物理学演習 III (量子力学)　　［その場問題 No. 7］　　2016. 6. 14

【時間によらない摂動論（前半）】

ハミルトニアン H が，摂動として取り扱わない部分 H_0 と摂動を与える相互作用項 V とによって，

$$H = H_0 + \epsilon V \ ,$$

と書けているとする。このハミルトニアン H_0 の固有状態 $|n\rangle$（$n = 1, 2, \cdots$）からなるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に縮退がない場合には，H_0 の固有値の各値には，必ず 1 つの固有状態 $|n\rangle$ のみが存在する。すなわち，H_0 のある 1 つの固有値 E_n とその一義的に決まる固有状態 $|n\rangle$ は，

$$H_0|n\rangle = E_n|n\rangle \ ,$$

を満たしている。次に，ハミルトニアン H を対角化できたとし，その固有値を $E(\epsilon)$，それに対応した固有状態を $|\psi\rangle$ とすると，

$$H|\psi\rangle = E(\epsilon)|\psi\rangle \ ,$$

と書ける。ここで，固有値 $E(\epsilon)$ とその固有状態 $|\psi\rangle$ は，パラメータ ϵ に依存した形になっているはずである。

$\epsilon \to 0$ の極限ではハミルトニアン H は H_0 になるので，それに伴い，固有値 $E(\epsilon)$ は H_0 のある固有値 E_n に移り，固有状態 $|\psi\rangle$ もこの固有値 E_n の固有状態 $|n\rangle$ になるはずである。それゆえ，この E_n と $|n\rangle$ に対応した $E(\epsilon)$ と $|\psi\rangle$ をパラメータ ϵ で形式的にベキ展開してみると，

$$E_n(\epsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon^p E^{(p)}{}_n = E_n + \epsilon E^{(1)}{}_n + \epsilon^2 E^{(2)}{}_n + \cdots \ ,$$

$$|\psi_n\rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon^p |\psi_n^{(p)}\rangle = |n\rangle + \epsilon|\psi_n^{(1)}\rangle + \epsilon^2|\psi_n^{(2)}\rangle + \cdots \ ,$$

とできることがわかる。

(1) $E^{(1)}{}_n$ を求めなさい。

(2) $|\psi_n^{(1)}\rangle$ と固有状態 $|m\rangle$（$m \neq n$）との内積 $\langle m|\psi_n^{(1)}\rangle$ を求めなさい。