物理学演習 III（量子力学） No. 10 2016. 7. 5

1. 【WKB 近似 (後半)】

その場演習 No.10 (3) で求めた波動関数は古典的回帰点の近傍では近似が悪くなるが、そこから離れた所では近似は良いと考えられる。ここでは、回帰点を挟んで (3) の解がどのように接続されるかを調べる。ポテンシャルが回帰点を 1 つだけ持ち、その近傍で十分緩やかに変化して

$$V(x) = V(a) + \alpha(x-a), \qquad \alpha \equiv V'(a), \qquad V(a) = E,$$

と近似できるとき、$E > V(x)$, $E < V(x)$ のそれぞれの領域における波動関数は

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \frac{2c}{\sqrt{p(x)}} \cos\left[\frac{1}{\hbar}\int_a^x p(x')\,dx' \pm \frac{\pi}{4}\right] \\
\Psi(x) &= \frac{c}{\sqrt{\kappa(x)}} \exp\left[-\frac{1}{\hbar}\left|\int_a^x \kappa(x')\,dx'\right|\right]
\end{aligned}$$

となることを示しなさい。ここで、複号は $\alpha > 0$ の場合に $+$、$\alpha < 0$ の場合に $-$ を取るとする。

ただし、微分方程式

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} - x\Phi = 0$$

の解 $\Phi(x)$ (エアリー関数 $\mathrm{Ai}(x)$) の漸近形が

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &\approx \frac{1}{2|x|^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) \qquad (x \to +\infty) \\
\Phi(x) &\approx \frac{1}{|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad (x \to -\infty)
\end{aligned}$$

であることは導出なしに使ってもよい。

なお、これまでは $E < V(x)$ において波動関数が指数関数的に減衰する場合のみを考えた。一般的に、古典的回帰点における接続公式は以下のように与えられる。

$\alpha > 0$ の場合には

$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[2C_- \cos\left(L + \frac{\pi}{4}\right) + C_+ \sin\left(L + \frac{\pi}{4}\right)\right], \qquad (E > V) \\
\Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}}\left[C_- e^{-M} + C_+ e^{M}\right], \qquad (E < V)
\end{aligned}$$

$\alpha < 0$ の場合には

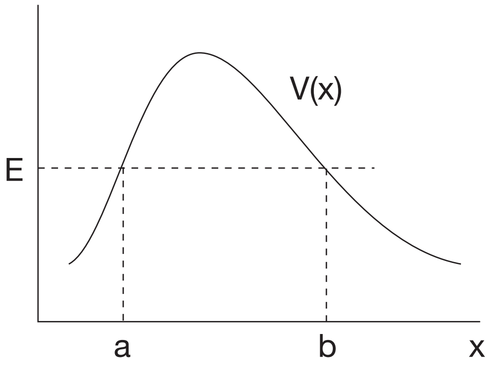
$$\begin{aligned}
\Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\left[2C_- \cos\left(L - \frac{\pi}{4}\right) - C_+ \sin\left(L - \frac{\pi}{4}\right)\right], \qquad (E > V) \\
\Psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{\kappa(x)}}\left[C_- e^{M} + C_+ e^{-M}\right], \qquad (E < V)
\end{aligned}$$

と表される。ただし、

$$L = \frac{1}{\hbar}\int_a^x p(x')\,dx', \qquad M = \frac{1}{\hbar}\int_a^x \kappa(x')\,dx'$$

とした。

2.【Gamow の透過因子】

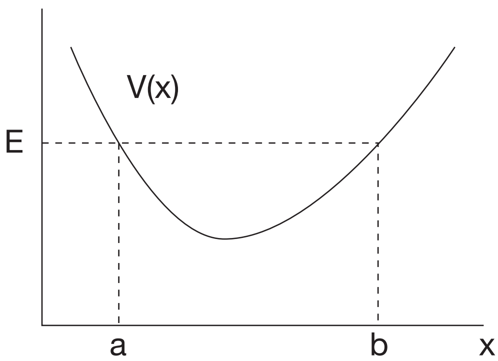


図のような緩やかなポテンシャルの山の左側 $(x < a)$ から粒子が入射されたとき、山の右側 $(x > b)$ へ粒子が透過する確率 T が、近似的に

$$T \sim \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m(V(x)-E)}\,dx\right]$$

となることを導きなさい。ただし、$x < a$ での入射波の波動関数を ψ_1, $x > b$ での透過波の波動関数を ψ_3 とするとき、透過率は $T = \frac{|\psi_3|^2 v_3}{|\psi_1|^2 v_1}$ と表される。ここで、v_1, v_3 はそれぞれの領域における粒子の速度である。また、$A = \frac{1}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m(V-E)}\,dx$ とするとき、ポテンシャルの山がある程度高くて広いとして $e^A \gg e^{-A}$ と近似して良い。

3.【WKB 法における量子化条件】



(1) 図のようなポテンシャル $V(x)$ により束縛された粒子のエネルギーが

$$\int_a^b \sqrt{2m(E-V(x))}\,dx = \pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

のように与えられることを WKB 法を用いて示しなさい。

(2) これを用いて調和振動子のエネルギーを求めてみなさい。