Seiberg-Witten 理論

物理における ——

数学における ——

この世の4つの力

重力 : 一般相対論

電磁気力 : $\boxed{\text{Maxwell}}$ U(1) 接続

'強い力' SU(3)

'弱い力' SU(2)

$\boxed{\text{Yang-Mills}}$ ゲージ理論.

Maxwell 方程式 : 19世紀半ば…

$$\mathbb{E} = (E_x, E_y, E_z)$$

$$\mathbb{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\operatorname{div} \mathbb{E} = \rho$$

$$\dot{\mathbb{E}} = \operatorname{rot} \mathbb{B} + j$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbb{B} = 0 \\ \dot{\mathbb{B}} = -\operatorname{rot} \mathbb{E} \end{cases}$$

← $\mathbb{E} \leftrightarrow \mathbb{B}$ で形が(ほぼ)変わらない。

$\boxed{\text{双対性 duality}}$

$$\mathbb{B} = \operatorname{rot} \mathbb{A}$$

$$\mathbb{E} = \operatorname{grad} \phi + \dot{\mathbb{A}}$$

とすると下の二式は自動でみたされる。

数学的には: $(\phi, \mathbb{A}) =: A$ が $U(1)$ 束の接続

ゲージ場

$(\mathbb{E}, \mathbb{B}) =: F$ その曲率

場の強さ

入れかえる操作を Hodge star $*$ という。

$$\begin{cases} d * F = 0 \\ dF = 0 \end{cases}$$

← A の二階ビブン方程式. 線形.

← $F = dA$ から自動的に従う.

(五) 自己双対方程式.

$$F = \pm * F \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{B} = \pm \mathbb{E}$$

もしこれが成立していると $\boxed{d * F} = \pm dF = 0$

一階ビブン方程式.

すなわち Maxwell 方程式を解く.

二階のビブン方程式.

超伝導体. Ginzburg-Landau 理論 1950

$$d * F = * \operatorname{Im} \bar{\phi} \, d_A \phi$$

共変ビブン

て 時空の各点で複素数が定まっているもの.

$|\phi| \neq 0$ ⇝ 超伝導

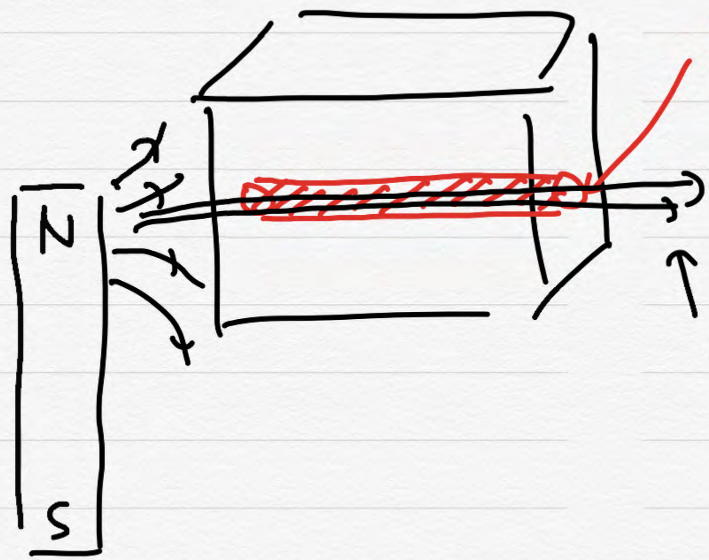
$|\phi| = 0$ ⇝ 常伝導.

電荷をもったものがウヨウヨしている.

ϕ : クーパー対の密度のようなもの.

電子のペア.

超伝導体の著しい性質：磁場を通さない。



細いチューブ状のところだけ
超伝導がやぶれて
常伝導になる。

そこそこ一定量の磁束が
通ることができる。

'弱い力'
'強い力'
} Yang-Mills 方程式（+α）で記述される。
1954

A ： N×N 行列が (A_x, A_y, A_z, A_t) と並んだもの。
SU(N) 束の接続。＝ ゲージ場

F ← その曲率 ＝ 場の強さ。
$(\mathbb{E}, \mathbb{B})$

$\mathbb{E} = (E_x \ E_y \ E_z)$
$\mathbb{B} = (B_x \ B_y \ B_z)$
N×N 行列。

Yang-Mills eq.

$$\begin{cases} D_A * F = 0 \\ D_A F = 0 \end{cases}$$

← 非線形の二階ビブン方程式.

$F = dA + [A, A]$

$D = d + [A, -]$

共変ビブン

自動的にみたされる.

(反)自己双対方程式

$*F = \pm F$ ← A の非線形一階ビブン方程式

$D*F = \pm DF = 0$ なので YM 方程式をとく.

$\boxed{\text{強い力: } N=3}$

よわい力: $N=2$

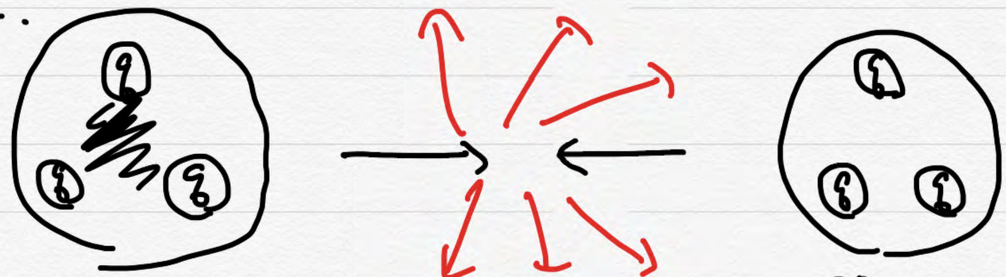
とてもむずかしい.

+ 超伝導体のように右辺に $*\Phi D_A \Phi$ の項をつけ加える.

ヒッグス入場.

この項のおかげで非常にしらべやすくなっている.

強い力



quark 単体は
でてこない...

束縛状態

ひっぱる

色電束線がしぼられる.

エネルギーがたくさんいる.

もっとひっぱる

対生成して 4つもったほうが
エネルギー的に得する.

なぜ電束線がしぼられるのか????

超伝導体では、電荷をもったクーパー対がウヨウヨしていたので磁束線がしぼられた。

モノポール

色磁荷をもったモノがウヨウヨしていれば…

色電束線をしぼるだろう。

双対 超伝導機構

dual superconductor シナリオ

1970年代ならば…

これが実際におこっていると示せるか？

現実ではないが、類似たモデルでは（紙と鉛筆での計算で）示せる。

これが物理の Seiberg-Witten 理論。 1994.

数学的には まだまだぜんぜん厳密じゃない。

理論物理屋としては OK かな。

Yang-Mills 理論を $\mathcal{N}=2$ 超対称化したもの。 Fayet 1976

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "Q_1"'] \arrow[dr, "Q_2"] & \\
\psi_1 \arrow[dr, "Q_2"'] & & \psi_2 \arrow[dl, "Q_1"] \\
 & \phi &
\end{tikzcd}
$$

A : ゲージ場

ψ_1, ψ_2 : フェルミオン場.

ϕ : スカラー場. ← 複素 2×2 行列.

SU(2) Yang-Mills

超対称性が多いほど 理論の振舞が 大人しくなる。

Q の無い 非超対称 理論 ⟷ 実解析

超対称 理論 ⟷ 複素解析.

↑

無限遠や極のふるまい から全体がわかる.

(方針) 1. $\mathcal{N}=2$ 超対称な $\begin{matrix} A \\ \boxed{\begin{matrix}\psi & \psi \\ \phi & \end{matrix}} \end{matrix}$ をよく理解する.

2. 余計なところを取りのぞいたらどうなるか調べる.

1. では ϕ が クーパー対/ヒッグス場の役目をする.

SU(2)のばあい (2×2行列のばあい)

$u := \mathrm{tr}\,\phi^2$ を考えて.

$|u| \gg 0$: 計算しやすい.

$|u| \sim 0$: むずかしい.

ここでは SU(2)ゲージ場が U(1)に破れている.

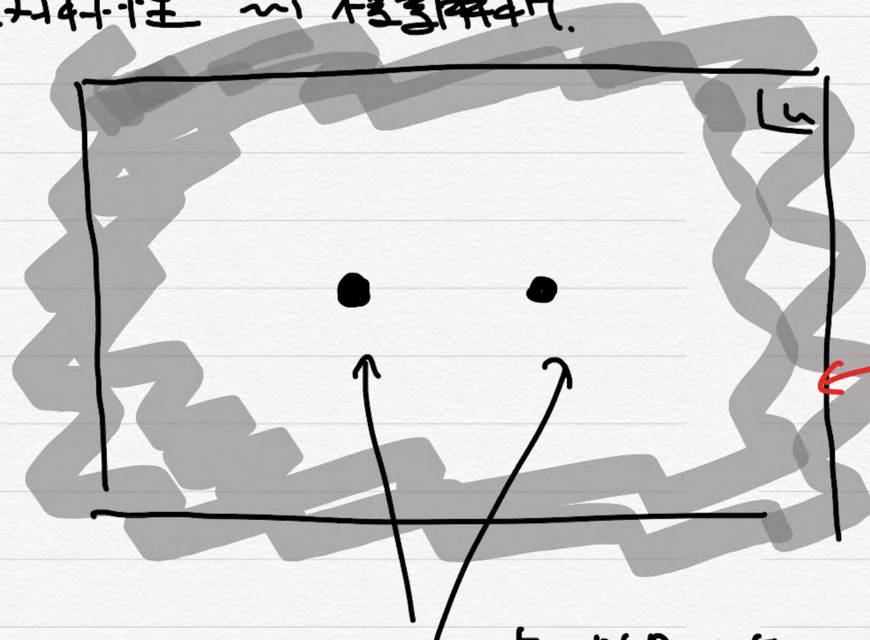
ϕ の stabilizer と交換する

U(1)にバンドルが reduce している.

't Hooft-Polyakov モノポールとから 磁荷をもった粒子が存在.

とてもとても重いので. うようよいない.

超対称性 〜 複素解析.



$u = \mathrm{tr}\,\phi^2$
… ….

モノポールが重い…

二点 特別な点 があり、そこでモノポールが
非常に軽くなり、エネルギーゼロで作れることがわかる。

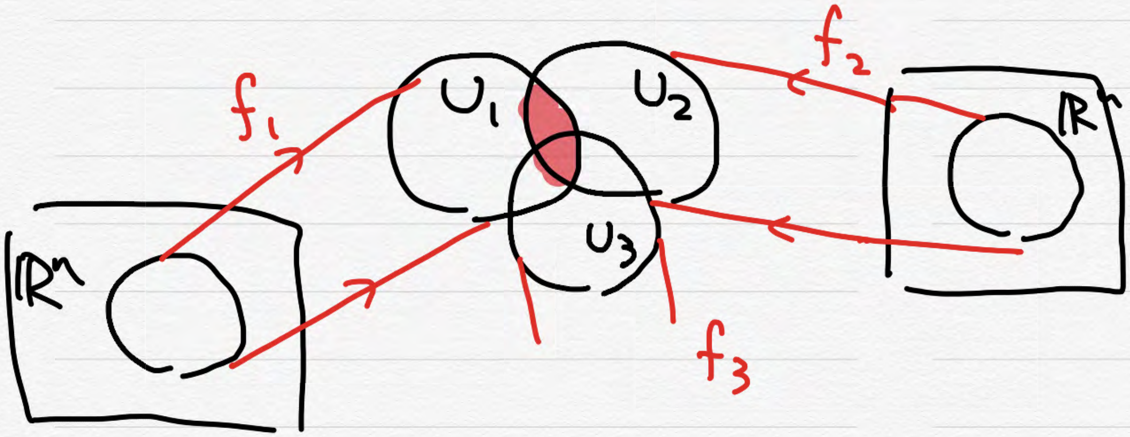
2. $\overset{A}{\boxed{\begin{matrix}\psi\ \psi\\ \phi\end{matrix}}}$ をとりのぞく. $\Rightarrow$ これの一点のみが生き残る.

さらにモノポールがウヨウヨいることもわかる.

双対超伝導が起こっている！

数学のSeiberg-Witten理論とは?

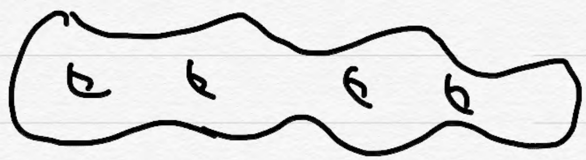
n次元多様体 M



f_i : 連続
→ 位相多様体

f_i : 滑らか
→ 微分多様体.

2次元 向きつき多様体



穴の数 g で分類される.

$H_1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$

位相 — と 微分 — の分類に違いはない.

高次元では分類に違いが出る.

$\mathbb{C}^5$内に $\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^5 = 0 \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_5|^2 = 0 \end{cases}$

7次元の微分多様体を定める。

$M \simeq S^7$ だが $M \not\cong S^7$

連続　　　　　ビブン　　　1956 Milnor

'exotic sphere'

70年代おわりには、五次元以上では かなりのことがわかっていた。

でも $\boxed{\text{4次元は特にむつかしかった。}}$

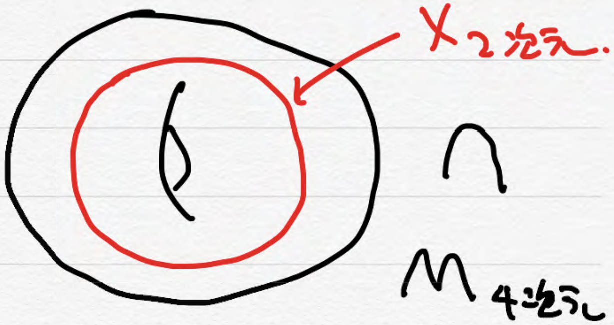
たとえば.　$M \simeq \mathbb{R}^n \longrightarrow M \simeq \mathbb{R}^n$

$n \geq 5$ なら　連続　　ビブン　　1962

じゃあ どういう 4次元多様体が あるか？

むきつき．単連結．

'穴の数' に相当するのは　$H_2(M, \mathbb{Z})/\text{torsion} \simeq \mathbb{Z}^b$



← てきせつに同値関係をいれる.

$$\Lambda := \boxed{H_2(M, \mathbb{Z}) / \text{torsion.}}$$

同じ

M上の 2-form F で
$$\boxed{\begin{cases} dF = 0 \\ d{*}F = 0 \end{cases}}$$ をみたし.

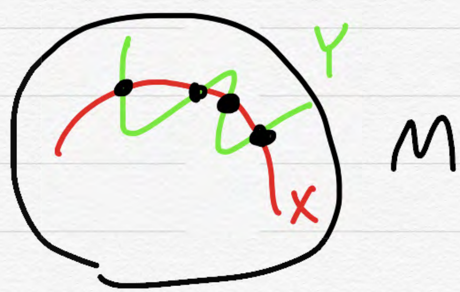
さらに $\underline{\int_{2次元部分} F \in 2\pi \mathbb{Z}}$ をみたすもの全体.

$$\Longrightarrow \boxed{H^2(M, \mathbb{Z}) / \text{torsion}}$$

$\mathbin{/\!/}$ $\mathbb{Z}^b$ ← ベッチ数.

$x, y \in \Lambda$ $\qquad$ $q(x, y) \in \mathbb{Z}$ が定まる.

x, y を 2次元部分多様体と思うと: 交点数を(むきに応じて ±1 をつけて) 数えたもの.



$x, y \in \Lambda$

$\vdots \quad \vdots$

F, F' : 2-form

$\int_M F \wedge F' \in (2\pi)^2 \mathbb{Z}$ が $g(x,y)$ を定める.

$g(x,y)$ は : $\mathbb{Z}$ 上 双線形で 対称. $g(x,y) = g(y,x)$

: unimodular

$\Lambda \simeq \mathbb{Z}^b$ 基底を $x_1 \cdots x_b$ とする.

$g_{ij} = g(x_i, x_j)$ 　行列 (g_{ij})

$\boxed{\det g_{ij} = \pm 1}$

$(\Lambda = \mathbb{Z}^b, g)$ のペア を unimodular 格子という.

g: 双線形, unimodular

どのような unimodular な格子が 4次元多様体から出てくるか?

Freedman 1982 : 勝手な (Λ, g) が 位相多様体 として
4次元
実現できる.

Donaldson 1983 : 4次元 $\boxed{\text{ビブン多様体}}$ として実現できる
(Λ, g) には強い制限がある.

例えば 全ての x に対し $g(x, x) \geqq 0$ とする.

すると $\Lambda \cong \mathbb{Z}^b$ には適切な基底 $x_1 \cdots x_b$ があって

$$g(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ゲージ理論的手法をつかった $\heartsuit$

SU(2) Yang-Mills 場を考えた. 具体的には...

M 上 SU(2) 束, その接続 A を考える. 曲率を F とする.

A: ゲージ場

F: 場の強さ.

Yang-Mills 方程式

$$\begin{cases} D*F=0 \\ DF=0 \end{cases}$$

$D*F=0$ ← A の二階のビブン方程式.

$DF=0$ ← 自動的.

より簡単な $*F=\pm F$ というのを考える. (反)自己双対 eq.

インスタントン方程式.

一階非線形ビブン方程式

$D*F=DF=0$ で YMeq も解く.

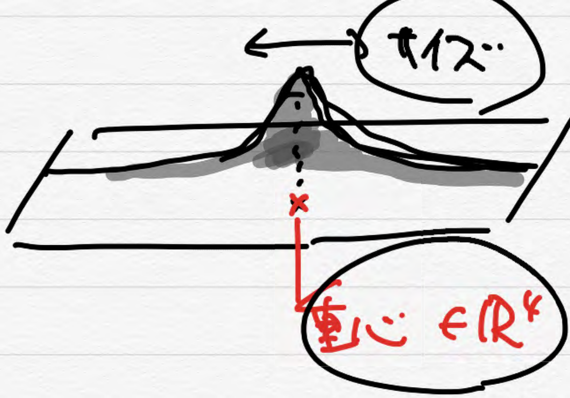
1975 ....

$$\frac{1}{8\pi^2}\int \operatorname{tr} F\wedge F \in \mathbb{Z}$$: インスタントン数

c_2

平らな $\mathbb{R}^4$ 上の $F=\pm *F$ の解は 勝手なインスタントン数で知られている.

特にこれが ±1 のときは かんたん.



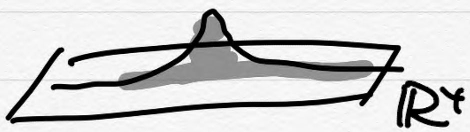
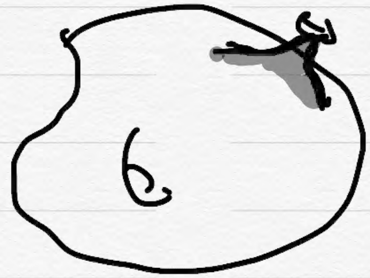
五パラメタで指定される.

いま M が $g(x,x) \geqq 0 \quad \forall x$ をみたすとする.

M 上で $F = *F$ の 1 インスタントン解の構造を考える.

$\left.\begin{array}{l} g \text{ が正定値} \\ 1\text{-instanton} \end{array}\right\} \to$ 指数定理から 解空間は 5次元.

ノンコンパクト. 特異性をもつ.

・ $\mathbb{R}^4$ を  M と埋めこむ.

Λ の元を定める

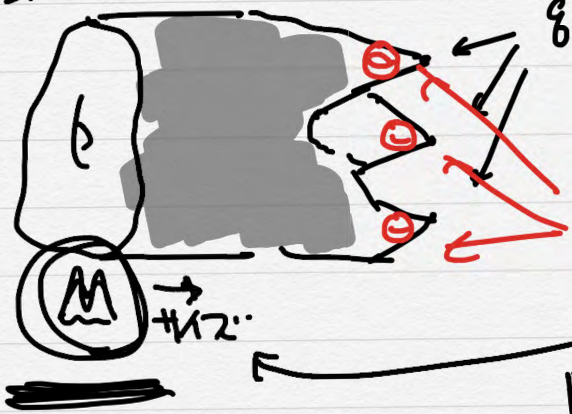
・M 上の $U(1)$ ゲージ場 (Maxwell 場) $F_{U(1)}$ に対し "$H^2(M,\mathbb{Z})/\text{torsion}$"

$U(1) \subset SU(2)$ を用いて $\begin{pmatrix} iF_{U(1)} & 0 \\ 0 & -iF_{U(1)} \end{pmatrix} =: F_{SU(2)}$

は $g(F_{U(1)}, F_{U(1)}) = 1$ ならば 1 インスタントン解になる.

この特殊解の近傍は 5次元 $\mathbb{C}P^2$ の上の錐になる.

解空間は：



$g(x,x)=1$ なる x

近くをせめると

変わらない

$\overbrace{\mathbb{C}P^2 \sqcup \mathbb{C}P^2 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{C}P^2}$

$\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$

$\in x.$ $g(x,x)=1$

同境（コボルダント）

交叉形式は

$$g(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j. \end{cases}$$

もう少しギロンすると
Mも そうである.

上の証明は 解空間の (ノンコンパクト性) を上手く使った。

一般には 困りもの.

数学のSeiberg-Witten理論：ここを改善して簡明にしたもの.

ドナルドソンは $F = \pm * F$ を考えた。

で 計量による。 → ギロンの最終結果は計量によらない。

$\int_{\text{解空間}}$ (適切な被積分関数) : ドナルドソン不変量。

これに Witten は 1988 に物理的解釈をつけた。

- $N=2$ 超対称 SU(2) Yang-Mills 理論。
- これは長さによる理論。

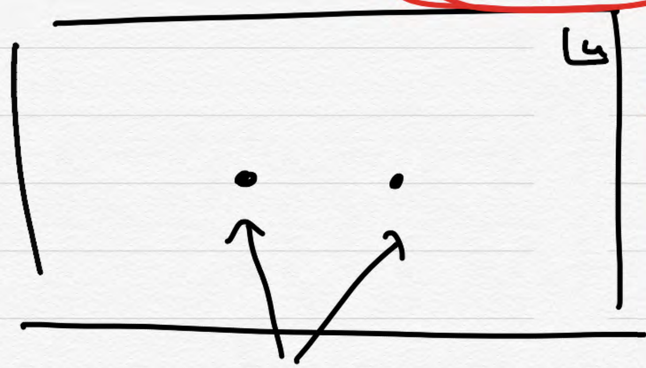
↓ トポロジカル捻り

ひねった理論は長さによらない。
ひねった理論で (うまくえらんだ) 物理量を計算すると
ドナルドソン不変量になる。

これと 1994年の物理の進展と組み合わせると...

$\mathcal{N}=2$ 超対称. SU(2) りろん.

↓ 長きょり極限



monopole が ウヨウヨ させられる点..

$u = \mathrm{tr}\,\phi^2$ という場があり、
これにより
SU(2) が U(1) に
破れていた / reduce していた。

$\mathcal{N}=2$ 超対称.
U(1) りろん
+ 磁荷をもったモノポール

だから

$\mathcal{N}=2$ な SU(2) Yang-Mills $\xrightarrow{\text{トポ捻り}}$ ドナルドソン不変量

↓ 長きょり極限   長きょり極限 ↓ || 一緒のはず…   長さによらない。

$\mathcal{N}=2$ な U(1) りろん
+ monopole $\xrightarrow{\text{トポ捻り}}$ Seiberg-Witten 不変量.

U(1) + monopole ← 磁荷.

U(1) + 電子. 電荷

F : Maxwell 場 = U(1) 接続の曲率 (正しくは spin$_c$ 接続)

φ : M上 U(1) 接続とスピン構造に伴う複素二次元束の切断として

$$\boxed{\begin{aligned} D\phi &= 0 \\ *F &= -F + \langle \bar{\Phi}\, \phi \rangle \end{aligned}}$$

適切な二次形式をつかう.

S-W のモノポール方程式.

- 一階ビブン方程式
  ちょっと非線形.
- 解空間はコンパクト

ドナルドソン よりずいぶん簡単.

これを調べて多様体を調べるのが

数学の Seiberg-Witten 理論.

応用. 2次元多様体  三角形分割できる.

Q 勝手な高次元多様体が 三角形分割できるか？

微分多様体… ok.

位相多様体… ???

Matsumoto 1978 - Galewski-Stern 1980

3次元にある性質をもった多様体が

ある → 5次元以上. いつでも三角形分割をもつ.

ない → 5次元以上. 三角形分割できないものが… 各次元に存在.

4次元で Seiberg-Witten 方程式のふるまいを 調べることにより.

Manolescu 2013

こちらだと示した。

1994 Seiberg–Witten.

物理の S.W 理論

数学の SW. 理論.

独立に発展.

更なる交流???