物理学演習 III（量子力学）　　No. 4　　2016. 5. 10.

[1] **【LS 結合相互作用】**

軌道角運動量演算子 $\boldsymbol{L}$ とスピン演算子 $\boldsymbol{S}$ の固有状態をそれぞれ $|l,m\rangle$、$|1/2,\pm1/2\rangle$ と表すとき

$$\boldsymbol{L}^2\,|l,m\rangle = l(l+1)\hbar^2\,|l,m\rangle\,, \qquad L_z\,|l,m\rangle = m\hbar\,|l,m\rangle\,,$$
$$\boldsymbol{S}^2\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle, \qquad S_z\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle = \pm\frac{1}{2}\hbar\left|\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right\rangle,$$

が満たされる。一方で、全角運動量演算子 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$ の固有状態 $|\,J,M\,\rangle\!\rangle$ は

$$\boldsymbol{J}^2\,|\,J,M\,\rangle\!\rangle = J(J+1)\hbar^2\,|\,J,M\,\rangle\!\rangle\,, \qquad J_z\,|\,J,M\,\rangle\!\rangle = M\hbar\,|\,J,M\,\rangle\!\rangle\,,$$

を満たす。

(1) 軌道角運動量演算子 $\boldsymbol{L}$ とスピン演算子 $\boldsymbol{S}$ の固有状態 $|l,m\rangle$, $|1/2,\pm1/2\rangle$ を合成して全角運動量演算子 $\boldsymbol{J}$ の固有状態 $|\,l\pm1/2, m+1/2\,\rangle\!\rangle$ を作り、以下の式に出てくる係数 $c^{(\pm)}_{l,m}$, $d^{(\pm)}_{l,m}$ を求めなさい。

$$\left|\,l+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\,\right\rangle\!\!\right\rangle = c^{(+)}_{l,m}\;|l,m\rangle\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle + d^{(+)}_{l,m}\;|l,m+1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,$$
$$\left|\,l-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\,\right\rangle\!\!\right\rangle = c^{(-)}_{l,m}\;|l,m\rangle\left|\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\rangle + d^{(-)}_{l,m}\;|l,m+1\rangle\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,$$

(2) この物理系のハミルトニアン

$$H_0 = \frac{1}{2I}\boldsymbol{L}^2 + \xi\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$$

に対して、固有エネルギーと固有状態を求めなさい。

[2] **【スピン結合系】**

z 軸方向に一様な磁場 $\boldsymbol{B}_0=(0,0,B_0)$ 中に置かれた 2 つのスピン 1/2 を持つ粒子 A, B からなる結合系を考える。それぞれのスピンは磁場中でハミルトニアン

$$H_0 = -\gamma\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{S} = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_3$$

に従う。ただし、$S_i=\frac{\hbar}{2}\sigma_i$ である。また、2 粒子間の相互作用ハミルトニアンを

$$H_{\mathrm{int}} = \frac{\hbar\omega_{AB}}{4}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\otimes\sigma_i$$

とすると、全ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= H_0^A\otimes I + I\otimes H_0^B + H_{\mathrm{int}} \\ &= \frac{\hbar\omega_0^A}{2}\,\sigma_3\otimes I + \frac{\hbar\omega_0^B}{2}\,I\otimes\sigma_3 + \frac{\hbar\omega_{AB}}{4}\,\sum_{i=1}^{3}\sigma_i\otimes\sigma_i \end{aligned}$$

と表される。また、I は恒等演算子を表す。

(1) 角運動量演算子 $\boldsymbol{J}^2$, J_z に対して粒子 A, B のスピン固有状態をそれぞれ

$$|j=1/2, m=1/2\rangle \equiv |{\uparrow}\rangle\,, \quad |j=1/2, m=-1/2\rangle \equiv |{\downarrow}\rangle$$

と表すとき、ハミルトニアン H を基底

$$|{\uparrow}\rangle \otimes |{\uparrow}\rangle\,,\ |{\uparrow}\rangle \otimes |{\downarrow}\rangle\,,\ |{\downarrow}\rangle \otimes |{\uparrow}\rangle\,,\ |{\downarrow}\rangle \otimes |{\downarrow}\rangle$$

を用いて行列表示しなさい。

(2) エネルギー固有値を求めなさい。また、対応する固有状態を粒子 A, B のスピン固有状態で表しなさい。

[3] **【磁場中のスピンの運動】**

z 軸方向に一様な磁場 $\boldsymbol{B}_0 = (0, 0, B_0)$ 中に置かれたスピン 1/2 粒子系のハミルトニアン

$$H = -\gamma \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{S} = -\gamma B_0 S_z = \omega_0 S_z$$

を考える。ここで γ は磁気回転比、ω_0 は Larmor 周波数と呼ばれる。

(1) 初期状態 $|\psi(0)\rangle$ を

$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|{\uparrow}\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,|{\downarrow}\rangle$$

としたときに、ハミルトニアン H のもとで Schrödinger 方程式を解いて $|\psi(t)\rangle$ を求めなさい。

(2) S_x, S_y の期待値を求めることで、$|\psi(t)\rangle$ が周波数 ω_0 を持つ歳差運動を表していることを示しなさい。この現象は、Larmor 歳差運動と呼ばれる。