2014年度 物理数学 II レポート

提出先: メールで tachikawa.kougi.report@gmail.com に PDF ファイルか Word ファイルか紙に書いたのを携帯/デジカメで読めるように撮るなりして画像で送るかしてください。どの場合も、名前と番号をはっきり書いてください。

締切: 2015/2/5(木)、日本時間 23 時までとします。2/19(木) には追レポートが必要な人には案内が行くようにします。

レポート課題: 以下に沢山ある課題のうち、**少なくとも 3 つを選んで**解答してください。どの課題も配点は変わりません。3 つより沢山答えた場合は、適宜点数を加算します。また、手書きの人は、書き殴るのでなくて、採点する TA の方を哀れんで、なるべく綺麗な字で書いてください。

課題 1

小問 1: 熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) \tag{1.1}$$

を考える。

1. x 方向が無限に広い場合 $-\infty < x < \infty$ を考える。$t = 0$ での値が

$$f(t=0,x) = e^{-x^2} \tag{1.2}$$

で与えられた場合、時刻 $t > 0$ での $f(t,x)$ の値はどうなるか。

2. x 方向が有限で $-L \leq x \leq L$ であり、周期的境界条件 $f(t,x=L) = f(t,x=-L)$ の場合を考える。$t = 0$ での値が

$$f(t=0,x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2L}) \tag{1.3}$$

で与えられたばあい、時刻 $t > 0$ での $f(t,x)$ の値はどうなるか。

3. (2) と同じ境界条件で、時刻 $t = 0$ での初期値 $f(t = 0,x)$ が与えられているとき、$t \to +\infty$ としたときの $f(t,x)$ を求めよ。

小問 2: 波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,x) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x) \tag{1.4}$$

を考える。

1. x 方向が無限に広い場合 $-\infty < x < \infty$ を考える。一般解が

$$f(t,x) = f_L(x+vt) + f_R(x-vt) \tag{1.5}$$

と書けることを示せ。

2. x 方向が半直線 $0 \leq x < \infty$ であって、境界条件が $f(t,x=0) = 0$ で与えられる。一般解はどうなるか。

3. x 方向が半直線 $0 \leq x < \infty$ であって、境界条件が $\partial f/\partial x|_{x=0} = 0$ で与えられる。一般解はどうなるか。

課題 2

ラゲール多項式 $L_n(x)$ について、以下の問いに答えよ。

1. $L_n(x)$ は n 次多項式で、最高次の係数は $(-1)^n$ であり、直交性

$$\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{mn} N_n \tag{2.1}$$

を満たす。これを用いて、$L_n(x)$ と N_n を $n = 0, 1, 2, 3$ について求めよ。

2. $L_n(x)$ はまた、ラゲールの微分方程式

$$(x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} + \lambda) f(x) = 0 \tag{2.2}$$

で λ を適切に選んだ際の多項式解としても定義できる。まず、

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{2.3}$$

とし、これを微分方程式 (2.2) に代入して、c_i と c_{i+1} の関係を求めよ。λ がどのような値のときに $f(x)$ は有限項の和になるか。これを用いて、$L_n(x)$ を $n = 0, 1, 2, 3$ について求め、前の結果と一致することを確認せよ。

3. $L_n(x)$ はロドリゲスの公式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{2.4}$$

を用いても求められる。これを利用して、式 (2.1) の N_n を求めよ。

4. 母関数表示

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{y^n}{n!} = e^{-xy/(1-y)}/(1-y) \tag{2.5}$$

を導け。

5. 母関数表示の両辺を x および y で微分して比較することで、$L_{n+1}(x)$ 及び $xL_n'(x)$ を $L_n(x)$ と $L_{n-1}(x)$ とであらわせ。

6. ラゲール陪多項式

$$L_n^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} L_n(x) \tag{2.6}$$

は $L_n(x)$ のロドリゲスの公式 (2.4) から

$$L_n^{(m)}(x) = \frac{d^m}{dx^m} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{2.7}$$

とあらわせるが、$L_n^{(m)}(x)$ 自体が重み $e^{-x}x^m$ のもとでの $(n-m)$ 次の直交多項式であるため、それ自身のロドリゲス公式

$$L_n^{(m)}(x) \propto x^{-m} e^x \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^{n-m} x^m e^{-x}) \tag{2.8}$$

を持つ。式 (2.7) と式 (2.8) が定数倍を除いて等しいことを示せ。一般的に証明するのが大変ならば、いくつかの例 ($m = 3, n = 5$ 等) で確認するのでも良い。

課題 3

あなたはある朝、目が覚めてみると空間が一次元増えて四次元になっていることを発見した！これでは三次元空間における球面調和関数だけでは物理を理解することはできない、四次元における球面調和関数を決定しないといけない。しかし物理数学 II の講義で習った内容は四次元の球面調和関数を決定するのに十分だ。そこで、以下の順序にしたがって、四次元の球面調和関数について調べよ。

1. まずは三次元の球面調和関数について思い出そう。極座標を

$$(X, Y, Z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) \tag{3.1}$$

ととると、ラプラシアンは

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\phi} \tag{3.2}$$

ただし

$$\Delta_{\theta,\phi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{3.3}$$

だった。そこで、

$$\Delta_{\theta,\phi}f(\theta,\phi) = -\lambda f(\theta,\phi) \tag{3.4}$$

がどのような λ のときに解をもつか知りたかった。$f(\theta,\phi) = f_m(\theta)e^{im\phi}$ と仮定する。すると、$f_m(\theta)$ が満たす方程式は

$$(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta})f_m(\theta) = -\lambda f_m(\theta) \tag{3.5}$$

となる。

(a) ここで、$z = \cos\theta$ と変数変換して $F_m(z) = f_m(\theta)$ とすると微分方程式は

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - 2z\frac{d}{dz} - \frac{m^2}{1-z^2} + \lambda\right]F_m(z) = 0 \tag{3.6}$$

となることを示せ。

(b) $m = 0$ のとき、$F_0(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$ として、a_n と a_{n+2} の関係をもとめよ。

(c) $F_0(z)$ が有限項の多項式になるには、非負整数 ℓ があって $\lambda = \ell(\ell+1)$ となることを説明せよ。

(d) $m \neq 0$ の場合は、$\lambda = \ell(\ell+1)$ かつ $\ell \geq |m|$ の場合のみ微分方程式 (3.6) はまっとうな解 $F_m(z)$ があることが知られている。これを $P_\ell^{(m)}(z)$ と書こう。それを用いると球面調和関数は $Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = P_\ell^{(m)}(\cos\theta)e^{im\phi}$ と書ける。すると

$$\Delta_{\theta,\phi}Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = -\ell(\ell+1)Y_{\ell,m}(\theta,\phi) \tag{3.7}$$

である。 さて、固有値 $\ell(\ell+1)$ を固定した際、いろいろな m を選ぶことができるが、とりうる m を記述せよ。また、合計何通り選べるか。ℓ であらわせ。

2. 次に四次元の球面調和関数について考える。極座標は

$$(W, X, Y, Z) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha\sin\theta\cos\phi, r\sin\alpha\sin\theta\sin\phi, r\sin\alpha\cos\theta) \tag{3.8}$$

ととる。ラプラシアンは

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial W^2} + \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}r^3\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\alpha,\theta,\phi} \tag{3.9}$$

ただし

$$\Delta_{\alpha,\theta,\phi} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sin^2\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\Delta_{\theta,\phi} \tag{3.10}$$

となる。そこで、

$$\Delta_{\alpha,\theta,\phi}g(\alpha,\theta,\phi) = -\lambda g(\alpha,\theta,\phi) \tag{3.11}$$

がどのような λ のときに解をもつか知りたい。

(a) $g(\alpha,\theta,\phi) = g_\ell(\alpha)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ と仮定する。すると、$g_\ell(\alpha) \equiv g(\alpha,\theta,\phi)$ が満たす方程式は

$$(\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\sin^2\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2\alpha})g_\ell(\alpha) = -\lambda g_\ell(\alpha) \tag{3.12}$$

となる。ここで、$w = \cos\alpha$ と変数変換して $G_\ell(w) = g_\ell(\alpha)$ とすると微分方程式は

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - 3z\frac{d}{dz} - \frac{\ell(\ell+1)}{1-z^2} + \lambda\right]G_\ell(z) = 0 \tag{3.13}$$

となることを示せ。

(b) $\ell = 0$ のばあい、$G_0(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots + a_n w^n + \cdots$ としたとき、a_n と a_{n+2} の関係をもとめよ。

(c) $G_0(w)$ が有限項の多項式になるには、非負整数 k があって $\lambda = k(k+2)$ となることを説明せよ。

(d) $\ell \neq 0$ のばあい、同様に $\lambda = k(k+2)$ ただし $k \geq |\ell|$ のときのみ微分方程式 (3.13) はまっとうな解 $G_\ell(w)$ があることが知られている。それを $C_k^{(\ell)}(w)$ と書こう。すると、四次元の球面調和関数は $\Upsilon_{k,\ell,m}(\alpha,\theta,\phi) = C_k^{(\ell)}(\cos\alpha)Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ と書け、

$$\Delta_{\alpha,\theta,\phi}\Upsilon_{k,\ell,m}(\alpha,\theta,\phi) = -k(k+2)\Upsilon_{k,\ell,m}(\alpha,\theta,\phi). \tag{3.14}$$

を満たす。さて、固有値 $k(k+2)$ を固定した際、いろいろな ℓ と m を選ぶことができるが、何通り選べるか。k であらわせ。

3. 暇があるひとは、さらに五次元、六次元、一般次元も考えてみよう。

課題 4

いろいろなところで "$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + \cdots$" という主張を聞くが、これの意味を、物理数学 I と II で学んだことを用いて考えよう。答えは負の有理数になる。

1. 関数 $f(x)$ に対して、そのフーリエ変換を

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \tag{4.1}$$

とする。このとき、ポワソン和公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(2\pi m) \tag{4.2}$$

を示せ。(ヒント: $F(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ は x に関して周期 1 の周期関数である。これをフーリエ級数展開し、係数を決定した上、$x = 0$ を代入すると良い。)

2. 関数 $\theta(t)$ を

$$\theta(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \tag{4.3}$$

と定める。$\theta(1/t) = t^{1/2}\theta(t)$ を示せ。

3. 関数 $\Xi(s)$ を

$$\Xi(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}(\theta(t) - 1) t^{s/2-1} dt \tag{4.4}$$

で定める。まず、$s > 1$ とし、$\theta(t)$ の定義 (4.3) を代入して計算することにより、$\Xi(s)$ を Γ 関数および ζ 関数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \qquad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{4.5}$$

を用いて書き直せ。

4. 次に、(4.4) を勝手な s で収束する形に書き換えよう。そのため、t 積分を $\int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$ と分割したのち、$\int_0^1$ の部分のみ $t \to 1/t$ をつかって変数変換し、$\theta(1/t) = t^{1/2}\theta(t)$ を使うとよい。この結果、$\Xi(s) = \Xi(1-s)$ であることを示せ。

5. 上記二問を組み合わせると、$\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ の関係がつき、$\zeta(s)$ が複素平面全体に解析接続できたことになる。$\zeta(2) = \pi^2/6$ は知っているものとして、$\zeta(-1)$ を求めよ。

6. おしまいに、暇なひとは $\zeta(2) = \pi^2/6$ の導出も、何か文献を参考にして記述せよ。

課題 5

まず、2 次元で固有値問題

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})f(x,y)=-\alpha f(x,y) \tag{5.1}$$

を考える。

(1) 領域は $-1\le x\le 1, -1\le y\le 1$ で、周期的境界条件を課す。固有関数は x と y の指数関数の積で書けることを示して、α を小さい順に 4 つ書け。

(2) 領域は $-1\le x\le 1, -1\le y\le 1$ で、境界では $f=0$ とする。固有関数は x と y の三角関数の積で書けることを示して、α を小さい順に 4 つ書け。

(3) 領域は円盤 $\sqrt{x^2+y^2}\le 1$ で、境界では $f=0$ とする。極座標 r,θ にうつると、固有関数は r のベッセル関数を用いて書けることを示して、α を小さい順に 4 つ書け。ベッセル関数の零点が必要になりますが、いろいろなところにのっているので調べて使ってください。出典もきちんと書くこと。もしくは、頑張って自分で数値計算してみてくれてもいいです。

次に、3 次元で固有値問題

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})f(x,y,z)=-\alpha f(x,y,z) \tag{5.2}$$

を考える。

(4) 領域は $-1\le x\le 1, -2\le y\le 2, -3\le z\le 3$ で、周期的境界条件を課す。固有関数をもとめ、α を小さい順に四つかけ。

(5) 領域は球体 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le 1$ で、境界では $f=0$ とする。極座標 r,θ,ψ にうつると、固有関数は r の球ベッセル関数を用いて書けることを、講義ノートに従って示して、α を小さい順に 4 つ書け。

課題 6

ラプラシアンの固有値の漸近分布について考えよう。2 次元で固有値問題

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})f(x,y)=-Ef(x,y) \tag{6.1}$$

を考える。まず、$0<x<X, 0<y<Y$ で面積 XY の長方形の領域を考える。

1. 長方形の領域に周期的境界条件を課す。一次独立な固有関数 f は二つの整数 n_x, n_y を使って書ける。固有値 E を n_x, n_y を用いて表せ。

2. 与えられた値 E 以下の一次独立な固有関数の数 $N_{X,Y}^{\text{周期的}}(E)$ を漸近的にもとめよう。これは、n_x を横軸、 n_y を縦軸に取った平面上に、E 一定の等高線を書くことを考え、その中にいくつ格子点 (n_x, n_y) が含まれるかを数えればよい。厳密な数を求めるのは難しいが、十分に E が大きければ、面積を計算すれば格子点がいくつあるかはおおよそわかることになる。このようにして、$N_{X,Y}(E)$ を求めよ。答えは XY に比例する。

3. 長方形の領域の境界条件を、境界で $f=0$ というディリクレ条件に変える。この時一次独立な固有関数は二つの正の整数 n_x, n_y で書ける。 固有値 E を n_x, n_y を用いて表せ。

4. 与えられた値 E 以下の一次独立な固有関数の数 $N_{X,Y}^{\text{ディリクレ}}(E)$ を先ほどと同様にもとめよ。答えは先ほどと同じになる。

5. 長方形の領域の境界条件を、さらに異なったあなたの好きなものを選んで、固有関数系及び固有値をもとめ、その場合の $N_{X,Y}(E)$ を求めよ。答えはやはり同じになる。

次に、原点中心半径 R の円盤領域を考えて、同じくラプラシアンの固有値を考える。

6. 極座標に変換して、一次独立な固有関数 f およびその固有値 E を、ベッセル関数の言葉をつかって記述せよ。

7. 与えられた値 E 以下の一次独立な固有関数の数 $N_R(E)$ を求めよ。ただし、R が充分大きいとして近似的に計算せよ。その際、ベッセル関数 $J_\nu(x)$ の正の実軸上の零点で τ と $\tau+\delta\tau$ の間にあるものの数 $n(\tau)\delta\tau$ は $\delta\tau$ が充分に大きく、ν と τ がさらに充分に大きければ近似的に

$$n_\nu(\tau)\delta\tau=\begin{cases}\pi^{-1}\sqrt{1-(\nu/\tau)^2}\delta\tau & (\tau>\nu)\\ 0 & (\tau<\nu)\end{cases} \tag{6.2}$$

   で与えられることを使って良い。結果が円盤の面積に比例し、比例係数は長方形のばあいに求めたものと一致することを確認せよ。

コメント: 統計力学を学ぶと、箱にいれられた量子自由粒子系の温度 T における全エネルギーは、適切な分布関数 $f(E,T)$ を用いて $\int_0^\infty f(E,T)(dN(E)/dE)dE$ に比例することを学ぶ。この結果が面積に比例する、という、物理的には当たり前の事実を保証しているのがこの結果で、ある意味それから (6.2) を導出することが出来ると思ってもよい。

課題 7

授業で詳しくやらなかった特殊関数は沢山あるし、授業ですこし取り上げた特殊関数でもまだまだいろいろな性質が知られている。何か調べて数ページ程度にまとめよ。参考: 岩波数学公式の第 2 巻、第 3 巻 ; 黒川「 現代三角関数論」等。

課題 8

近年大学のレポート問題といえば Wikipedia からコピペをするのが問題になっているようであるが、 Wikipedia に情報を付加するのであれば文句はないだろう。というわけで、日本語もしくは英語もしくはあなたの好きな言語の Wikipedia の、物理数学に関係しそうな項目について、既存記事を改良するなり、新規記事を書くなりせよ。Wikipedia は特定の編集に関してのリンクを表示することが出来るので、自分の編集がどれかを明記すること。

課題 9

授業では直交多項式系で二階の微分方程式を満たすのは良く知られたものに限る、という Bochner の定理を紹介した。原論文は S. Bochner, **Über Strum-Liouvillesche Polynomsysteme**, Math. Z. 29 (1929) 730-736 (オンライン版にリンク) である。これの内容を解説せよ。逐語訳せよというわけではないので、自分なりに理解して、まとめてください。リンク先は、大学内からなら無料でダウンロードできます。

課題 10

ルジャンドル (陪) 多項式は回転群、エルミート多項式は生成消滅演算子をもちいて導出することができる。同様に、ラゲール多項式も、回転群を用いて導出できる事が知られている。論文は B. Kostant, **On Laguerre polynomials, Bessel functions, Hankel transform and a series in the unitary dual of the simply-connected covering group of** $SL(2,\mathbb{R})$, Representation Th. 4 (2000) 181 (オンライン版にリンク) である。この論文の内容を (少なくとも Section 1 と 2 を) 解説せよ。大問 2 と同様、逐語訳せよというわけではないので、自分なりに理解して、まとめてください。

課題 11

その他、なんでも講義の内容に多少関係ありそうなことなら数ページ程度にまとめてレポートにせよ。