物理学演習 III(量子力学)　　［その場演習 No. 10］　　2016. 7. 5

【WKB 近似 (前半)】

1 次元の Schrödinger 方程式

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\ \psi(x)+[E-V(x)]\,\psi(x)=0$$

において，波動関数に $\psi(x)=\exp\left[\frac{i}{\hbar}S(x)\right]$ を代入すると

$$(S')^2-i\hbar S''+2m(V(x)-E)=0 \tag{1}$$

を得る。ここで S', S'' は，それぞれ S の x についての 1 階微分, 2 階微分を表す。

(1) $\hbar$ が小さいとして

$$S(x)=S_0(x)+\hbar S_1(x)+\cdots$$

のように $S(x)$ を $\hbar$ のべき展開したものを (1) 式に代入し，次の関係式を得よ。

$$\hbar^0 \quad : \quad (S_0')^2+2m(V-E)=0, \tag{2}$$

$$\hbar^1 \quad : \quad 2S_0'S_1'-iS_0''=0. \tag{3}$$

このように，$\hbar$ について 1 次の項まで近似する方法を WKB 近似という。

(2) $E>V(x)$ のとき、$p(x)\equiv\sqrt{2m(E-V)}$ として (2), (3) 式を解くことで

$$S_0=\pm\int^x dx'\,p(x'),\qquad S_1=\frac{i}{2}\ln\,p(x)$$

となることを確認せよ。

同様に，$E<V(x)$ のとき、$\kappa(x)\equiv\sqrt{2m(V-E)}$ と置いて

$$S_0=\pm\,i\int^x dx'\,\kappa(x'),\qquad S_1=\frac{i}{2}\ln\,\kappa(x)$$

となることを確認せよ。

(3) 上の各領域において，波動関数は次のように近似できることを示せ。

$$\psi(x) \;=\; \frac{c_1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int^x dx'\,p(x')\right]+\frac{c_2}{\sqrt{p(x)}}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int^x dx'\,p(x')\right],\quad (E>V(x))$$

$$\psi(x) \;=\; \frac{d_1}{\sqrt{\kappa(x)}}\exp\left[\frac{1}{\hbar}\int^x dx'\,\kappa(x')\right]+\frac{d_2}{\sqrt{\kappa(x)}}\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int^x dx'\,\kappa(x')\right].\quad (E<V(x))$$

(4) 古典力学において，$E=V(x)$ を満たす x は粒子が折り返す場所（古典的回帰点）である。その近傍では WKB 近似を適用することができないことを説明せよ。