物理学演習III (量子力学)　　No. 1　　2016. 4. 5

1.【極座標系と角運動量】

直交座標 (x, y, z) を用いて、極座標 (r, θ, ϕ) を

$$x = r\sin\theta\cos\phi\ , \qquad y = r\sin\theta\sin\phi\ , \qquad z = r\cos\theta\ ,$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ , \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\ , \qquad \tan\phi = \frac{y}{x}\ ,$$

と定義する。

(1) 角運動量演算子 $\mathbf{L}$ が

$$\mathbf{L} = -i\hbar\mathbf{r}\times\nabla\ ,$$

と与えられているとき、極座標系での角運動量演算子が次のように与えられることを示せ。

$$L_x = i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\ ,$$
$$L_y = -i\hbar\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\ ,$$
$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\ .$$

(2) 昇降演算子 $L_\pm = L_x \pm iL_y$ を計算しなさい。

(3) 全角運動量演算子 $\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ を計算しなさい。

2.【動径運動量と角運動量】

まず，古典力学の範囲で考える。

(1) 二つのベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の外積についての公式

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2\,\mathbf{B}^2 - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2\ ,$$

を示せ。これを用いて，角運動量 $\mathbf{L^2} = (\mathbf{r}\times\mathbf{p})^2$ を $\mathbf{r}$ と $\mathbf{p}$ の内積表示に書き表せ。

(2) 動径方向の運動量を $p_r = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})/r$ と表すと、ハミルトニアン $H = \mathbf{p}^2/(2m)$ は、

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2}$$

と書けることを示せ。

次に，量子力学に移行し、同様の考察を試みる。

(3) 座標演算子 $\mathbf{r}$ と運動量演算子 $\mathbf{p}$、および角運動量演算子 $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ が、

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{r}^2\,\mathbf{p}^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})^2 + i\hbar\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})$$

を満たすことを示せ。

(4) 動径座標演算子 r と動径運動量演算子 $p_r = -i\hbar \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r$ との交換関係が

$$[r,\ p_r] = i\hbar$$

となることを示せ。

(5) ハミルトニアン

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

が

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\right)^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2}$$

と書けることを示せ。

3. 【中心力場ポテンシャル】

(1) 座標演算子 $\mathbf{r}$ と運動量演算子 $\mathbf{p}$ に対して，次の二つの交換関係が成り立つことを示しなさい。

$$[L_i,\ p_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk}\, p_k\ , \qquad [L_i,\ r_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk}\, r_k\ ,$$

(2) 中心力場におけるハミルトニアン

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r)$$

と角運動量演算子 $\mathbf{L}$ との交換関係 $[\,\mathbf{L}, H\,]$ を計算しなさい。

(3) シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\,\phi(t)\,\rangle = \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r)\right]|\,\phi(t)\,\rangle\ ,$$

を満たす波動関数 $|\,\phi(t)\,\rangle$ による角運動量演算子 $\mathbf{L}$ の期待値 $\langle \mathbf{L} \rangle$ の時間変化 $d\langle \mathbf{L} \rangle/dt$ の値を求め、この結果の物理的意味を議論しなさい。