物理学演習III (量子力学)　［その場問題 No. 3］　2016. 4. 26

周りの人と相談して以下の問題を解いても構いません

【角運動量の合成】

(1) 二つの独立した系 A, B の角運動量演算子をそれぞれ $\boldsymbol{J}_A, \boldsymbol{J}_B$ とし、系 A, B の合成系での角運動量演算子 $\boldsymbol{J}$ を

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_A + \boldsymbol{J}_B \ ,$$

と定義する。$\boldsymbol{J}$ と $\boldsymbol{J}_I$ $(I = A, B)$ は、角運動量の代数

$$\left[J^i, J^j\right] = i\epsilon^{ijk} J^k \ , \qquad \left[J_I^i, J_I^j\right] = i\epsilon^{ijk} J_I^k \ ,$$

を満たす。また、系 A, B は独立なので、すべての i, j について

$$\left[J_A^i, J_B^j\right] = 0 \ .$$

である。このとき、$\boldsymbol{J}^2$, J^z, $\boldsymbol{J}_I^2$, J_I^z $(I = A, B)$ が互いに可換かどうかを調べなさい。

(2) 系 A, B の基底ケット $|j_I, m_I\rangle$ $(I = A, B)$ が

$$\boldsymbol{J}_I^2 \,|j_I, m_I\rangle \ = \ j_I(j_I+1)\,|j_I, m_I\rangle \ , \qquad J_I^z\,|j_I, m_I\rangle = m_I\,|j_I, m_I\rangle \ ,$$

を満たし、合成系の基底ケット $|J, M\rangle$ が

$$\boldsymbol{J}^2\,|J, M\rangle \ = \ J(J+1)\,|J, M\rangle \ , \qquad J^z\,|J, M\rangle = M\,|J, M\rangle \ ,$$

を満たすとする。このとき、合成系のヒルベルト空間の基底として次の 2 種類の取り方が可能であることを説明しなさい。

基底 1　$\boldsymbol{J}_A^2, \boldsymbol{J}_B^2, J_A^z, J_B^z$ の同時固有ケット $|j_A, j_B; m_A, m_B\rangle = |j_A, m_A\rangle \otimes |j_B, m_B\rangle$

基底 2　$\boldsymbol{J}_A^2, \boldsymbol{J}_B^2, \boldsymbol{J}^2, J^z$ の同時固有ケット $|j_A, j_B; J, M\rangle$

このように定義された基底 2 を基底 1 の線形結合として表すことを、角運動量の合成という。