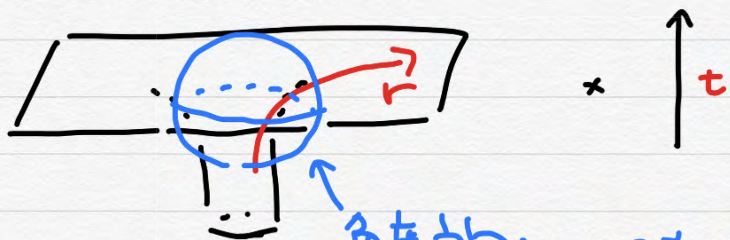
ブラックホール解！

座標をどういれるか？



角度方向はいつものように
θ, φ でパラメタづけする。

単位球面の計量

$$ds^2 = r^2\left(d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2\right)$$

面積 $4\pi r^2$ の球面の計量

回転対称で時間に依存しない4次元時空の計量は

$$ds^2 = -F(r)c^2dt^2 + G(r)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2\right).$$

$r > L$ ではモノはないとすると そこでは

$$R_{ij} = 0.$$

計算は手でやるのは大変. パソコンを使おう…

$x^1 = ct$, $x^2 = r$, $x^3 = \theta$, $x^4 = \phi$ ととる.

ふつう $x^{0,1,2,3}$ にするが、Mathematica は
安直につかうと添字は1からはじまってしまうので
こうした。

講義ページにおいてある Mathematica ファイルを参照。

$$G(r)R_{11} + F(r)R_{22} = \frac{\left(G(r)F(r)\right)'}{rG(r)}$$

となるので　$F(r)G(r) = $ 定数.

$r \to \infty$ では　$ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2\right)$

に近づいてほしいので

$$F(r)G(r) = 1.$$

これを用い G を消去. すると

$$R_{33} = 1 - \left(rF(r)\right)'$$

となるので　$rF(r) = r + $ 定数.

すなわち　$F(r) = 1 + \frac{\cancel{\ }}{r}.$

c^2dt^2 の係数 $-F(r)$ が重力が弱いところでは

$$-\left(1 + \frac{2}{c^2}\phi\right)$$

だった. 遠方ではニュートン重力

$$\phi = -\frac{G_N M}{r}$$

なので　$F(r) = 1 - \frac{2G_N M}{c^2} \cdot \frac{1}{r}.$

計量は　　　　シュバルツシルト解!!

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2G_N M}{c^2} \cdot \frac{1}{r}\right) c^2dt^2$$

$$+ \frac{1}{1 - \frac{2G_N M}{c^2} \cdot \frac{1}{r}} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2\right).$$

結果はそれほど複雑でない.

$r_S = \frac{2G_N M}{c^2}$ をシュバルツシルト半径という.

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2\right)$$

$r=r_s$ でゼロ　　$r=r_s$ で発散.

時間がとまる.　でも無限に遠い??

$$G_N \sim 6.67\times10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\cdot s^2}$$

$$c \sim 3.0\times10^8\ m/s \quad \Rightarrow \quad \frac{2G_N M_{太陽}}{c^2} \sim 3km$$

$$M_{太陽} \sim 1.99\times10^{30}\ kg$$

$r\sim r_s$ のあたりで何がおこっているかを知るには

座標変換をするのがよい.

$$\begin{cases} \rho = \left(\cosh\frac{ct}{2r_s}\right)\sqrt{\left|\frac{r}{r_s}-1\right|}\ e^{\frac{r}{2r_s}} \\ \tau = \left(\sinh\frac{ct}{2r_s}\right)\sqrt{\left|\frac{r}{r_s}-1\right|}\ e^{\frac{r}{2r_s}} \end{cases}$$

とすると

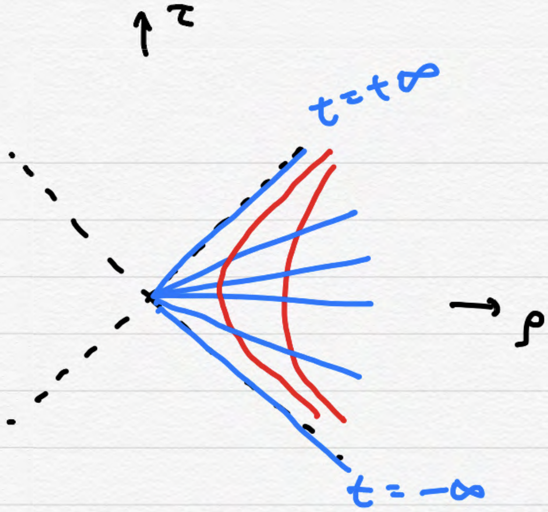
$d\tau = \frac{\partial\tau}{\partial ct}d(ct) + \frac{\partial\tau}{\partial r}dr$

$d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial ct}d(ct) + \frac{\partial\rho}{\partial r}dr$

をここに代入,
がんばって整理
すると示せる.

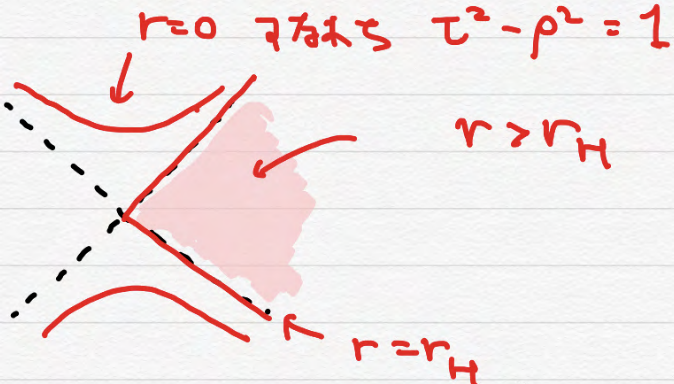
$$-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{1}{1-\frac{r_s}{r}}dr^2$$

$$= \frac{4e^{-r/r_s}r_s^3}{r}\left(-d\tau^2 - d\rho^2\right) \quad となる.$$



r 定数 $\leftrightarrow$ $\rho^2-\tau^2$ 定数

t 定数 $\leftrightarrow$ τ/ρ 定数



Kruskal-Szekeres 座標系という.

この座標系では $\dfrac{4e^{-r/r_s}\,r_s^3}{r}\left(-d\tau^2+d\rho^2\right)$

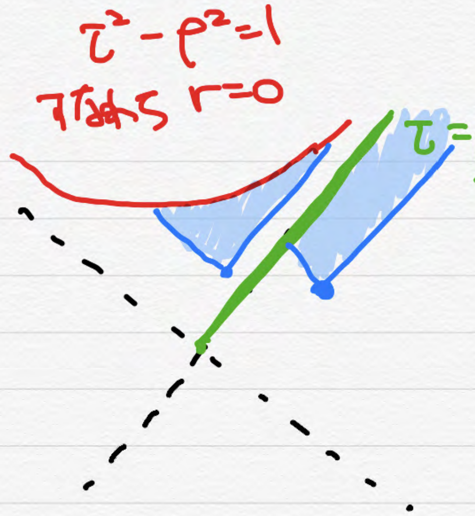
なので, $r=r_s$ でも変なことは局所的には何もない.

光速 $\begin{cases} \text{より遅い} & \cdots \quad ds^2<0 \\ \text{と同じ} & \quad\; ds^2=0 \\ \text{より速い} & \quad\; ds^2>0 \end{cases}$ だった.

($ds^2=-c^2dt^2+dx^2$ で $x=vt$ としてみるとわかる.)

⇒ ρ,τ 座標では, 光速以下のものは傾き±45°の間を動く.

だから:



$r<r_s$ すなわち $\tau>\rho$ に入ってしまうと出られない。
有限時間で $r=0$ に行く。

$r>r_s$ だと外にも逃げられる。
固有時間では有限時間で $r=r_s$ を通過して $r=r_s$ の中に入れる。

しかしこれは 遠方の観察者の時刻 t では 無限に時間がかかる。

($t=$一定は τ/ρ が一定。
$t\to+\infty$ で $\tau/\rho \nearrow +1$ になるので。)

$r=r_s$ の球面をブラックホールの
(事象の)地平面
(event) horizon
という。

(時間が余ったら、ポスドクのときに一般相対論のトンデモさんから電話を受けた話でもする。)