物理学演習III (量子力学)　［その場演習 No. 5］　2016. 5. 17

周りの人と相談して以下の問題を解いても構いません

【３次元調和振動子（前半）】

３次元調和振動子のハミルトニアン

$$H = \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}_i^2}{2} \qquad (i = x, y, z)\ ,$$

において、生成・消滅演算子

$$\hat{a}_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}_i + \frac{i}{m\omega}\hat{p}_i\right)\ , \qquad \hat{a}_i^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x}_i - \frac{i}{m\omega}\hat{p}_i\right)\ ,$$

を使って、エネルギー固有値と固有状態を求めることを考える。

(1) 生成・消滅演算子 $\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_i$ が

$$\left[\hat{a}_i,\, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta_{ij}\ ,$$

を満たすことを示しなさい。また、ハミルトニアンがこれらの演算子によって

$$H = \hbar\omega\left(\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + \frac{3}{2}\right)\ ,$$

と表されることを示しなさい。

(2) この物理系の最低エネルギー状態 $|0\rangle$ は

$$\hat{a}_i\,|\,0\,\rangle = 0\ ,$$

を満たす。振動の i 成分に注目したとき

$$|\,n_i\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_i!}}(\hat{a}_i^\dagger)^{n_i}\,|\,0\,\rangle\ ,$$

という状態が

$$\hat{a}_i^\dagger\,|\,n_i\,\rangle = \sqrt{n_i+1}\,|\,n_i+1\,\rangle\ , \qquad \hat{a}_i\,|\,n_i\,\rangle = \sqrt{n_i}\,|\,n_i-1\,\rangle\ ,$$

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i\,|\,n_i\,\rangle = n_i\,|\,n_i\,\rangle\ , \qquad \langle\,m_i\,|\,n_i\,\rangle = \delta_{m_i,n_i}\ ,$$

を満たすことを示しなさい。

(3) ３次元調和振動子の固有状態が

$$|\,n_x, n_y, n_z\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x! n_y! n_z!}}(\hat{a}_x^\dagger)^{n_x}(\hat{a}_y^\dagger)^{n_y}(\hat{a}_z^\dagger)^{n_z}\,|\,0\,\rangle\ ,$$

となることを示しなさい。また、対応する固有値を求めなさい。