Seiberg-Witten 理論について

数学の } S.W. りろんの 2つがある。
物理の

↑僕の専門．こちらから．

この世の4つの力．

重力 - - - - - - - -
電磁気力 ← Maxwell りろん ← ココからはじめる　U(1) 接続
"弱い力" } Yang-Mills りろん．　SU(2) 接続．
"強い力"　SU(3)

Maxwell 方程式

19世紀

$\mathbb{E} = (E_x, E_y, E_z)$: 電場

$\mathbb{B} = (B_x, B_y, B_z)$: 磁場

電荷も磁荷も無い所では

$\mathrm{div}\,\mathbb{E} = 0 \quad + \rho$

$\dot{\mathbb{E}} = \mathrm{rot}\,\mathbb{B} \quad + j$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{div}\,\mathbb{B} &= 0 \\ \dot{\mathbb{B}} &= -\mathrm{rot}\,\mathbb{E} \end{aligned}}$$

← $\mathbb{E} \leftrightarrow \mathbb{B}$ の入れ換えで形がかわらない． 双対性 duality

普通は電荷のみがある．

$$\begin{cases} \mathbb{B} = \mathrm{rot}\,\mathbb{A} \\ -\mathbb{E} = \mathrm{grad}\,\phi + \dot{\mathbb{A}} \end{cases}$$

によって　は自動的にとける．

数学的には　$(\phi, \mathbb{A}) =: A$　U(1) 束の接続．＝ゲージ場

$(\mathbb{E}, \mathbb{B}) =: F$　その曲率　というもの．

$\mathbb{E} \leftrightarrow \mathbb{B}$ を入れかえる操作は

$*$: Hodge star と言う。

Aの非自明な
非線形二階のビブン方程式

Maxwell 方程式 :

$$d * F = 0 \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\mathbb{E} = 0 \\ \dot{\mathbb{E}} = \mathrm{rot}\,\mathbb{B} \end{array}}$$

$$dF = 0 \rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathrm{div}\,\mathbb{B} = 0 \\ \dot{\mathbb{B}} = -\mathrm{rot}\,\mathbb{E} \end{array}}$$

F を A で書いておくと
自動的

自己双対方程式

$$F = *F$$

反自己

$$F = -*F$$

$\Big\} \to d*F = dF = 0$

$\Uparrow$

A の一階ビブン方程式。扱い易い。

超伝導体 モノをとても冷やすと抵抗ゼロ。

Ginzburg-Landau 理論 1950

$$d * F = * \mathrm{Im}\, \overline{\phi}\, d_A \phi$$

時空の各点で複素数が定まったもの。

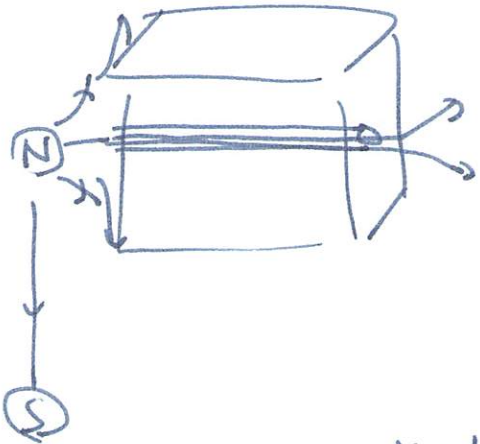
$|\phi| \neq 0$ の所: 超伝導

$|\phi| = 0$ の所: 常伝導。

電荷をもったものがウヨウヨいる。

ϕ : $\underbrace{\text{クーパー対}}_{\text{電子のペア}}$ の密度のようなもの。

超伝導の著しい性質:
磁場を通さない.



細いチューブ状の所だけ超伝導が破れ常伝導になりそこに一定量の磁束を通す
という性質がある.

'弱い力' : 放射性物質のβ崩壊

'強い力' : クォークを核子に閉じこめている力.

両者ともYang-Mills方程式(+α)で記述される.
1954

非線形二階.

強い力
$$\begin{cases} D_A * F_A = 0 \\ D_A F_A = 0 \end{cases}$$

自動的に成り立つ.

A: SU(3)バンドルの接続 = ゲージ場

F_A: その曲率 $= dA + [A, A]$

$D_A = d + [A, -]$

局所的には
3×3エルミート行列 値のものが4つあって
(A_t, A_x, A_y, A_z)
となっている.

色電荷
色磁荷
という.

弱い力: SU(2)バンドルにする.

これのせいで随分物理がかわる.

+ (超伝導体のように)
右辺に $*\Phi d_A \Phi$ の項をつけ加える.

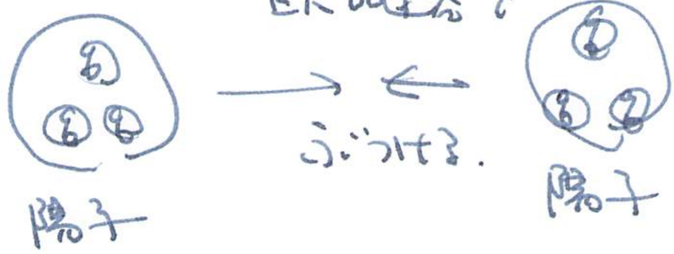
ヒッグス場.

$\pm F = *F$: (反)自己双対方程式.
$D*F = DF = 0$.
一階非線形ビブン方程式
インスタントンeq.ともいう.

Belavin-Polyakov-Schwarz-Tyupkin
1975

強い力

巨大加速器で



1975

中身が飛び散るが。quark単体はでてこない。「閉じ込め」

中間子

束縛状態。　ひっぱる　色電束線がしぼられる。エネルギーが溜っている。

ちぎれ

クォーク反クォーク対をつくったほうがエネルギーが低くなる。

なぜ電束線がしぼられるのか？

超伝導体では 電荷をもった クーパー対がウヨウヨいたので 磁束線がしぼられた。

色磁荷をもったモノポールがウヨウヨいれば 色電束線がしぼられるはず。

双対超伝導機構 仮説
dual superconductor　1974〜1975

これが実際起こっていることを示せるか？

現実の強い力ではとてもとてもむずかしい。

現実ではないがかなり似たモデルでは
（数学者は納得しないが物理屋にはOKな程度に）
紙と鉛筆で示せる。

それが物理のSeiberg-Witten理論。 1994
Yang-Mills Fayet 1976

これはN=2超対称化した~~強い力~~の理論を考えるもの

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "Q_1"'] \arrow[dr, squiggly, "Q_2"] & \\ \psi_1 \arrow[dr, squiggly, "Q_2"'] & \cdots & \psi_2 \arrow[dl, "Q_1"] \\ & \phi & \end{tikzcd}$$

A : ゲージ場 = 接続。

フェルミオン場 → ψ_1

複素スカラー場 → ϕ
（Higgsのなかま。）

Q_1 : ひとつ目の超対称性

Q_2 : ふたつ目の ——

Q_1のみあるようなものは
素粒子の標準模型の
拡張として有望視されていた。

Q_2もいれると現実とは全然あわない。

でも　Qの数が多いほど理論は調べやすい。

Qが無い　非超対称なりろん ⟷ 実解析

Qがある　超対称なりろん ⟷ 複素解析。

?

無限遠や極のふるまいで
全体がわかる。

$\boxed{\text{方針}}$ ① $N=2$ 超対称な $\boxed{\begin{array}{c} A \\ \psi \ \psi \\ \phi \end{array}}$ のりろんを良く理解する。

② 　　を取り除く。

① においては: ϕ がクーパーペアの役をする。

まず $SU(2)$ (ϕ は 2×2 ~~[illegible]~~ 行列) のばあいを考える。

$u := \mathrm{tr}\,\phi^2$ とする。 $|u| \gg 0$: 計算しやすい。

$|u| \sim 0$: むつかしい。

この領域では、$SU(2)$ は (ϕ の stabilizer と交換する) $U(1)$ に (破れている / reduce している)

↳ 't Hooft-Polyakov モノポールという $U(1)$ の磁荷をもったソリトンが存在する。

とてもとても重いので、ウヨウヨいない。

超対称性 ⇒ 複素解析 なので、

遠方での状況がわかる

⇓

内部でも状況がわかる。

特に 二点 特別な点があり、モノポールがそこでは エネルギーゼロで作れることがわかる。

② $\psi\ \tilde{\psi}$ を取りのぞくと、上記二点のうち一点だけ残り、

さらにモノポールがウヨウヨあるようになることがわかる。

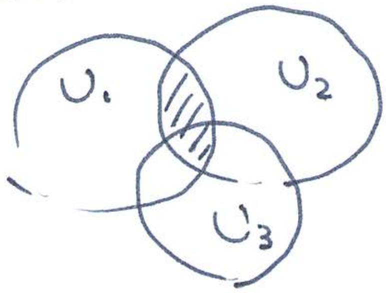
⟹ 双対超伝導!

これをもっと詳細にしたり、拡張したりするのが
物理の Seiberg-Witten りろんである。(僕の専門)

では 数学の Seiberg-Witten りろん とは何か?

8/24

n次元多様体:

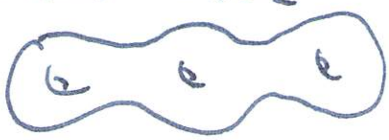


$f_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ 達を貼ったもの。

f_i: 連続 → 位相多様体

f_i: 滑らか → 微分多様体

2次元 (向きつき) 多様体の分類:



'穴の数' g でわかる。

(コ)ホモロジー群

$$H_1(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$$

位相と微分で違いはない。

高次元では違いが出る。

$\mathbb{C}^5$ 内に式
$$\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^5 = 0 \\ |z_1|^2 + \cdots + |z_5|^2 = 0 \end{cases}$$
で定まる7次元多様体 M を考えると

$$M \underset{\text{位相}}{\simeq} S^7 \quad \text{だが} \quad M \underset{\text{ビブン}}{\not\simeq} S^7.$$

'exotic sphere' 1956 Milnor

でもこういう状況は 5次元以上では 70年代おわりには
よくわかっていた。

$$M \underset{\text{位相}}{\simeq} \mathbb{R}^n \quad \text{なら} \quad M \underset{\text{ビブン}}{\simeq} \mathbb{R}^n \quad (n \geq 5).$$

1962 Stallings

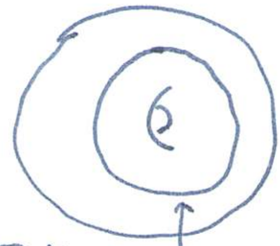
でも 4次元は 特にむずかしかった。

どういう4次元多様体があるか？

簡単のため むきつき閉単連結とする.

'穴の数' に相当するのは

$\Lambda := H_2(M, \mathbb{Z})/\text{torsion} \simeq \mathbb{Z}^b$



M : 4次

このようなものに適切に同値関係をいれる. ⋯→ $X \subset M$ 2次元

$\updownarrow$ 同じ

$H^2(M, \mathbb{Z})/\text{torsion}$

$\uparrow$ M上 2-form F で

$dF = 0$
$d{*}F = 0$ をみたし (Maxwell方程式)

さらに $\int_X F \in 2\pi\mathbb{Z}$ をみたすもの全体.
(Dirac量子化条件)

$x, y \in \Lambda$ に対して $g(x, y) \in \mathbb{Z}$ が定まる.

2次元部分多様体 $X, Y \subset M$ と思った時は, 交点 $X \cap Y$ の数をむきつきで数えたもの.

2-form F, F' と思った時は

$$\int_M F \wedge F' \in (2\pi)^2\mathbb{Z}.$$

- $\mathbb{Z}$上 双線形で 対称 $g(x, y) = g(y, x)$.
- かつ unimodular.

($\Lambda \simeq \mathbb{Z}^b$ の基底 $x_{1 \ldots b}$ をとったとき
行列 (g_{ij}) $g_{ij} = g(x_i, x_j)$
の行列式が ± 1).

このような (Λ, g) を unimodular 格子という.

どのような unimodular 格子が 4次元多様体から来るか？

Freedman: 勝手な (Λ, g) が 4次元位相多様体として実現できる。
1982

Donaldson: 4次元微分多様体として実現できる (Λ, g) には強い制限がある。
1983

例えば: $g(x, x) \geq 0$ for all x ならば…
適切な $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^6$ の基底 $x_1 \cdots x_6$ があって
$$g(x_i, x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

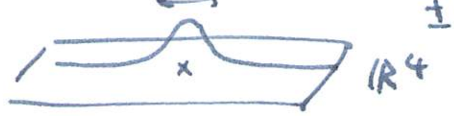
これは ゲージ理論 をつかって示された。具体的には…

M 上 $SU(2)$ Yang-Mills 場 $=$ $SU(2)$ バンドルの接続 A を考える。
曲率 $=$ 場の強さ を F とする。

YM 方程式: $D{*}F = 0$ ← A の二階のビブン方程式.
$DF = 0$ ← 自動的に成立.

$F = \pm {*}F$ という式を考える. A の一階の非線形ビブン方程式.
$D{*}F = \pm DF = 0$ より YM 方程式も解く.
(反)自己双対方程式
インスタントン 1975 という. $\frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\, F \wedge F \in \mathbb{Z}$ を 物理屋はインスタントン数 数学では c_2 という.

平らな $\mathbb{R}^4$ 上の $F = \pm {*}F$ の解は具体的に知られている.
±1 インスタントン



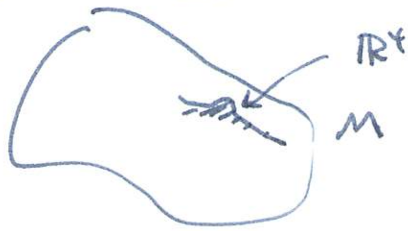
重心 $\in \mathbb{R}^4$ とサイズ の 五パラメタ で指定される.

いま M が $g(x, x) \geq 0$ $\forall x$ とする.

M 上で $F = + {*}F$ の 1インスタントン解 の構造を考える.

g が 正定値, 1インスタントン $\Big\}$ 解空間は実5次元, が 指数定理より従う.

解空間には特異性があり，ノンコンパクトである。



$\mathbb{R}^4$上の非常に小さいインスタントン解を Mのある点にうめこんだもの

Mの点 × サイズ でパラメタ．

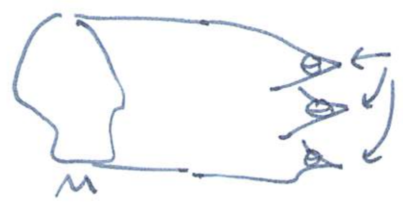
また，M上の U(1) ゲージ場 F で $g(F,F)=1$ をみたすものは

$U(1)\subset SU(2)$ を用いて $\begin{pmatrix} iF & \\ & -iF \end{pmatrix} =: F_{SU(2)}$

とうめこめば SU(2)の 1-instanton になる。

この点の近傍は $\mathbb{CP}^2$ の上の錐になる。

よって解空間は



⇝ Mと $\underbrace{\mathbb{CP}^2\cup\cdots\cup\mathbb{CP}^2}$ は大体同じ．（コボルダント）

これの交叉形式は $g(x_i,x_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

⇝ あと少しがんばると M自体がその交叉形式である。//

Freedman と Donaldson の結果をあわせると，

$M \underset{位相}{\simeq} \mathbb{R}^4$ だが $M \underset{ビブン}{\not\simeq} \mathbb{R}^4$ なるものも作れる。

上の証明は解空間のノンコンパクト性を上手く使ったが，

一般的にはノンコンパクト性は困りものである。

この点が改善されたのが（数学の）Seiberg-Witten 理論。

ドナルドソンは $F=\pm *F$ を考えた。　少し仮定をおけば…

計量による。 ⇒ 最終結果は計量によらない。

$\int_{解空間}$（適切な被積分関数）をドナルドソン不変量という。

これに Witten は物理的解釈をつけた。

N=2 超対称 SU(2) Yang-Mills は計量による。

↓ トポロジカル捻り。

・ひねった理論は計量によらない。

・ひねった理論で(うまくえらんだ)物理量を計算すると ド不変量そのものになる。

しかしこの時点では 物理にも 数学にも 御利益は無かった。

物理の Seiberg-Witten 理論によれば、

N=2 超対称 SU(2) Yang-Mills ← ϕ という $su(2)_{\mathbb{C}}$ に値をとる場があった。

↓ 低エネルギー=長距離極限

N=2 超対称 U(1) ゲージ理論
+ monopole

$u = \mathrm{tr}\,\phi^2$ とした。

monopole が massless。
ウヨウヨいさせられる。

組み合わせると

N=2 超対称 SU(2) $\xrightarrow{\text{トポ捻り}}$ ド不変量

↓ 長距離 すなわち 計量を定数倍

長距離極限 ↓ しかしどうせ計量に依存しないので等価なはず。

N=2 超対称 U(1)
+ モノポール $\xrightarrow{\text{トポ捻り}}$ S.W. 不変量

⇑

これはどんな方程式から出てくるか??

U(1) + monopole と言っても磁荷だけなので

電場と磁場をとりかえれば…

U(1) + 電子 と方程式は同じ。 トポ捻り後は

F を Maxwell 場 = U(1) 接続 (正確には spin_c)

A の曲率として

Φ を M 上の U(1) 接続と spin 接続から定まる

複素二次元束の切断として

$$\boxed{\begin{cases} D_A \Phi = 0 \\ F + *F = \langle \bar{\Phi} \Phi \rangle \end{cases}}$$

適切な2次形式

… (*) Seiberg-Witten のモノポール方程式

というものになる。 ・F は可換接続

・解空間はコンパクト

などの理由から ドナルドソンによる SU(2) 反自己

方程式の解析よりはるかに簡単になった。〜> 大発展

数学的には上記の背景を無視して (*) から出発しても

特に問題はない。物理的にも (*) に直接意味はなくもない。

(SU(2) Yang-Mills 方程式の簡易版が…

インスタントン方程式。

超伝導体を記述する Abelian-Higgs モデルの方程式の

簡易版がモノポール方程式。)

S.W. 方程式の応用はたくさんある。例えば:

二次元多様体は三角形分割できる

△ の拡張

勝手な高次元多様体も単体分割できるか?

微分多様体 … できる。

位相多様体 … ???

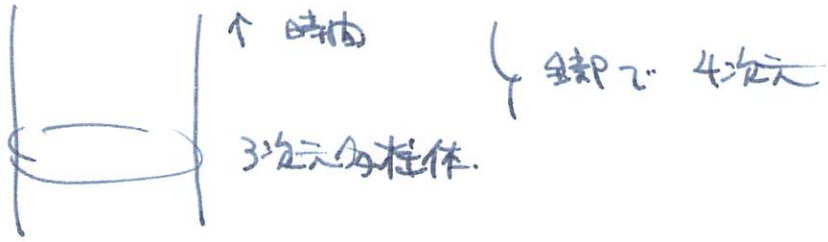
Galewski-Stern (1980) - Matsumoto (1978) によって

5次元以上で いつでも三角形分割できる / 三角形分割できない位相多様体が 各次元に存在する

⟺ 3次元に ある特定の性質をもった多様体が 存在する / 存在しない

が示されていたが、Manolescu はそのような3次元多様体は

存在しないことを S.W. モノポール方程式を



という状況で考えることによって示した。2013

⇒ 五次元以上では一般には

三角形分割はできない。

―――・―――・―――・―――

1994年以降の

物理 / 数学 の Seiberg-Witten 理論の

発展は おおむね独立していた。(初期の Moore et al. や Nekrasov 分配関数に関するものを除く)

また交流をすることで どちらも得ることがあるのでは??