特殊相対(性理)論

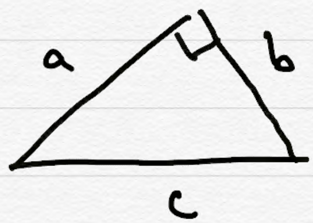
第三回

special relativity.

平らな時空(spacetime)の幾何.

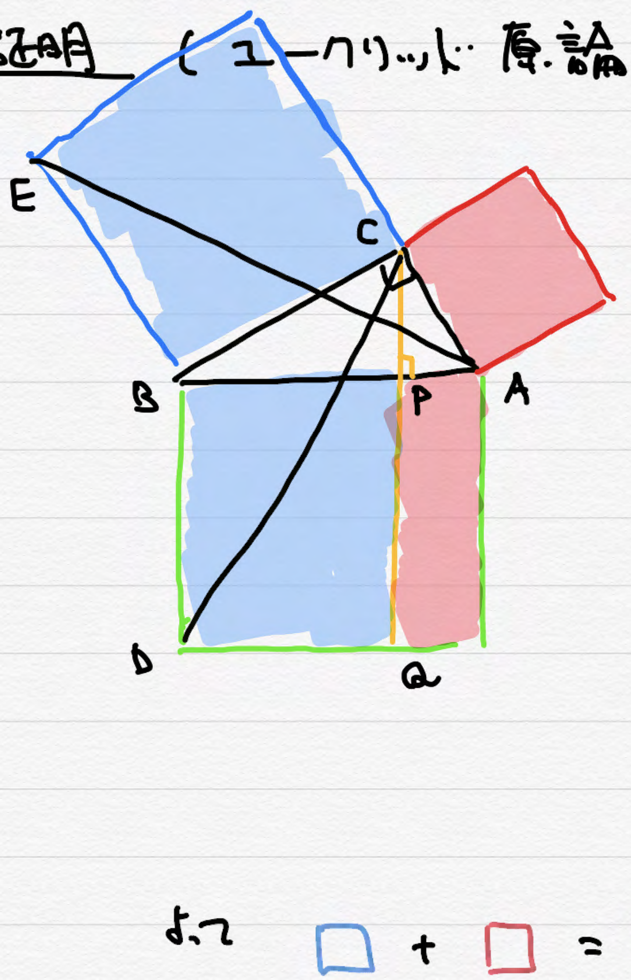
まず、平らな空間の幾何の復習からはじめる.

ピタゴラスの$\boxed{\text{定理}}$



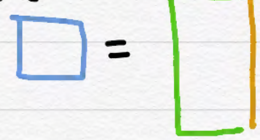
$$a^2+b^2=c^2$$

証明 (ユークリッド原論一巻のおしまいの定理.)

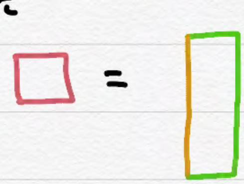


△ABE と
△DBC は合同.

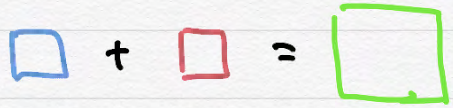
よって



また



よって



QED

(ちなみに原論は13巻まで. 正二十面体をしらべておわる.)

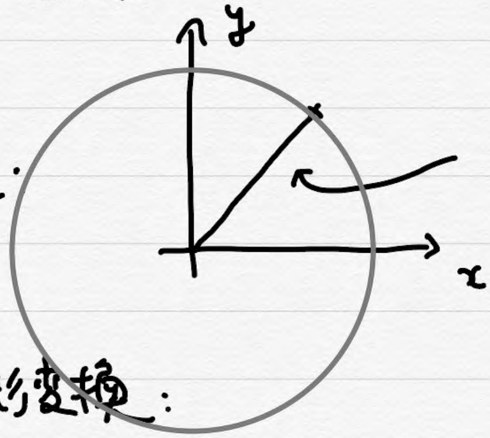
・長さ、角度 などの 概念、

・回転 のもとで 長さ／角度 は 保たれる などという 事実　} から出発

・「2つの辺が等しく はさむ角が等しい 三角形は合同」

座標幾何では：

長さ：



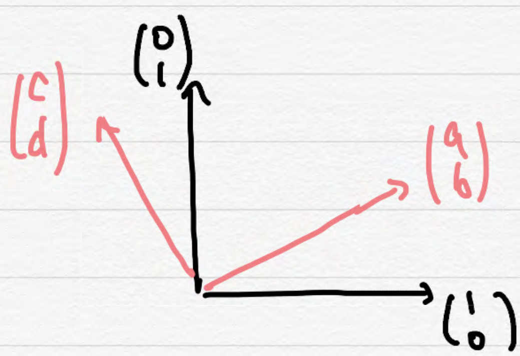
$r^2 = x^2 + y^2$ と <u>定義</u>

線形変換：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}y$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}y = \begin{pmatrix}ax+cy\\bx+dy\end{pmatrix}$$



回転とは 長さを保つ線形変換である。と <u>定義</u>

$$(x')^2 + (y')^2 = (a^2+b^2)x^2 + 2(ac+bd)xy + (c^2+d^2)y^2$$

より
$$\begin{cases} a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1 \\ ac+bd = 0. \end{cases}$$

三角関数をもちいて

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とパラメタ付けるのが便利である.

これを角θの回転と定義.

角θの回転＋角φの回転はどうなるか？

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos\theta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\cos\theta + \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}\sin\varphi$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) \\ \sin(\theta+\varphi) \end{pmatrix}.$$

同様に

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \quad \longmapsto \begin{pmatrix} -\sin(\theta+\varphi) \\ \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix}$$

角θ+φの回転になる。

（以上の計算においてはcos, sin等は
ユークリッド幾何ではなく
解析で定義したものだとしておくのが一貫している）

$$\boxed{\text{初等キカ}} \underset{\text{等価}}{=} \boxed{\text{座標キカ}}$$

ここまでは イデアの世界である.
現実/物理 との関係は?

・身の回りのかたいものには確かに 固有の長さ,角度
がある(ように見え,実際 測定してみるとそうである.)

⇨ 初等幾何 = 座標幾何 からの
論理的帰結は身の回りのかたいものに
あてはまる。

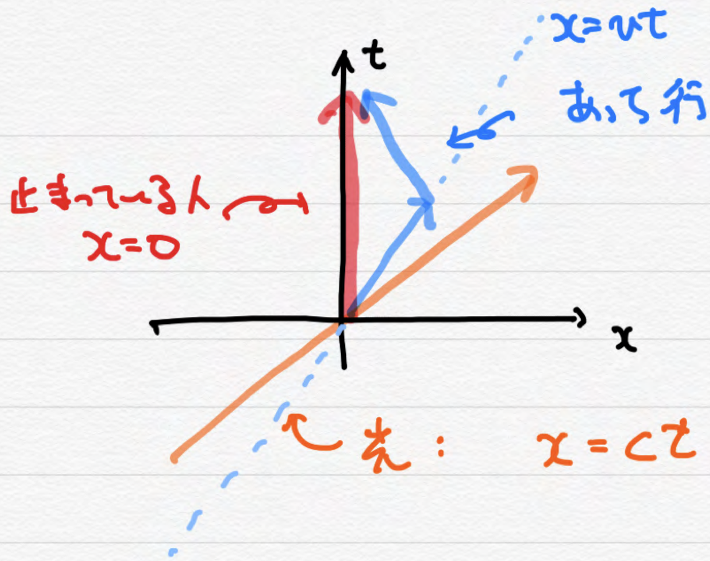
・「かたいもの を回転させても長さが かわらない」
というのは 実は 不思議なことである.(?)

―― ・ ―― ・ ―― ・ ―― ・ ―― ・ ――

平らな時空 の 力学 … 特殊 相対論 ← まずは こっち.
曲った 〃 … 一般

これまでと同様, ① 初等力学的アプローチ と
② 座標力学的 ―― がある.

よくある教科書は ① が多い気がする.
今回は 講義時間の関係上 はじめから ② でやる.



cf. 鉄道のダイヤ.

ラテン語 confer の略. 'くらべよ' の意.

ここで $c = 299792458$ m/s.

誤差は全くない. 定義.

原点 $(0,0)$ と 時空点 (t,x) について

$(ct)^2 - x^2 > 0$ なら

$(c\tau)^2 := (ct)^2 - x^2$ として

τ を固有時間 (proper time)

$(ct)^2 - x^2 < 0$ なら

$x_0^2 := x^2 - (ct)^2$ として

x_0 を固有長さ (proper length)

と言う.

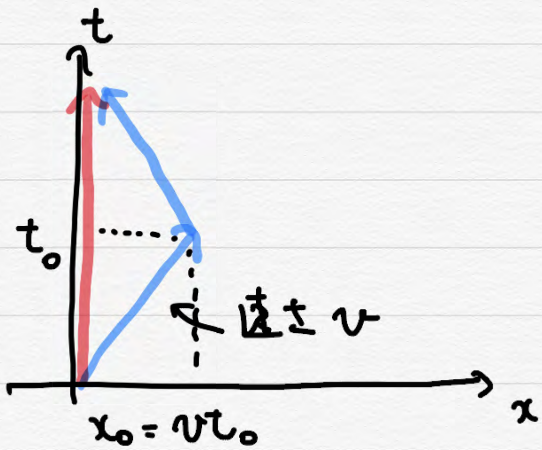
ローレンツ変換とは $(ct)^2 - x^2$ を保つ

線形な座標変換のこと.

	平面幾何	特殊相対論
大切なもの	$+x^2+y^2$	$+(ct)^2-x^2$
それを保つ変換	回転	ローレンツ変換

cがあらわれるのは t と x の単位が…
伝統的に [s] と [m] で異なるから.
$t' := ct$ と定めて時間も [m] で測れば…
単に t^2-x^2 で、平面幾何とは符号が…
ちがうだけ.

影響:



かかった時間

赤: $2t_0$

青: $2\tau_0$, $\tau_0 = \sqrt{t_0^2 - \frac{x_0^2}{c^2}} = t_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$$\fallingdotseq t_0 - \left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot t_0$$

すこし短い!

例えば：

東京から大阪まで ~400 km を
新幹線 ~200 km/h で往復。

片道に ~2 h ~ $7\cdot10^3$ s かかって

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{200\,\mathrm{km}/3600\,\mathrm{s}}{3\cdot10^8\,\mathrm{m/s}}\right)^2$$

$\sim 2\cdot10^{-14}$ のわりあいだけ短い。

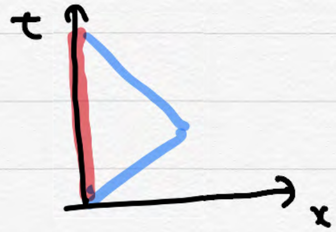
⇒ 往復した人は $3\cdot10^{-10}$ s ~ 0.3 ns ぐらい若い。

CPU のクロック：3 GHz (10^9) … 一周期が 0.3 ns ぐらい。
測りれなくはないはず。

東京 ↔ ニューヨーク を飛行機で往復すると
20 ns ぐらいあるはず。
(実は同経度の一般相対論補正がある。
後述。)

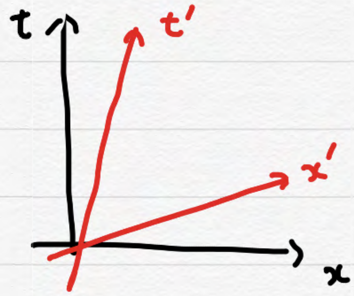
Rb 原子時計を持ち込んで実測されている。
五月祭でやってみよう???

- しばしば双子のパラドックスといわれるが



赤と青は対等ではないので
パラドックスでは無い。

ロ－レンツ変換



$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2$$

を要求.

$$(ct - x)(ct + x) = (ct' - x')(ct' + x')$$

だから、何か実数 η があって

$$\begin{cases} ct' + x' = e^{\eta}(ct + x) \\ ct' - x' = e^{-\eta}(ct - x) \end{cases}$$

とかける.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2} & \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} \\ \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} & \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \\ \sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

である.

これが ロ－レンツ変換.

$$\left[\begin{array}{l} (\cosh \eta)^2 - (\sinh \eta)^2 = 1. \\ \begin{cases} \cosh(\eta + \xi) = \cosh \eta \cosh \xi + \sinh \eta \sinh \xi \\ \sinh(\eta + \xi) = \sinh \eta \cosh \xi + \cosh \eta \sinh \xi \end{cases} \end{array} \text{をみたす.} \right]$$

$\boxed{\text{パラメタ } \eta}$ の ロ－レンツ変換

\+

$\boxed{\text{パラメタ } \xi}$ の ＿＿＿＿ ← ラピディティ という.

= パラメタ $\eta + \xi$ の ロ－レンツ変換.

回転も実は同様にできる.

$$x^2+y^2=(x')^2+(y')^2$$

を

$$(x+iy)(x-iy)=(x'+iy')(x'-iy')$$

と書くと

$$\left.\begin{aligned} x'+iy' &= \bullet\,(x+iy) \\ x'-iy' &= \bullet^{-1}(x-iy) \end{aligned}\right\} \text{複素共役}$$

よって $\overline{\bullet}=\bullet^{-1}$, よって $\bullet\,\overline{\bullet}=1$.

よって $\bullet=\cos\theta+i\sin\theta$ のはず….

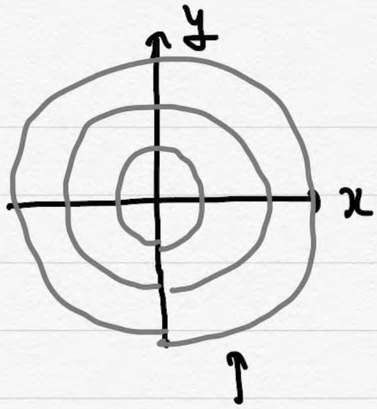
$$=: e^{i\theta}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} & -\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \\ \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} & \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

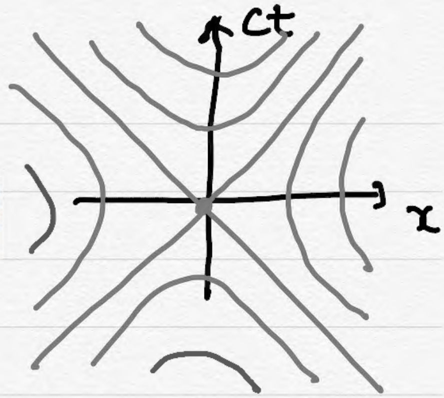
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

これを角 θ の回転, と定義する.

まとめると:



x^2+y^2 一定



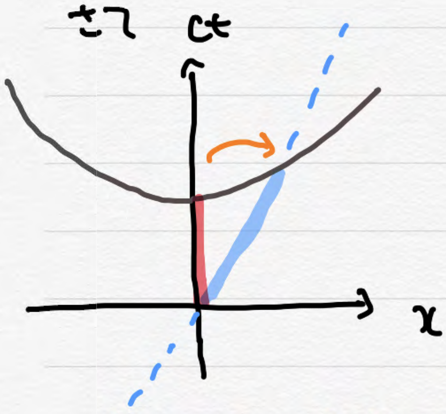
$(ct)^2-x^2$ 一定.

$$x'+iy' = e^{i\theta}(x+iy) \qquad ct'+x' = e^{\eta}(ct+x)$$
$$x'-iy' = e^{-i\theta}(x-iy) \qquad ct'-x' = e^{-\eta}(ct-x)$$

三角関数 $\sin$, $\cos$, $\tan$ ⟷ 双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$.

特殊相対論には（数学的には）ユークリッド幾何以上に不思議なことは何もない！ i を使わないぶんマシとも言える.

さて



$x = vt = \left(\frac{v}{c}\right) ct$

ローレンツ変換で $\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} \cosh\eta \\ \sinh\eta \end{pmatrix}$ になったとする.

$$\frac{v}{c} = \tanh\eta = \frac{\sinh\eta}{\cosh\eta}$$

で定まる相対速度をもつ座標系への変換である.

$$\cosh\eta = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad \sinh\eta = \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

である.

$$\text{Aさん} \xrightarrow[\substack{\text{速度}\\ v}]{\text{相対}} \text{Bさん} \xrightarrow[\substack{\text{速度}\\ w}]{\text{相対}} \text{Cさん}$$

合成 相対速度は？

$$v/c = \tanh \eta \qquad \frac{w}{c} = \tanh \xi$$

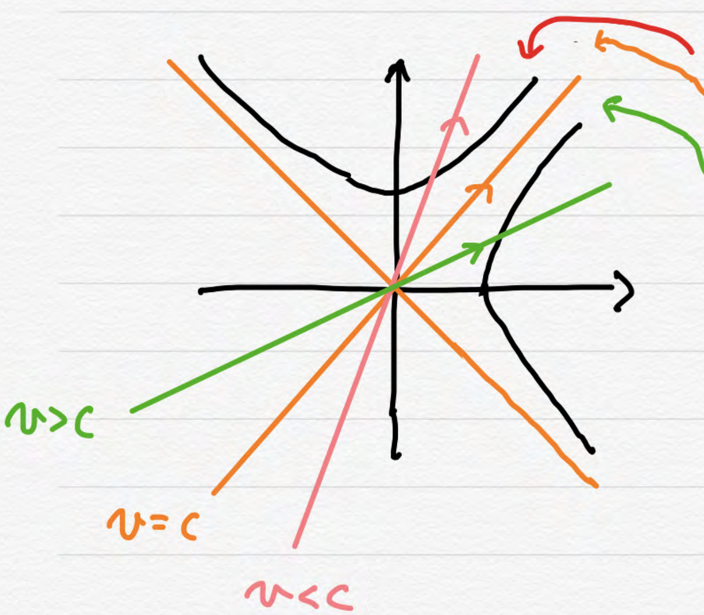
$$\frac{\text{合成速度}}{c} = \tanh(\eta + \xi)$$

$$= \frac{\tanh \eta + \tanh \xi}{1 + \tanh \eta \tanh \xi}$$

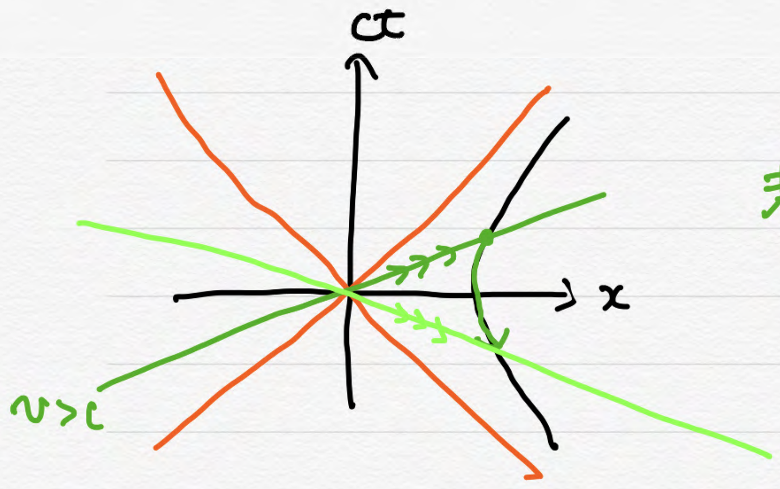
$$= \frac{(v+w)/c}{1 + vw/c^2} \text{。}$$

$\tanh \eta < 1$ だから $\frac{v}{c} < 1$.

⇨ $v > c$ なる相対速度の座標系にはうつれない。



無理に $v > c$ なる速度を考えるとどうなるか？



未来に進んでいるものが…

カコに進んでいるものに

ローレンツ変換されてしまう.

⇝ 因果律をやぶる.

2011年に OPERA 実験 (ジュネーブでつくった
ニュートリノを Gran Sasso (イタリア) で受けて.
どう変化したかを調べるのがその目的) が
おどろきの発表をした:

$\frac{731\,\mathrm{km}}{c}$ よりも 70 ns ほど速く到着している!
$\sim 2.5\,\mathrm{ms}$

⇨ 一年間のチェックの結果, 2点の時刻を
あわせるために使っている GPS から測定機への
ケーブルのコネクタがすこし緩んでいたことが
わかった。
けっきょく問題はなかった。

この episode からもわかるように,
近年では特殊相対論/光速度一定は
非常によく検証されている. だから

現在ではそもそも「メートル」は「秒」が既に定義されているとして、光速が厳密に

$$c = 299792458 \ \mathrm{m/s}$$

となる、として定められている。

「秒」の定義は量子力学の所で後述

—— · —— · —— · —— · ——

m：質量として

$$m\begin{pmatrix}\cosh\eta\\ \sinh\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m/\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \\ \dfrac{mv/c}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}\end{pmatrix}$$

を考える。

v/c で展開してはじめの数項のみとると

高校でならった運動エネルギー

$$= \begin{pmatrix} m + \boxed{\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}/c^2 + \cdots \\ \boxed{mv}/c + \cdots \end{pmatrix}$$

高校でならった運動量。

相対論的には上記の

相対論的エネルギー

$$m\begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\left(v/c\right)^2} \\ \dfrac{v/c}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c^2 \\ p/c \end{pmatrix}$$

相対論的運動量

が各種保存則にあらわれる。

特に $v=0$ のとき $E=mc^2$.

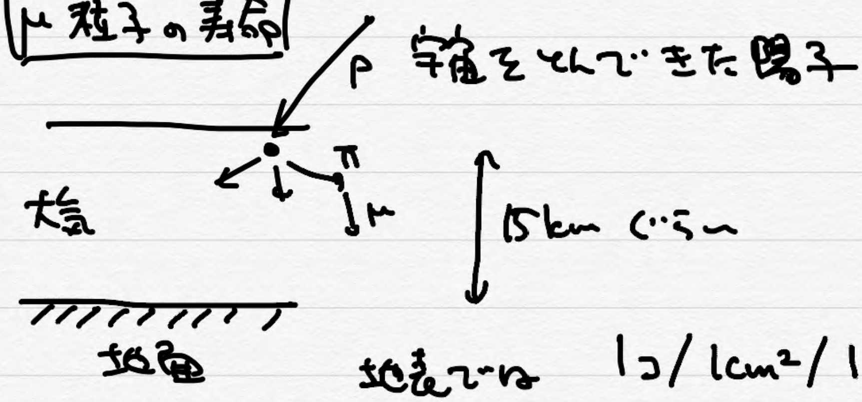
$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} =: m_* c^2$$ とむりやり書いて

速くなると m_* が大きくなる,

と通俗解説書に(よく)ある気がするが…

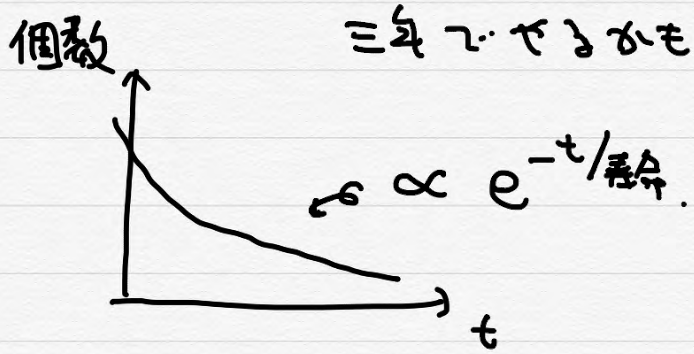
あまり使わない.

$\boxed{\text{μ粒子の寿命}}$



地表では 1コ/1cm²/1分 ぐらい.

霧箱でみるのも容易. 物理学科なら三年でやるかも.



寿命 : 2.2 μs.

光速で走っても $2\mu s \times c \sim 600$ m なので

地表まで届きそうにない.

どうなっているか？

μ の質量は　$m_\mu c^2 \sim 100\ \mathrm{MeV}$

↑
電子1つを1V動かして
得られるエネルギーが
1eV.

上空では強烈なエネルギーでつくられるので

相対論的エネルギーが　4 GeV ぐらいになっている.

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \sim 4\ \mathrm{GeV}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \sim \frac{1}{40}. \qquad \left(1-\frac{v}{c} \sim \frac{1}{800}\right)$$

同じファクターで時間が遅く流れる.

⇝ 40倍ぐらい i.e. 24 km ぐらいとぶ.

地上まで到達.