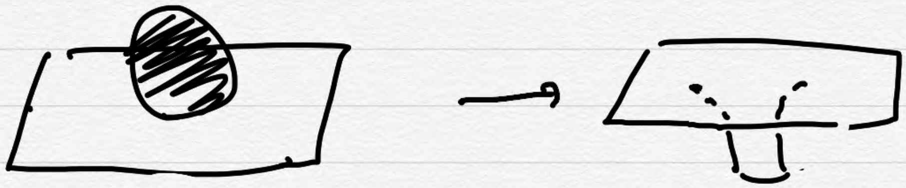
一般相対論では

① 

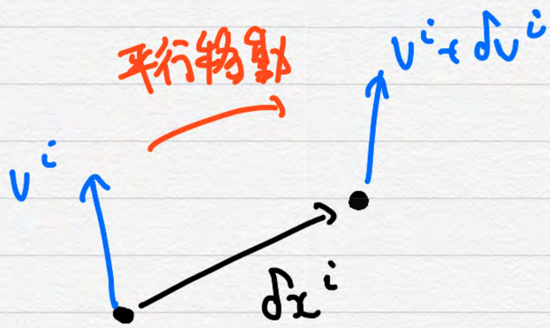
ものが…　→　時空を曲げる.

② 

そこをなるべく真っすぐ
すすもうとするが
どうしても曲がってしまう.

② を前回やったので、① を学ぼう！

でもその前に：



$$\delta v^i = -\sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}\, v^j \delta x^k$$

だったが、これは時空の座標のいれかたに対し
大丈夫なのか？

（数回前に、 $\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right]\phi(x,y)=0$

と $\left[\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right)^2\right]\tilde{\phi}(\tilde{x},\tilde{y})=0$

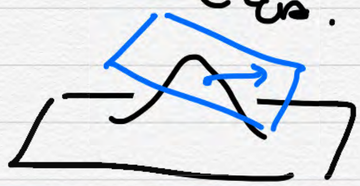
が回転のもとで等価であることを確認したが
それの一般相対論版の話.）

そもそも、座標変換

$$\tilde{x}^i \longleftrightarrow x^i$$

のもとで 接ベクトル v^i は どう変換されるか？

って話。 微小ベクトル δx^i



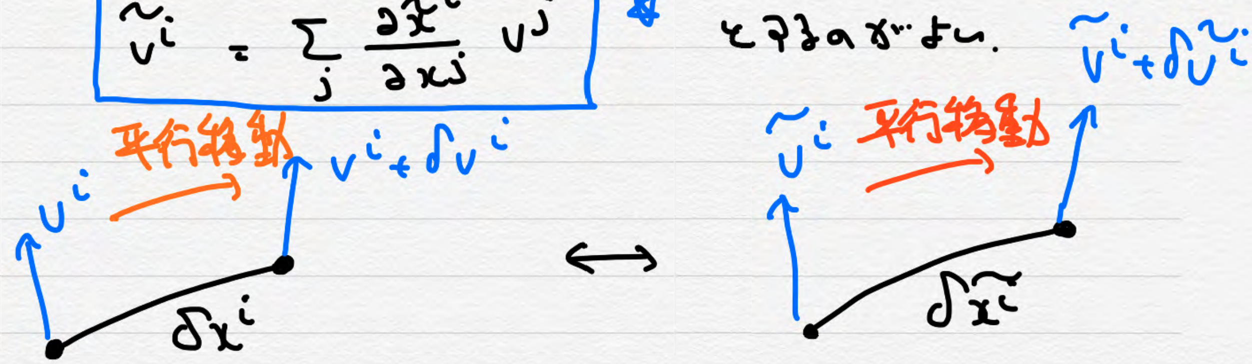
を微小でなくてもよいように伸ばしたもの。

$$\boxed{\delta\tilde{x}^i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\,\delta x^j} \quad \#$$

なので

$$\boxed{\tilde{v}^i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\, v^j} \quad ※$$

とするのがよい。



が大丈夫であるには

$$\tilde{v}^i + \delta\tilde{v}^i \overset{???}{=} \sum_j \left.\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right|_{\text{at } x+\delta x^i} \left(v^j + \delta v^j \right)$$ が欲しい。

愚直に $\delta\tilde{v} \xleftarrow{\text{用いる}} \tilde{\Gamma},\ \tilde{v} \leftarrow ※,\ \delta\tilde{x} \leftarrow \#$

$\delta v \xleftarrow{\text{用いる}} \Gamma,\ v,\ \delta x$ として

一次の微小量まで取り、$v^\bullet \delta x^\bullet$ の係数を比較すると

$$\boxed{-\sum_{j,k} \tilde{\Gamma}^i_{jk} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} \overset{???}{=} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l \partial x^m} - \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \Gamma^j_{lm}} \quad \$$$

をチェックすればよい。

$\tilde{\Gamma}$ を $\tilde{g}$ で，Γ を g であらわし，

$$g_{ij}=\sum_{k,l}\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j}\tilde{g}_{kl}$$ を代入して

比較すればよい。

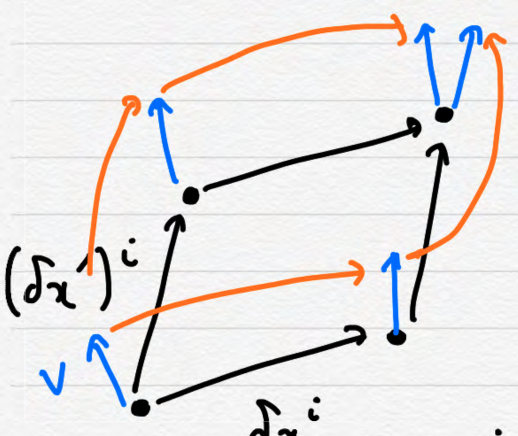
そもそも平行移動は

① 長さを保つ　② 線形　③ $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$

で一意に決まった。　???

座標によらない概念…。

条件③が座標変換で大丈夫であればよいが…
前ページの $\$$ 式から $\tilde{\Gamma}^i_{jk}=\tilde{\Gamma}^i_{kj}$
と $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$ は両立するのでよい。



平行移動のずれを考える。

δx^i して $(\delta x')^i$ すると，

$$v^i \Rightarrow v^i-\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}v^j\delta x^k$$

$$\Rightarrow v^i-\sum_{l,m}\underbrace{\Gamma^i_{lm}}_{x^i+\delta x^i\text{での値}}\left(v^l-\sum_{jk}\Gamma^l_{jk}v^j\delta x^k\right)(\delta x')^m$$

…①

逆に $(\delta x')^i$ やって δx^i すると

$$v^i - \sum_{j,k} \underbrace{\Gamma^i_{jk}}_{x+\delta x'\text{ での値}} \left(v^j - \sum_{l m} \Gamma^j_{lm} v^l (\delta x')^m \right) \delta x^k \quad \cdots ②$$

① と ② の差を $\delta x, \delta x'$ のそれぞれ一次までとると

$$\sum_{lkm} - \frac{\partial \Gamma^i_{lm}}{\partial x^k} v^l \delta x^k (\delta x')^m + \sum_{jlkm} \Gamma^i_{lm} \Gamma^l_{jk} v^j \delta x^k (\delta x')^m$$

$$+ \sum_{jkm} \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^m} v^j \delta x^k (\delta x')^m - \sum_{jlkm} \Gamma^i_{jk} \Gamma^j_{lm} v^l \delta x^k (\delta x')^m$$

$$=: - \sum_{j,k,m} R^i{}_{jkm} v^j \delta x^k (\delta x')^m$$

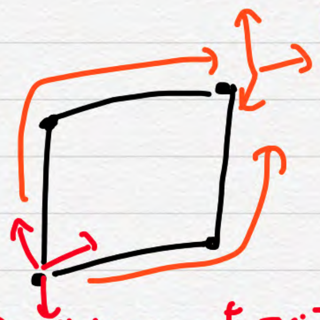
但し

$$\boxed{R^i{}_{jkm} = \frac{\partial \Gamma^i_{jm}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^m} + \sum_{\bullet} \Gamma^i_{\bullet k} \Gamma^{\bullet}_{jm} - \sum_{\bullet} \Gamma^i_{\bullet m} \Gamma^{\bullet}_{jk}}$$

リーマン曲率 という.

$R^i{}_{jkl}$ が全部 = 0

⇔ 時空が平ら。



② その基底を平行移動で他の点にもっていく。

$R^i{}_{jkl} = 0$ なら
これが経路によらない。
〜→ 全ての点で
揃ったむきに
基底がいれられる。

① 基底を一点でさだめる。

③ それを使って座標系をいれなおす。

④ その座標系では $ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$
となる。

$R^i{}_{jkl}$ は 座標変換でどうかわるか？

$\tilde{x}^i \leftrightarrow x^i$ のもとで

反 $d\tilde{x}^i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j$

[illegible] $\tilde{v}^i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} v^j$ だった。

$(\tilde{v}$ を したときのズレ$)^i$

$= \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$ $(v$ を したときのズレ$)^j$

のはずである。

よって

$$\sum_{\tilde j\tilde k\tilde l}\tilde R^{\tilde i}{}_{\tilde j\tilde k\tilde l}\,\tilde v^{\tilde j}\,d\tilde x^{\tilde k}(d\tilde x')^{\tilde l}$$

$$=\sum_i\frac{\partial\tilde x^{\tilde i}}{\partial x^i}\sum_{jkl}R^i{}_{jkl}\,v^j\,dx^k(dx')^l$$

☆, # をそれぞれ比較すると

$$\sum_{\tilde j\tilde k\tilde l}\tilde R^{\tilde i}{}_{\tilde j\tilde k\tilde l}\frac{\partial\tilde x^{\tilde j}}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde x^{\tilde k}}{\partial x^k}\frac{\partial\tilde x^{\tilde l}}{\partial x^l}=\sum_i\frac{\partial\tilde x^{\tilde i}}{\partial x^i}R^i{}_{jkl}. \qquad \$$$

$M^{\tilde i}{}_i=\dfrac{\partial\tilde x^{\tilde i}}{\partial x^i}$, $N^i{}_{\tilde i}=\dfrac{\partial x^i}{\partial\tilde x^{\tilde i}}$ は互いに逆行列

$\$$ の両辺を（j,k,l を固定して）$\tilde i$, i に関する n次元ベクトルに行列 M がかかっていると思い両辺に逆行列 N をかけると

$$R^i{}_{jkl}=\sum_{\tilde i\tilde j\tilde k\tilde l}\frac{\partial x^i}{\partial\tilde x^{\tilde i}}\frac{\partial\tilde x^{\tilde j}}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde x^{\tilde k}}{\partial x^k}\frac{\partial\tilde x^{\tilde l}}{\partial x^l}\tilde R^{\tilde i}{}_{\tilde j\tilde k\tilde l}.$$

がわかった。（特にある座標系で $R^i{}_{jkl}=0$ なら他の座標系でも $\tilde R^{\tilde i}{}_{\tilde j\tilde k\tilde l}=0$.）

上式で $i=k$ として足すと

$$\sum_i R^i{}_{jil}=\sum_i\sum_{\tilde i\tilde j\tilde k\tilde l}\underbrace{\boxed{\frac{\partial x^i}{\partial\tilde x^{\tilde i}}}\frac{\partial\tilde x^{\tilde j}}{\partial x^j}\boxed{\frac{\partial\tilde x^{\tilde k}}{\partial x^i}}}_{\text{逆行列}}\frac{\partial\tilde x^{\tilde l}}{\partial x^l}\tilde R^{\tilde i}{}_{\tilde j\tilde k\tilde l}$$

$$= \sum_{\tilde{j},\tilde{l}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^{j}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{l}}}{\partial x^{l}} \sum_{\tilde{i}} R^{\tilde{i}}{}_{\tilde{j}\tilde{i}\tilde{l}} .$$

リッチ曲率

そこで $R_{jl} := \sum_{i} R^{i}{}_{jil}$ ← Ricci

$\tilde{R}_{\tilde{j}\tilde{l}} := \sum_{\tilde{i}} \tilde{R}^{\tilde{i}}{}_{\tilde{j}\tilde{i}\tilde{l}}$ と定めると

$$R_{jl} = \sum_{\tilde{j},\tilde{l}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^{j}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{l}}}{\partial x^{l}} R_{\tilde{j}\tilde{l}} .$$

ある座標系で R_{ij} が全てゼロ

$\Leftrightarrow$ 他の座標で $\tilde{R}_{\tilde{i}\tilde{j}}$ が全てゼロ.

物質の無いところでのアインシュタイン方程式

$$\boxed{R_{ij} = 0}$$

座標系によらない条件.

重力がよわいばあい,

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \sum_{i,j} \oslash_{ij}\, dx^i dx^j .$$

↑ 微小.

さらに

$\oslash$ が時間 x^0 によらないとすると

$$R_{00} \sim \sum_{i=1,2,3} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 \oslash_{00} .$$

すると $= 0$ は $= 0$ に帰着.

ニュートン力学での重力場の方程式!!!