物理学演習 III (量子力学)　　［その場問題 No. 9］　　2016. 6. 28

【時間に依存した摂動論】

ハミルトニアン $H = H_0 + V(t)$ において、微小項 $V(t)$ が時間に陽に依存する場合の摂動を考える。H_0 は時間によらず、その固有値 E_n と固有状態 $|n\rangle$ が分かっているとして以下の問いに答えよ。

(1) Schrödinger 表示の波動関数 $|\Psi(t)\rangle_S$ が

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle_S = H\,|\Psi(t)\rangle_S \ ,$$

を満たすとき、相互作用表示の波動関数 $|\Psi(t)\rangle_I$ は次のように定義される。

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}\,|\Psi(t)\rangle_I \ .$$

$|\Psi(t)\rangle_I$ の従う時間発展の方程式を求めよ。ただし、$V_I(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}H_0 t}\,V(t)\,e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}$ とする。

(2) $|\Psi(t)\rangle_I$ を H_0 の固有状態 $|n\rangle$ を用いて

$$|\Psi(t)\rangle_I = \sum_n c_n(t)\,|n\rangle \ ,$$

と展開したとき、係数 $c_n(t)$ が次の方程式を満たす事を示せ。

$$i\hbar\frac{d}{dt}c_n(t) = \sum_k V_{nk}(t)\,c_k(t) \ .$$

ただし、$V_{nk}(t) = \langle n|\,V_I(t)\,|k\rangle$ である。

(3) 前問の方程式から次の式を導け。

$$\begin{aligned}
c_n(t) = c_n(t_0) &+ \sum_k \frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt'\,V_{nk}(t')\,c_k(t_0) \\
&+ \sum_{k,\ell}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt''\,V_{n\ell}(t')\,V_{\ell k}(t'')\,c_k(t_0) \\
&+ \sum_{k,\ell,m}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^3 \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt'''\,V_{n\ell}(t')\,V_{\ell m}(t'')\,V_{mk}(t''')\,c_k(t_0) \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$