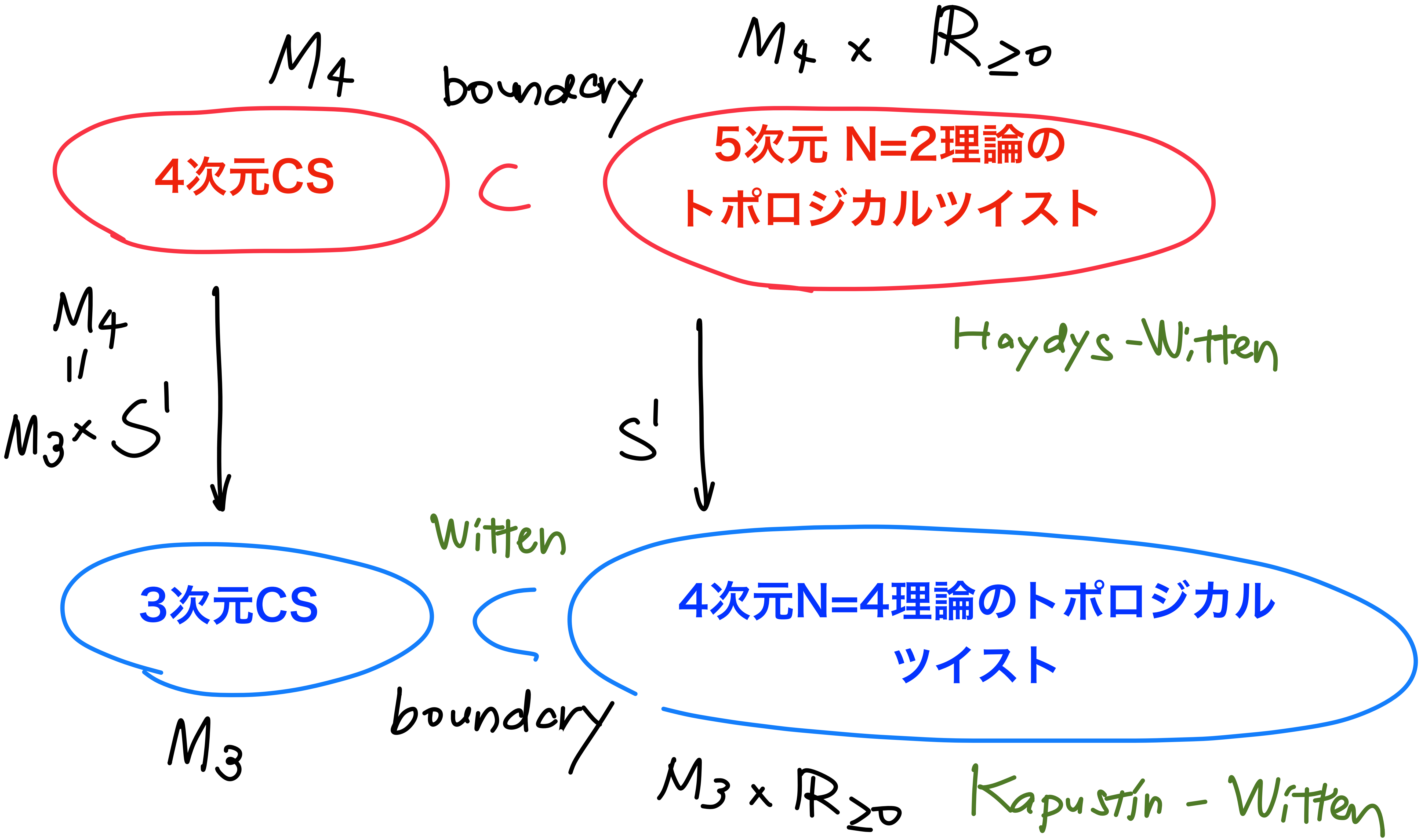
$$
\begin{tikzcd}
\text{4d CS} & & \text{5d CS} \\
\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C} \arrow[rr, "\text{``T-dual''}", "\text{MY}"'] \arrow[d, squiggly] & & \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \arrow[d, squiggly] \\
\text{Yangian} & & \text{affine Yangian}
\end{tikzcd}
$$

$$Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$$

$$\rotatebox{90}{$\simeq$}$$

$$W_N \subset W_{1+\infty}$$

e.g. Schiffmann, Vasserot


M_4
boundary
$M_4 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$
4次元CS
5次元 N=2理論のトポロジカルツイスト
$M_4 = M_3 \times S^1$
S^1
Haydys-Witten
Witten
3次元CS
4次元N=4理論のトポロジカルツイスト
M_3
boundary
$M_3 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$
Kapustin - Witten

幾何ラングランズ対応

さらに高次元に持ち上げることができる

[Costello, Bittleston-Skinner]

４次元CS

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1$

$\xrightarrow{\mathbb{P}^1}$

2次元WZW

$\mathbb{R}^2$

可積分

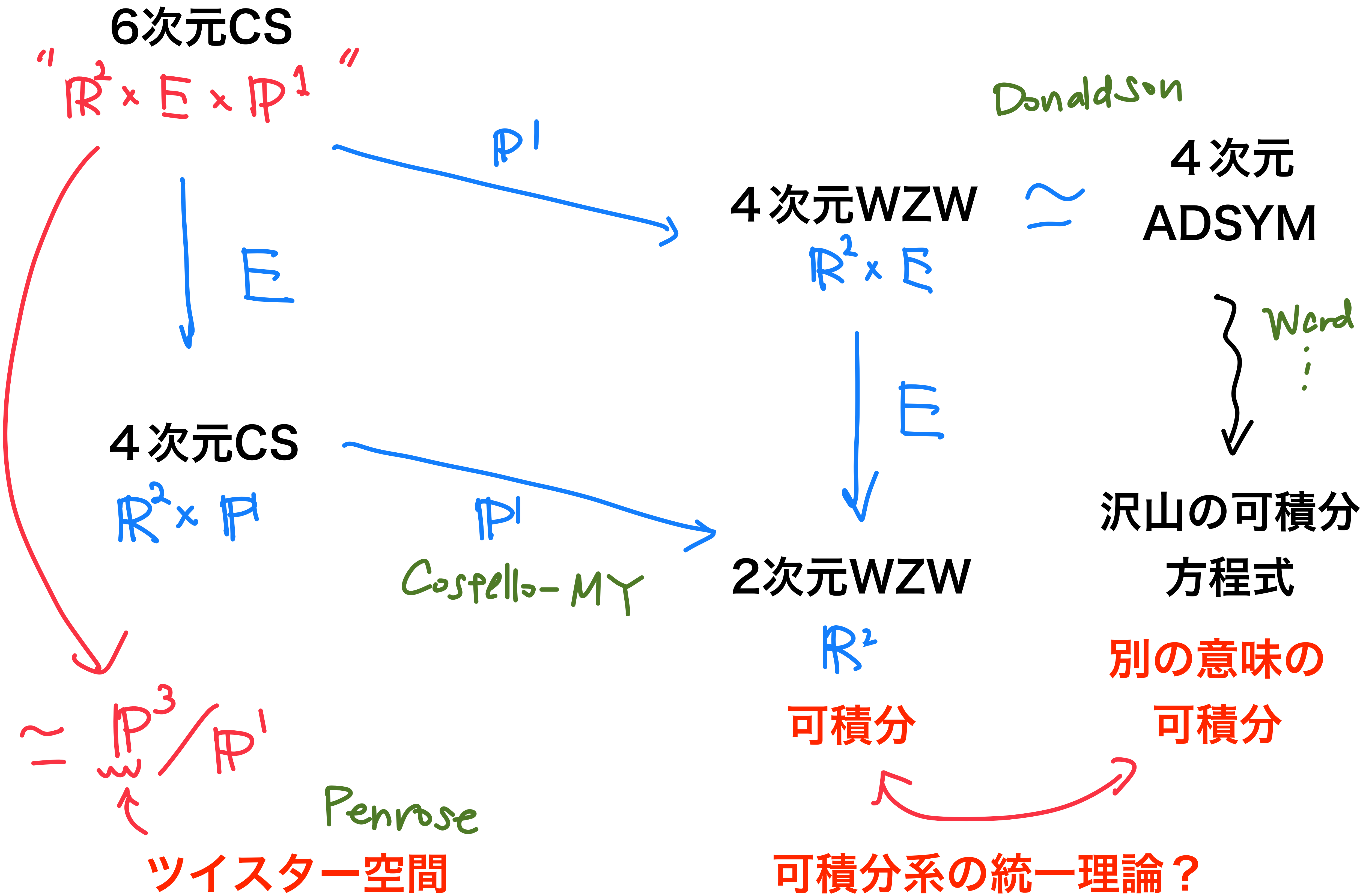
さらに高次元に持ち上げることができる

[Costello, Bittleston-Skinner]

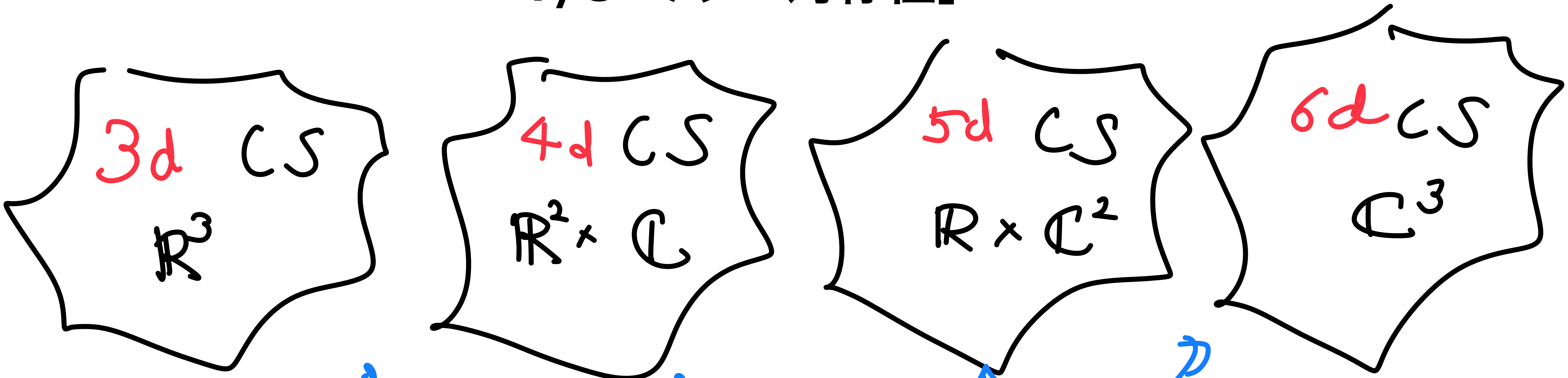
$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{6次元CS} \\ \text{“}\mathbb{R}^2 \times E \times \mathbb{P}^1\text{”}\end{array} \arrow[r, "\mathbb{P}^1"] \arrow[d, "E"] & \begin{array}{c}\text{4次元WZW} \\ \mathbb{R}^2 \times E\end{array} \arrow[d, "E"] \\
\begin{array}{c}\text{4次元CS} \\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{P}^1\end{array} \arrow[r, "\mathbb{P}^1"'] & \begin{array}{c}\text{2次元WZW} \\ \mathbb{R}^2 \\ \text{可積分}\end{array}
\end{tikzcd}
$$

さらに高次元に持ち上げることができる

[Costello, Bittleston-Skinner]



「1/3 ミラー対称性」



A-model
トポロジカル

"ミラー/3"　"ミラー/3"　"ミラー/3"

B-model
正則

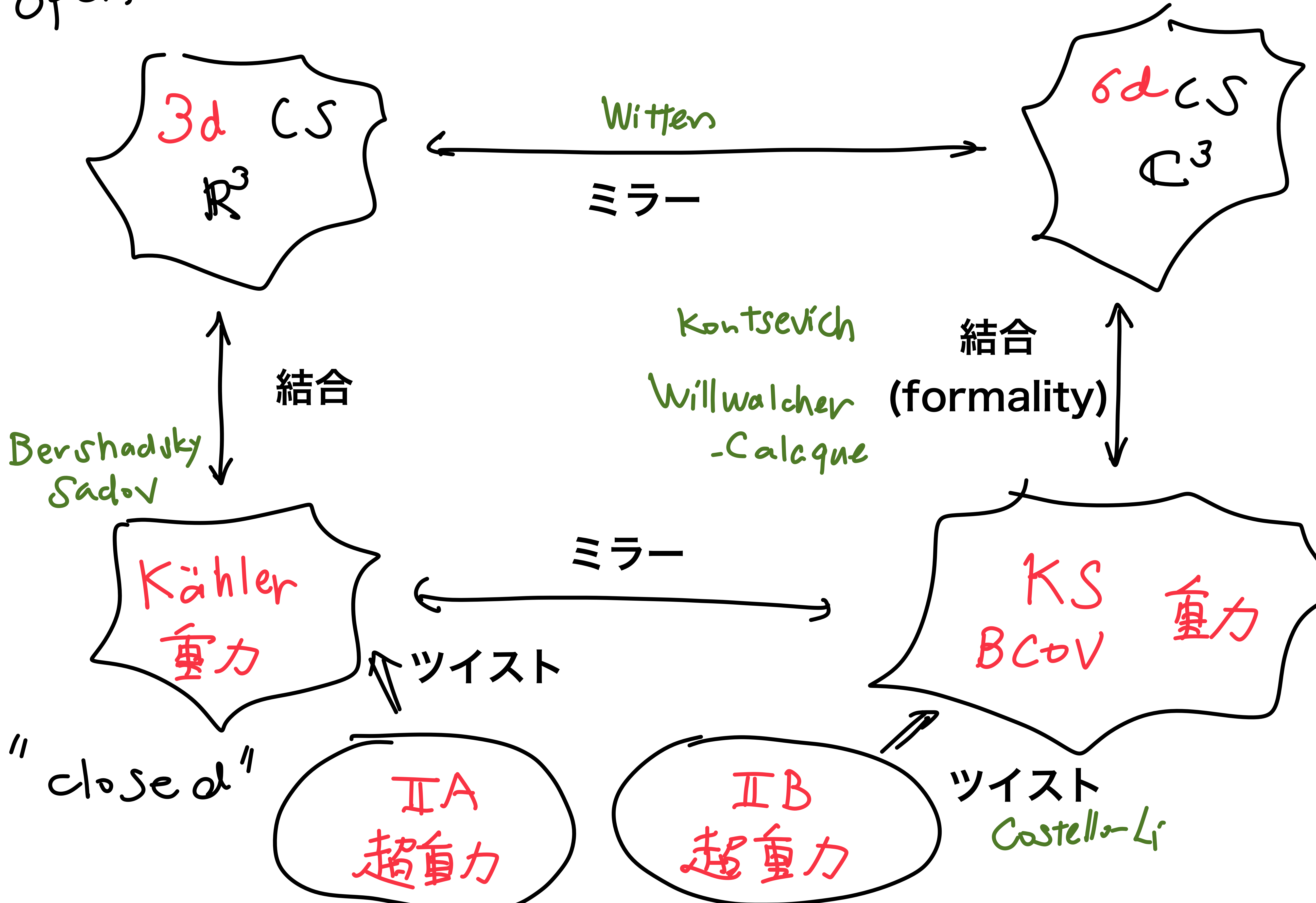
||
"T-dual" MY

ミラー　cf. Strominger Yau Zaslow

cf. 一般化された複素構造

cf. ダイマー理論とホモロジカルミラー対称性　Ueda-MY

重力も含める！



"open"
3d CS
$\mathbb{R}^3$
Witten
ミラー
6d CS
$\mathbb{C}^3$
結合
Bershadsky
Sadov
Kontsevich
Willwalcher
-Calaque
結合
(formality)
Kähler
重力
ミラー
KS
BCOV
重力
ツイスト
"closed"
IIA
超重力
IIB
超重力
ツイスト
Costello-Li

まとめ

場の理論の数学的枠組みは摂動論的にはすでに存在する

3次元チャーン＝サイモンズ理論 $\rightsquigarrow$ 結び目

4次元チャーン＝サイモンズ理論 $\rightsquigarrow$ 可積分系

可積分系に限らず，様々な数学の分野を結びつける？

末知の数学が，量子場の理論にまだまだ潜んでいる？

Tsinghua-Tokyo workshop on Calabi-Yau

15-19 January 2024
Fuji Kensyuzyo
Asia/Tokyo timezone

- Overview
- Participant List
- Registration
- Directions to the Venue
- Accommodations outside Conference Venue
- Kavli IPMU Code of Conduct

Dates: January, 15-19, 2024

Venue: Fuji Kensyujyo https://fujicalm.jp/

Format: Primarily in Person. We are planning to make this into a hybrid event.

Overview: The recent decades have seen fruitful interactions between geometry
string theory. One of the most important classes of geometries in such interacti
Calabi-Yau manifold, whose name originates partly from one of the organizers, I
Such math-physics interaction is well illustrated in mirror symmetries and the st
invariants (Gromov-Witten invariants, Donaldson-Thomas invariants,...) of the Ca

https://indico.ipmu.jp/event/422/