ブラックホールの情報問題

の前に

量子力学におけるエントロピー

の前に

量子力学における状態とは？

{ 純粋状態
{ 混合状態

I. 純粋状態は、複素長さつきベクトル空間の元である。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$$

$$|長さ|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_N|^2$$

II. 時間発展は、このベクトル空間の長さを保つ線形変換である。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_N' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

$N \times N$ 行列。

III. 物理量はエルミート行列 X であらわされ、

$$\overline{X_{ij}} = X_{ji}$$

状態 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ での期待値は

$$\langle X\rangle_{\vec a}=\frac{\overline{\vec a}^T X\vec a}{\overline{\vec a}^T\vec a}=\frac{\overline{(a_1\cdots a_N)}\,X\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_N\end{pmatrix}}{\overline{(a_1\cdots a_N)}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_N\end{pmatrix}}\quad (\#)$$

であらわされる。 $c\neq 0$ を複素数として

$\langle X\rangle_{c\vec a}=\langle X\rangle_{\vec a}$ なので…

$c\vec a\sim\vec a$ と同一視し、$|\vec a|=1$ ととるのが標準的。

例 $N=2$ とする。物理量 $X_{ij}=\overline{X_{ji}}$ は

二状態系 qubit

$$\begin{pmatrix}c+z & x-iy\\ x+iy & c-z\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$$

なので、4つ線形独立な物理量

$$\mathbb{1}:=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \sigma_z:=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ \sigma_x:=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$$

がある。

上記公式 (#) から $\mathbb{1}$ の期待値はいつも1. 自明.

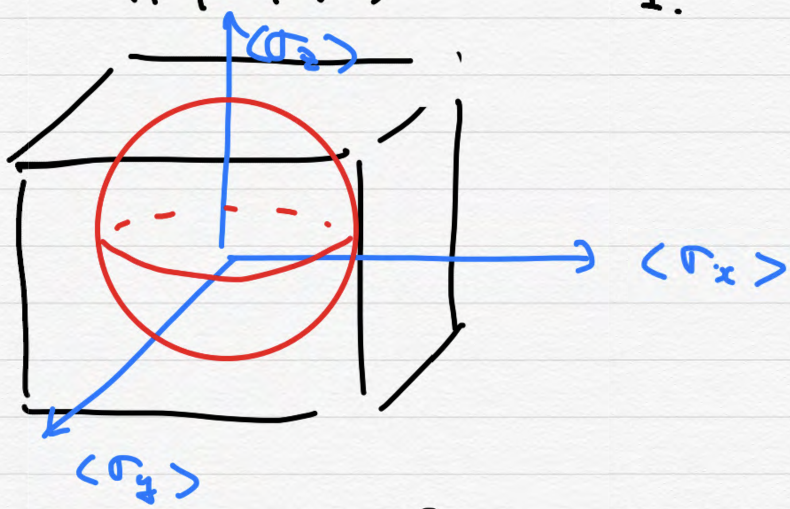
σ_x, σ_y, σ_z にかんしては

$\vec a=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ として $|a|^2+|b|^2=1$ としておく.

$$\langle\sigma_z\rangle=|a|^2-|b|^2,\quad \langle\sigma_x\rangle=\overline{a}b+a\overline{b}=2\,\mathrm{Re}\,a\overline{b}$$

$$\langle\sigma_y\rangle=-i\overline{a}b+ia\overline{b}=2\,\mathrm{Im}\,a\overline{b}$$ なので…

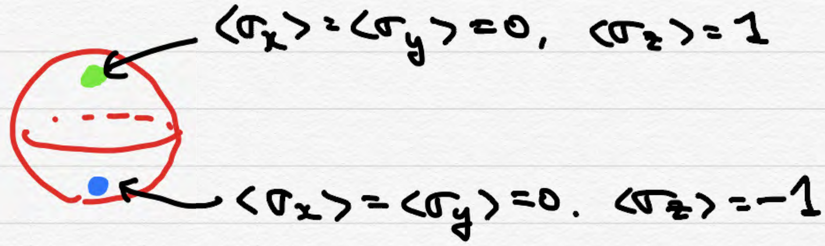
$$\langle\sigma_x\rangle^2 + \langle\sigma_y\rangle^2 + \langle\sigma_z\rangle^2$$
$$= \left(|a|^2 - |b|^2\right)^2 + 4|a\bar{b}|^2$$
$$= \left(|a|^2 + |b|^2\right)^2 \qquad = 1.$$



$\sigma_{x.y.z}$: パウリ行列. 「スピンの x. y. z 成分」
純粋状態 : 球面にのる.

混合状態 : 純粋状態を統計的にまぜたもの.

たとえば…

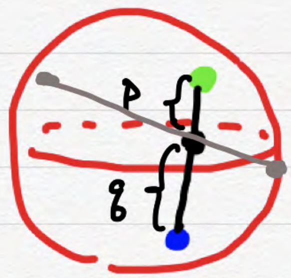


を 1:1 でまぜれば…

$$\langle\sigma_x\rangle = \langle\sigma_y\rangle = \langle\sigma_z\rangle = 0$$

なる混合状態になる.

一般に



● と ● を q:p でまぜると $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の期待値は左図のようになる.

⇒ 球の中の勝手な点が混合状態として実現可能.

純粋状態への分解は一意でない.

数学的には: $\vec{a}$ での期待値は $|\vec{a}|=1$ として

$$\langle X\rangle_{\vec{a}} = \vec{a}^T X \vec{a}$$

$$= \mathrm{tr}\,\underbrace{(\vec{a}\vec{a}^T)}_{a_i\bar{a_j}\text{ を成分とする行列}} X$$

$\mathrm{tr}\, M = \sum M_{ii}$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ を $p:(1-p)$ でまぜると

$$\langle X\rangle = p\langle X\rangle_{\vec{a}} + (1-p)\langle X\rangle_{\vec{b}}$$

$$= \mathrm{tr}\Big[\underbrace{p(\vec{a}\vec{a}^T) + (1-p)(\vec{b}\vec{b}^T)}_{\rho\text{ と書く.}}\Big] X.$$

一般に $\vec{a_1} \cdots \vec{a_k}$ を $p_1, \cdots, p_k$ のわりあいでまぜると

密度行列 → $$\rho = \sum_{u=1}^{k} p_u \left(\vec{a_u}\,\vec{a_u}^T\right).$$

$\sum p_i = 1.$

エルミート行列.

このエントロピーを $k_B \sum -p_u \log p_u$ と定めたい。

しかしこれは良くない。なぜなら

$$\rho = \vec{a}\,\vec{a}^T = \frac{1}{2}\vec{a}\,\vec{a}^T + \frac{1}{2}\vec{a}\,\vec{a}^T$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$S = 0 \qquad\qquad s = k_B \log 2 \quad ??$$

分解に条件をつけないといけない。

一般に $N \times N$ の エルミート行列 $M_{ij} = \overline{M_{ji}}$

は $$M = \sum_{u=1}^{N} m_u \vec{a}_u \vec{a}_u^T$$

但し $|\vec{a}_u| = 1$, $\vec{a}_u \perp \vec{a}_v$ $(u \neq v)$ とかける。

密度行列も

$$\rho = \sum_{u=1}^{N} p_u \vec{a}_u \vec{a}_u^T$$

と分解できる。 $\boxed{\text{但し} \quad \vec{a}_u \perp \vec{a}_v}$. $0 \leq p_u \leq 1$.

この条件を課すとほぼ一意。

純粋状態: $p_u = 1$ (ひとつの u で)

$p_v = 0$ $(u \neq v)$

だと真裏側の二点に分割することに対応。

量子状態のエントロピーの定義:

$\boxed{\text{上記のように分解した上で}}$

$$S = k_B \sum_u -p_u \log p_u .$$

全ての可能な分解の中で最小。

実際、$u \neq v$ で $\vec{a_u}$ と $\vec{a_v}$ が直交していないとする。$p_u \geq p_v$ としてよい。

$$p_u \vec{a_u}\vec{a_u}^T + p_v \vec{a_v}\vec{a_v}^T$$

を $\vec{a_u}$, $\vec{a_v}$ で張られる2次元部分空間内で対角化して

$$= p_u' \vec{a_u}' \vec{a_u}'^T + p_v' \vec{a_v}' \vec{a_v}'^T, \quad \vec{a_u} \perp \vec{a_v}'$$

とできる。$p_u' \geq p_v'$ としてよい。

両辺の trace から $\quad p_u + p_v = p_u' + p_v'$ …(甲)

両辺の2乗の trace から $\quad p_u^2 + 2|\vec{a_u}^T\vec{a_v}|^2 p_u p_v + p_v^2$
$= (p_u')^2 + (p_v')^2$ …(乙)

(甲)^2 − (乙)^2 より

$$(1 - |\vec{a_u}^T \cdot \vec{a_v}|^2) p_u p_v = p_u' p_v' \quad \text{すなわち}$$
$$p_u p_v > p_u' p_v' \quad \cdots (\text{C})$$

(C)と(甲)から $\quad p_u' > p_u \geq p_v > p_v'$.

よって $-p_u \log p_u - p_v \log p_v$
$> -p_u' \log p_u' - p_v' \log p_v'$.

↑勝手な凸関数で
$a > x > y > b$ で $a+b = x+y$ なら
$f(x)+f(y) > f(a)+f(b)$.

これで背理法より示された。

話題をかえて:

N状態系 A $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$ $\quad$ M状態系 B $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^M$

の合成系は AB $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+M}$ ではない!

合成系は $(v_{is})_{\substack{i=1\cdots N \\ s=1\cdots M}} \in \mathbb{C}^{NM}$ でかかれる.

(数学的にはテンソル積という.)

A系で X_{ij}, B系で Ξ_{st} を測定する

期待値は

$$\langle X\Xi\rangle_{(v)} = \sum_{i.j.s.t} \overline{v_{is}}\, X_{ij}\,\Xi_{st}\, v_{jt}$$

(但し $|v|^2 = \sum_{i,s} |v_{is}|^2 = 1$ とした.)

いま B系のことは忘れてしまう. いいかえれば…

$\Xi_{st} = \mathbb{1}_{st}$ しか測定しないことにする.

$$\langle X\mathbb{1}\rangle = \sum_{i.j.s.t} \overline{v_{is}}\, X_{ij}\,\mathbb{1}_{st}\, v_{jt}$$

$$= \sum_{i.j} \Big(\underbrace{\sum_s v_{js}\overline{v_{is}}}_{}\Big) X_{ij}$$

$$= \mathrm{tr}\ \rho X$$

$(\vec{v}_1)_i = v_{i1}$

$(\vec{v}_2)_i = v_{i2}$

$\vdots$

$(\vec{v}_M)_i = v_{iM}$

なる A系の純粋状態を混合したもの.

AB全系では純粋でも (エントロピー $=0$)

A系だけみていると

混合にみえる. (エントロピー >0)

勝手な　は

$$|w_1|^2+\cdots+|w_m|^2=1$$

$$\underset{N \times M}{\begin{pmatrix} V_{is} \end{pmatrix}} = \underset{N \times N}{U} \begin{pmatrix} w_1 & & & 0 \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_\bullet \end{pmatrix} \underset{M \times M}{U'}$$

ユニタリ。

NとMの小さいほう min(N,M)

と書ける。

すると

$$\rho = \sum_s V_{js}\overline{V_{is}} = \sum_{あ=1}^{\min(N,M)} |w_あ|^2\, U_{jあ}\,\overline{U_{iあ}}$$

$\Uparrow$

$(\vec{U}_あ)_i = U_{iあ}$ は

$|U_あ|=1$, $\vec{U}_あ \perp \vec{U}_い$　あ≠い

をみたす。

→ ρ のエントロピーは

$$k_B \sum_{あ=1}^{\min(N,M)} -p_あ \log p_あ \le k_B \log \min(N,M).$$

> AB系の純粋状態でB系をみないことで生じる
> A系の混合状態のエントロピーは
> 高々 $k_B \log \min$(Aの状態数, Bの状態数).

量子系の熱力学的エントロピー：

与えられた平均エネルギー，粒子数，電荷 etc.
を実現する(混合)状態 ρ で
量子力学的エントロピーを最大化したもの．

量子力学的には，純粋状態から
出発するとずっと純粋状態である．
エントロピー $= 0$．

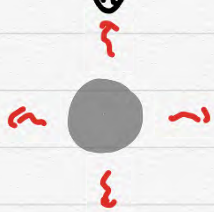
⇓ つぶれる．

BH になる

Q. なぜここでエントロピー $\neq 0$ か？

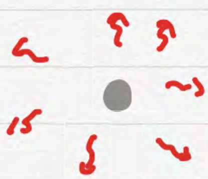
A. 巨視的な量（平均エネルギー etc.）
では区別できないが微視的には
異なる状態がたくさんあるから．
BH だけの問題ではない．

⇓



Q. 最後にBHがなくなったら全部
熱輻射になる．さすがにそれは
変なのでは？

⇓



A. 最後の最後では超高エネルギーで
量子重力が効いてくる．

まだ未完成なので何とも言えない．

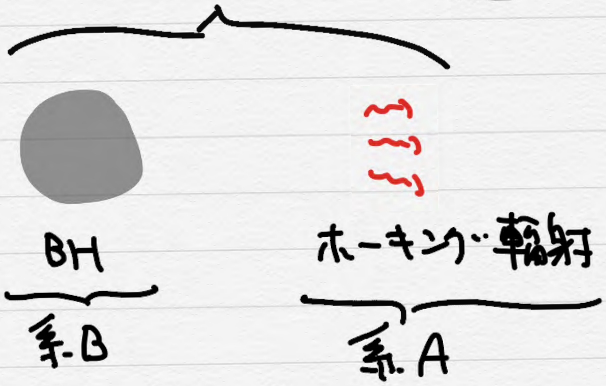
⇓

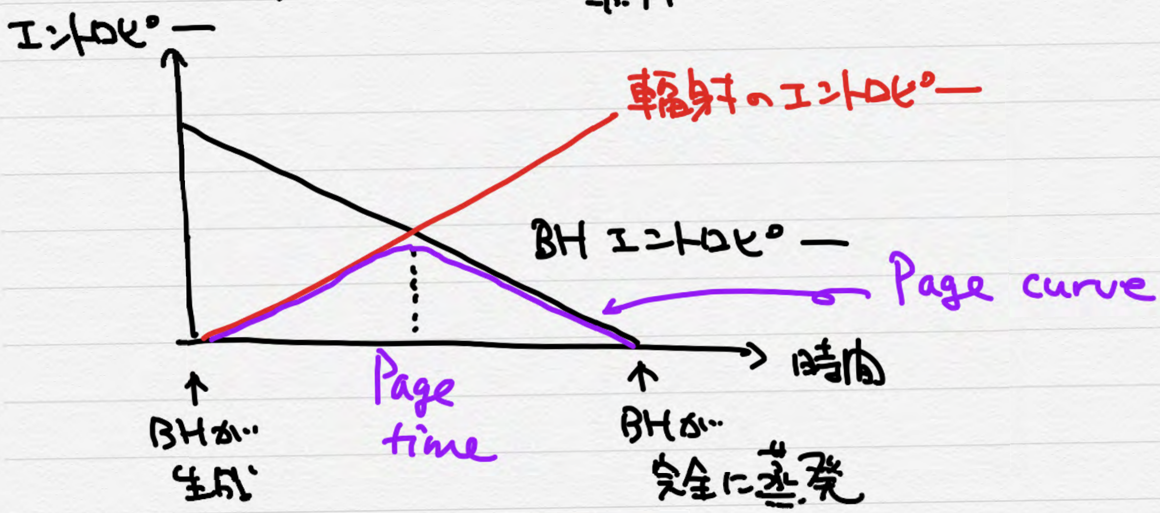
???

ここで 再度 D. Page の 登場: PRL 71 (1993) 1291
PRL 71 (1993) 3743

もっと早い時期で矛盾が生じる!

いま 全系は純粋状態





しかし $\boxed{\text{系 A のエントロピー}}$

$$\leq k_B \log(\text{系 B の状態数})$$

$$\sim \text{BH エントロピー}$$

のはず.

・半分ぐらい蒸発した時点 (まだ BH は天文学的サイズでよい)

で既に矛盾が生じる.

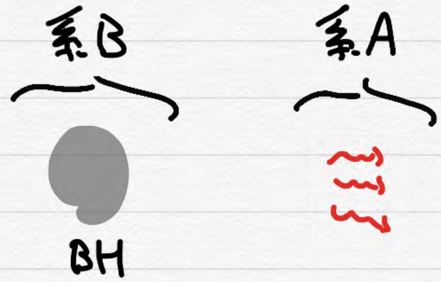
・それ以降は動的でなく, ど　ん 輻射のエントロピーは

減少するべき. (page cu　. という)

ここ数年の進展:

- 重力の半古典論的経路積分計算で
  Page curve をきちんと導出できるようになった。
  (Island 公式という。)

- 長らく知られていた計算ルールに従って
  計算するのだが、これまで見落とされていた項があった。

- 

  と BH エントロピーを「系B」とするのが悪い、
  ということにテクニカルにはなっている。

  Page time 後では

  エントロピー小

  BH を $\underbrace{系B}_{\frac{k_B c^3}{\hbar G}\frac{A}{4}}$ + 系C にさらに分割し 系A

  エントロピー大

  という雰囲気。

Almheiri - Hartman - Maldacena - Shaghoulian - Tajdini

https://arxiv.org/abs/hep-th/2006.06872
がよいレビュー。

BH information paradox 全般に関しては
Polchinski hep-th/1609.04036
がまとまっている。