$\boxed{\text{これまでのあらすじ}}$

ブラックホール解

$$\begin{cases} ds^2 = -\left(1-\dfrac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + \dfrac{1}{1-\dfrac{r_s}{r}}dr^2 \\ \qquad + r^2\left(d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2\right) \\ r_s = \dfrac{2GM}{c^2} \end{cases}$$

は $r=r_s$ にホライズン（地平面）を持つ.

表面重力 $\kappa = \dfrac{GM}{r_s^2}$

表面積 $A = 4\pi r_s^2$

より一般のブラックホール解のばあい.

は

$$dE = \frac{c^2}{8\pi G}\kappa dA + \Omega dJ + \Phi dQ$$

をみたす.

$$\updownarrow$$

熱力学第一法則

$$dE = TdS + \Omega dJ + \Phi dQ$$

ホーキングによるとブラックホールは

$$\begin{cases} T = \dfrac{\hbar}{k_B \cdot 2\pi c}\kappa & \text{温度} \\ S = \dfrac{k_B c^3}{4\hbar G}A & \text{エントロピー} \end{cases}$$

なる温度、エントロピーを持つ.

これについてもう少し詳しく見よう.

・まず T について: 一般に

$$ds^2 = -F(r)\,c^2dt^2 + \frac{1}{F(r)}dr^2 + \cdots$$

で $F(r_s)=0$ のとき

$$\kappa = \frac{c^2}{2}F'(r_s)$$ だった.

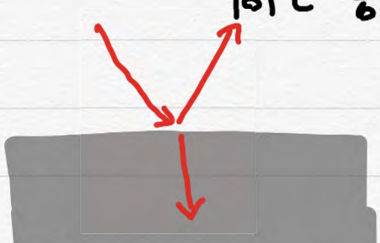
r_s 近傍の時空の計量のみで決まっている.

※ $$T = \frac{\hbar}{k_B \cdot 2\pi c}\kappa$$ 量子効果であることを示す.

重力自体は量子化しなくても, 与えられた古典的な時空の上で量子化された電磁場などを考えればでる.

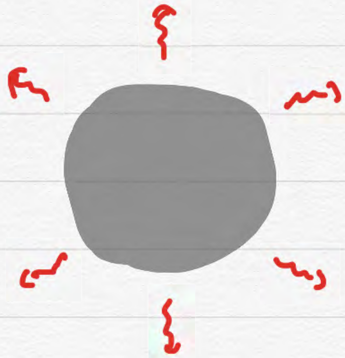
前回 上式※は非常に形式的な導出をした。
もともとの Hawking の計算はもっと物理的.
波の量子的な伝播をごく普通に計算するだけ
(だが計算はややこしい.)

電磁場が媒質中を飛ぶばあい.
境界面で反射/屈折するのと
同じ計算.



「媒質」がブラックホール時空なだけ。

更に今、BHからはHawking輻射が出てくる.



エネルギー保存から、BHのエネルギー=質量はすこしずつ減るはず. 徐々に温度があがり、最後は爆発.

(現実には宇宙背景放射の温度より低いので蒸発しないが……)

黒体輻射だとすると面積あたり時間あたりの放射エネルギーはシュテファン・ボルツマン則より

$$\sigma T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3}$$

よって $$\frac{d(Mc^2)}{dt} = -\sigma T^4 \cdot 4\pi A$$

$T \propto M^{-1}$
$A \propto M^2$
$\Downarrow$
$d(M^3) \propto dt$.

$$t_{蒸発} = \frac{5120\pi}{c^4 \hbar} G^2 M^3 .$$

$M_{太陽} \sim 2 \times 10^{30}$ kg を入れると

$t_{蒸発} \sim 2 \times 10^{67}$ 年. (宇宙の年齢 ~ 140億年)

....

次に B.H. のエントロピー

$$S = \frac{k_B c^3}{G_N \hbar} \frac{A}{4}$$

について. G_N, $\hbar$ があらわれることから

わかるように, これは重力の量子効果である.

まず一般にエントロピーとは?

熱力学では

$$dE = \underbrace{熱}_{\substack{\| \\ TdS}} + 仕事$$

可逆なときは

統計力学では: 巨視的には同じに見えても

微視的には異なる状態は沢山ある.

a 番目の状態のエネルギーを E_a として

実現確率 $\propto e^{-E_a/k_B T}$: カノニカル分布.

比例定数を Z^{-1} とすると

$$1 = \sum_a \boxed{\frac{1}{Z} e^{-E_a/k_B T}} =: p_a$$

より

$$Z = \sum_a e^{-E_a/k_B T}$$: 分配関数.

一般に確率分布 $\{p_a\}$ に対してその微視的エントロピーを

$$S = k_B \sum_a -p_a \log p_a$$ で定める.

カノニカル分布において
平均エネルギーは

$$E := \sum_a E_a \frac{1}{Z} e^{-E_a/k_B T}$$

微視的エントロピーは

$$S := k_B \sum_a \left(\frac{E_a}{k_B T} - \log Z \right) \frac{1}{Z} e^{-E_a/k_B T}$$

$$= \left(\sum_a \frac{E_a}{T} \cdot \frac{1}{Z} e^{-E_a/k_B T} \right) - k_B \log Z .$$

すると
$$E - TS = -k_B T \log Z$$ である.

T を固定して $E_a \to E_a + \delta E_a$ とすると

$$\delta E - T\delta S = \boxed{\sum_a \delta E_a \cdot \frac{1}{Z} e^{-E_a/kT}}$$

状態 a のエネルギー変化　　p_a すなわち状態 a の確率

仕事の期待値.

⇝ $\delta E = T\delta S +$ 仕事.　となり
熱力学を再現.

⇝ 熱力学的エントロピー
= カノニカル分布の微視的エントロピー.

N 状態あるとすると $S=k\sum_a -p_a \log p_a$

は $p_a=\frac{1}{N}$ が全ての a で成立するとき最大.

($x\log x$ は上に凸なので $p, q \Rightarrow \frac{p+q}{2}, \frac{p+q}{2}$ におきかえると大きくなる.)

そのとき $S = k_B \log N$. エントロピー ～ log 状態数.

カノニカル分布 $p_a \propto e^{-E_a/kT}$

は エネルギー期待値を きめた中で

エントロピー $k\sum -p_a \log p_a$

を最大にする.

実際. $\sum p_a = 1$

$\sum p_a E_a =$ 決まった値 を保つには

$\sum \delta p_a = 0$ ①, $\sum (\delta p_a) E_a = 0$ ② が必要.

$\delta\left(\sum -p_a \log p_a\right) = \sum -\delta p_a \log p_a$ が

①② をみたす勝手な δp_a でゼロ

⇝ $\log p_a = \square E_a + \square$.

⇝ 何か T に対し $p_a \propto e^{-E_a/kT}$

⇝ 熱力学的エントロピー

= 平均エネルギーを固定した上での微視的エントロピー

= 平均エネルギーを固定した上での log 状態数.

ブラックホールの場合

$$S = \frac{k_B c^3}{G_N \hbar} \frac{A}{4}$$

$$= k_B \log \text{状態数} = k_B (\log 2)(\text{ビット数})$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{4 G_N \hbar}{c^3 \log 2} \text{ あたり } 1 \text{ ビット}}$

すなわち $\dfrac{32 G_N \hbar}{c^3 \log 2} \sim (1.1 \times 10^{-34} m)^2$ あたり 1 byte

トンでもない情報量 / 状態数.

10 g の BH ~ 500 Gbyte ぐらい.

ちなみに、数係数 $\dfrac{4}{\log 2}$ を除いては 上式 $\boxed{}$ は

不思議ではない。① 状態数は無次元.

② 表面積に比例. ③ 重力の相対論的量子効果

G_N c $\hbar$

とすると G_N, c, $\hbar$ から $(長さ)^2$ の次元を

作らざるを得ない.

プランク長さ: $\sqrt{\dfrac{G_N \hbar}{c^3}} = 1.6 \times 10^{-35}$ m

プランク時間: $\sqrt{\dfrac{G_N \hbar}{c^5}} = 5.4 \times 10^{-44}$ s

しかしプランク質量

$$\sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 21\ \mu g.$$

何故か日常的な大きさ。???

閑話休題.

$$S = \frac{kc^3}{G_N \hbar}\frac{A}{4}$$ は とんでもなく大きい

と言ったが . ほかのもののエントロピーと比較しないと意味がないですね。

黒体輻射のエネルギー密度 : $\frac{4\sigma}{c}T^4$

エントロピー密度 : $\frac{16}{3}\frac{\sigma}{c}T^3$

半径 R の球状の輻射のかたまり :

$$Mc^2 = E = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{4\sigma}{c}T^4.$$

$$S = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{16}{3}\frac{\sigma}{c}T^3$$

BH につぶすとエントロピーは

$$S_{BH} = \frac{kc^3}{G_N\hbar}\frac{4\pi}{4}\left(\frac{2G_N M}{c^2}\right)^2$$

T, R を太陽の値にとると

$$\frac{S_{BH}}{S} \sim 10^{10}$$

ぐらい??

この状態数はどこからくるのか?

途方もない

・古典重力解としては

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_S}{r}\right)(cdt)^2 + \frac{1}{1-\frac{r_S}{r}}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2\right)$$

という 1つだけ である.

・表面積に比例する というのも変である.

(通常エントロピーは体積に比例する.)

・重力が量子化されれば説明されるはずである.

ここまでのまとめ

$$T = \frac{\hbar}{k_B \cdot 2\pi c}\cdot\kappa$$: 曲がった時空での (重力でない, 電磁場等の) 場の量子論の計算で導出可能.

$$S = \frac{k_B c^3}{G_N \hbar}\frac{A}{4}$$: 重力自体の量子化がなされれば導出されるだろう.

・重力は量子化されないといけないか??

・どういう量子化がありうるか??

重力は量子化されないといけないか？

・物理屋が～ら～ン十年時間を費やしてもできない。
実験的検証はとても難しそう。
やらなくてもいいのでは？

・重力は古典的 + 他は量子的、でもいいのでは？
↑
そうはいかないと思われている。

① ブラックホールがある系での熱力学第2法則は

全エントロピー $\boxed{\dfrac{k_B c^3}{G_N \hbar}\dfrac{A}{4} + \text{物質のエントロピー}}$ が増大

と思われている。重力が量子化されず、

$\dfrac{k_B c^3}{G_N \hbar}\dfrac{A}{4}$ が熱統計力学的エントロピーとは

関係ないとすると、物質をブラックホールに捨てる

操作は不可逆なのにエントロピーを減らす。

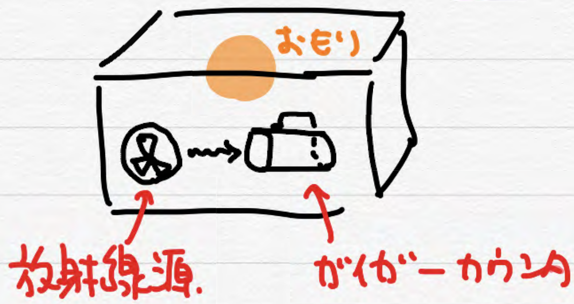
⟶ 第二種永久機関がつくれる？？？

（論文が出版されていてもいいはずだと
思ったが、パッとさがした限りでは見当らない。
検索エンジンが覚えたのか、宣伝で「永久
機関をつくった」というのが出てくるようになったが…）

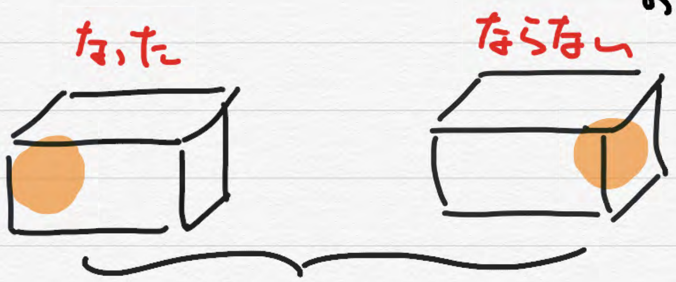
② 重力だけ量子化されていないとすると、量子力学の重ねあわせの原理に関し変なことがいろいろできる。

Page-Geilker, "Indirect Evidence for Quantum Gravity" PRL 47 (1981) 979 の考察.

シュレーディンガーの~~猫~~おもり

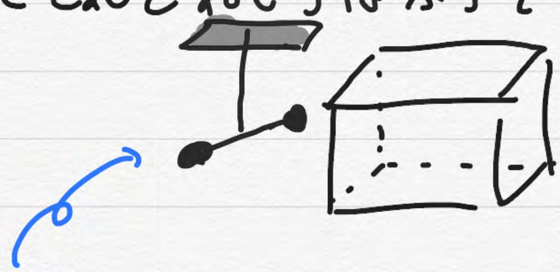


ある決めた時間内にガイガーカウンタが放射線を計測するかしないかで、おもりの場所をかえる。



重ね合わせのはず。

さてこれをねじりばかりではかる。



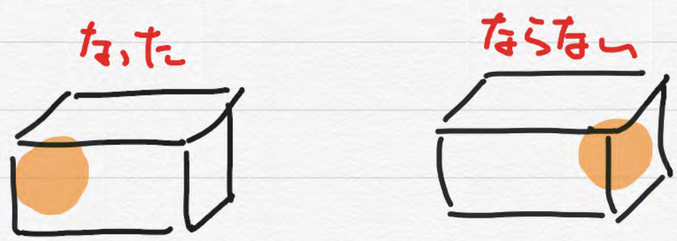
重力によるおもりどうしの力をねじれとして測定。

エトヴェシュによる $\frac{m_{重力}}{m_{慣性}}$ の測定で使われた。

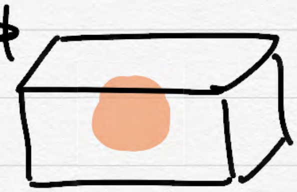
重力は重ね合せ中のおもりの
どちらの位置に対して働くのだろうか???

重力が古典的だとしても、それを決めるルールが
必要。上記論文では、
※「平均位置に対して重力がはたらく」
という安直なルールがナンセンスなことを示した。
しばしば理論的考察で使われていた。

もし※だとすると、

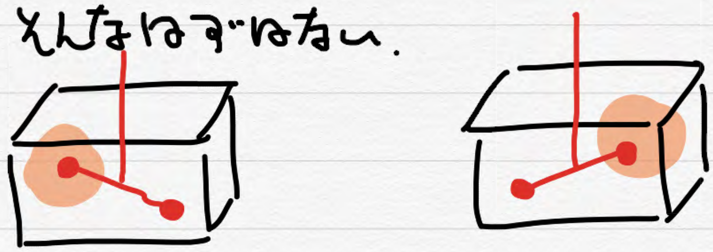


の平均は真ん中



である。

→ ねじりばかりは回らない、ということになるが
そんなはずはない。



となるはず。

Page-Geiklerでは実際に実験をやったと主張しているが
ほんまか?

・重力を量子化するとすると，どうするか？

ゲージ場 電磁場，強い力，弱い力 に使える

標準的な場の量子論の枠組みがある。

次元	1	2	3	4	5	6	…
ゲージ場	○	○	○	○	×	×	…
重力場	○	○	△	×	×	×	…

3+1 次元以上では
うまくいかない。
くりこみ不可能性 と呼ばれる。

現時点での主流：

- 弦理論
- ループ量子重力

$\boxed{\text{ループ量子重力}}$

・3+1 次元で途中までは普通に重力場を量子化する。

・途中で計量からアシュテカ変数というものに
変数変換する。

・ブラックホールのエントロピーはある意味
自然に出る（ほぼ構成から．面積に比例した
状態数がある）が．比例係数が任意．

$$S = \frac{k_B c^3}{G_N \hbar} \cdot \bullet \cdot A$$

1/4 が導出できない．

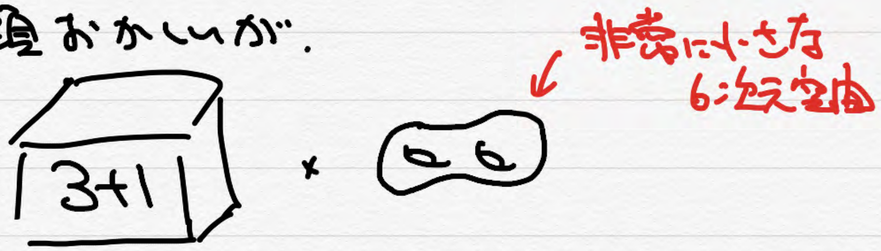
弦理論

もともと、メソン（というクォーク・反クォークの束縛状態）が
相対論的弦の量子化でわかるのではないか？
という所から始まった。

閉弦もどうしても必要。
閉弦の励起のひとつが重力であることが
気付かれた。（米谷, Scherk, Schwarz）
⟹ 棚ぼた式に量子重力が得られた。

でも
- 時空は9+1次元でないといけない。
- 重力だけはダメ、他のもついてくる

頭おかしいが、



と思うと素粒子の標準模型をある程度
説明できる。

超対称ブラックホールという特定のクラスのブラックホールに対しては

$$S = \frac{k_B c^3}{G_N \hbar} \frac{1}{4} \cdot A$$

が係数 $\frac{1}{4}$ も含めて出る。

対応する量子力学系が書き下せて、普通に統計力学をするだけ。

面積に比例すること、や、係数 $\frac{1}{4}$ はすぐに出てこず、計算の最後でわかる。

シュバルツシルト解では導出できていない。

ループ量子重力

弦理論

どっちが有望かは趣味の問題。

（現代数学との関連は弦理論が断然多い。僕の興味はそのあたり。）