ブラックホール熱力学

シュバルツシルト解

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2G_N M}{c^2 r}\right)(c\,dt)^2 + \frac{1}{1-\frac{2G_N M}{c^2 r}}\,dr^2$$

$$+\,r^2\left(d\theta^2 + (\sin\theta)^2\,d\phi^2\right)$$

地平面の半径： $r_S = \dfrac{2G_N M}{c^2}$.

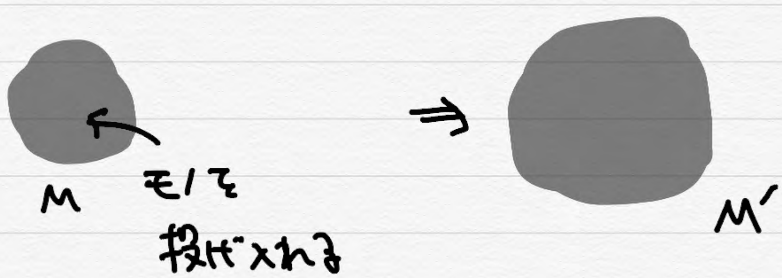
表面積： $4\pi {r_S}^2$

もっと一般の状況でも，「地平面」は定義できる.

ホーキング (1972)：

> ブラックホールの地平面の面積は減少しない.

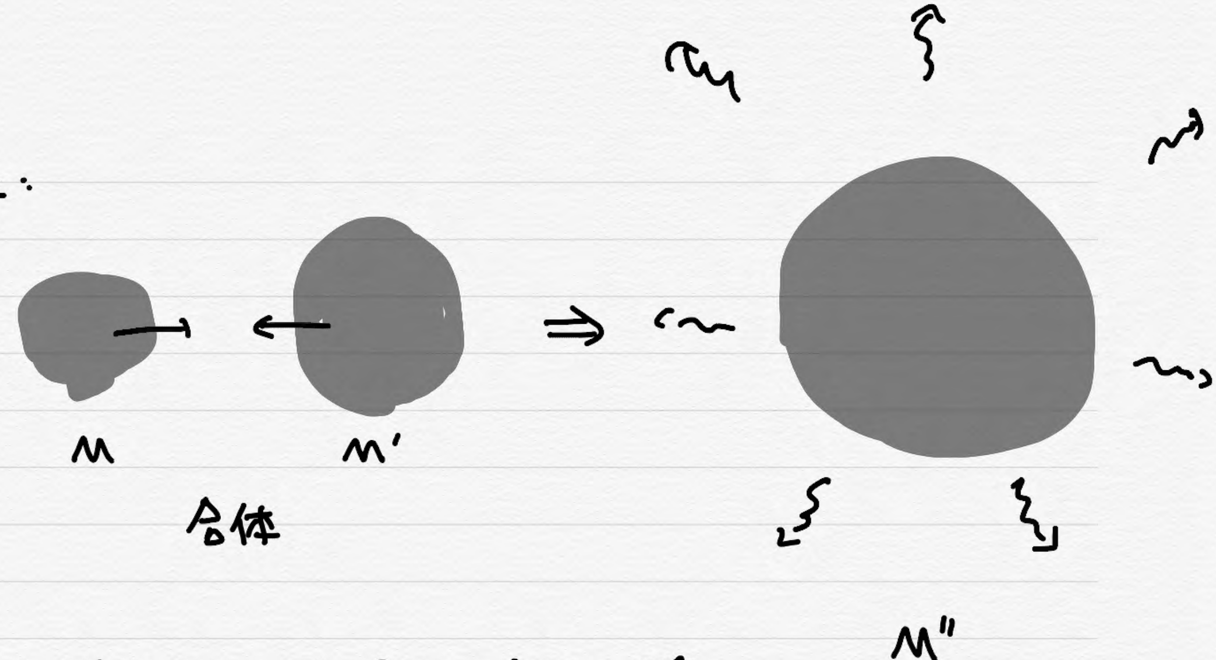
例えば



$M < M'$ だから $r_S < r_S'$.

ブラックホールからモノはでてこないので逆はおこらない.

また：



エネルギーは Mc^2. 合体の際に
重力波を放出してエネルギーを失うので

$$M'' \le M + M'$$

しかし表面積は減らないはずなので

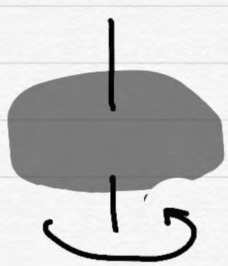
$$M^2 + (M')^2 \le (M'')^2.$$

$M = M'$ として $\sqrt{2}M \le M''$.
最大 $(2-\sqrt{2})Mc^2$ のエネルギーが放出.

世界初の観測 GW150914 では原論文をみると

$$36\,M_\odot + 29\,M_\odot \longrightarrow 62\,M_\odot$$

なので確かにみたされている. といいたくなるが
ちょっと気が早い. というのは



ブラックホールは回っていることもある.
Kerr解

角運動量をJとして、無次元量

$$\chi = \frac{Jc}{G_N M^2}$$ を考えると

$\chi < 1$ が知られている。

（$\chi > 1$ の時は特異点が地平面の外に出てしまうので作れないと思われている。）

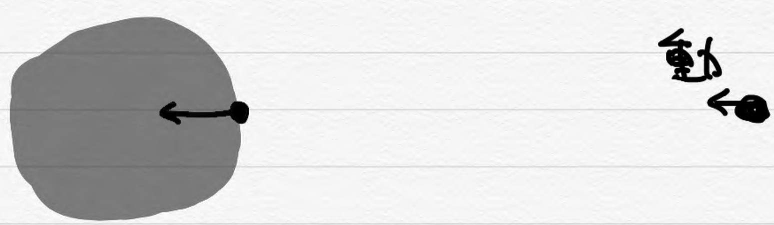
地平面の面積：$4\pi \cdot \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \cdot \frac{1+\sqrt{1-\chi^2}}{2}$

なので、それぞれのブラックホールの χ を測定しないといけない。それをした論文が去年でた。

結論としては、確かに面積は増えている。

（それぞれの χ は案外大きいらしい。）

ブラックホールの表面重力....



計量 $-F(r)(cdt)^2 + \frac{1}{F(r)}dr^2$ を考える。

$$\begin{cases} \Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}F(r)F'(r) \\ \Gamma^t_{tt} = 0 \end{cases}$$ なので

平行移動!

$$(v^0, v^1) = \left(\frac{1}{\sqrt{F}}, 0\right)$$

を δx^0 平行移動すると

$$(\delta v^0, \delta v^1) = \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{F}\, F' \,\delta x^0\right)$$

このベクトルの長さは $\sqrt{-F(\delta v^0)^2 + \frac{1}{F}(\delta v^1)^2} = \frac{F'}{2}\delta x^0$.

よって場所 r における加速度は $\kappa = \dfrac{c^2 F'(r)}{2}$.

$F(r) = 1 - \dfrac{2GM}{c^2 r}$ を代入して $\kappa = \dfrac{GM}{r^2}$.

$r = r_s$ では

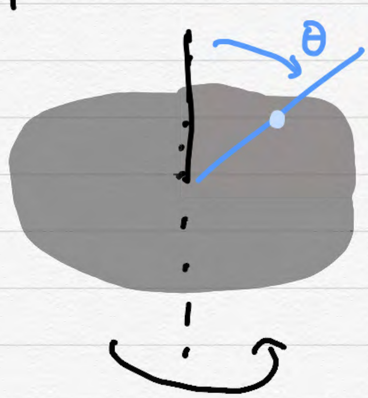
$$\kappa = \frac{c^4}{4GM}$$

$\;\; = \dfrac{2GM}{c^2}$

となる.

(この計算ではニュートン力学の式が補正なしに正しい.)

回転したブラックホール等では



例えば θ

地平面上の場所に依存して表面重力 κ は変わってもよい気がする. しかし実は

定常ブラックホールの表面重力 κ は場所によらない.

シュバルツシルト解での

いまエネルギーは

$$E = Mc^2$$

$$A = 4\pi (r_S)^2 = \frac{16\pi G^2 M^2}{c^4}$$ なので…

$$dE = \frac{c^2 \kappa}{8\pi G} dA$$ である.

実は一般のブラックホール解で

電荷　角運動

$$dE = \boxed{\frac{c^2}{8\pi G} \kappa \, dA} + \phi \, dQ + \Omega \, dJ$$

角運動量.

が成り立つ.

エネルギー　表面重力　地平面の面積　電気ポテンシャル

熱力学における　（示強変数，示量変数）のペア

$$dE = \boxed{T dS} - p dV + \mu dN$$

に似ている. 電荷，角運動量を持つ系の熱力学では

$$dE = T dS + \phi dQ + \Omega dJ$$ なので更に似ている.

熱力学の復習

熱力学系で $\begin{cases} \text{内部エネルギー } E \\ \text{示量変数 } V, N, \cdots \end{cases}$

で指定されるものを考える.

示強的

平衡状態においては 系の状態で定まる
(絶対)温度 T というものがある。 ← 熱力学第0法則

$T \geq 0$ である。

さて

熱力学でない物理でも既に存在する仕事の寄与

$$\delta E = \boxed{熱の流入/流出} \underbrace{- p\delta V + \mu \delta N}$$

だが 系の状態で定まる

エントロピー S というものがあって

示量的

可逆・準静的変化においては

$$\boxed{熱の流入/流出} = T\,\delta S$$

: 熱力学第1法則

一般の非可逆変化においては

$$\boxed{熱の流入/流出} \leq T\,\delta S$$

特に 孤立系では

$$0 \leq T\,\delta S$$

すなわち

$$0 \leq \delta S$$

: 熱力学第2法則

(エントロピーの増大法則)

熱力学:

$$dE = TdS + \phi dQ + \Omega dJ$$

ブラックホール:

$$dE = \frac{c^2}{8\pi G}\kappa dA + \phi dQ + \Omega dJ.$$

第1法則

T: 温度　　K: 表面重力

どちらも 定常系では 一定

第0法則

S: エントロピー　A: 面積

どちらも 非減少.

第2法則

ブラックホールには

$$T \propto \kappa, \quad S \propto A \quad なる$$

温度と エントロピー が あるのでは?

比例係数は

$$dE = TdS + \cdots$$
$$= \frac{c^2\kappa}{8\pi G}dA + \cdots$$

となるよう定まっているはず.

- 熱力学は 多数の自由度を含む系を 粗視化 して扱うことから あらわれる と考えることが多い. (水には水分子がたくさん.)

熱・統計力学 と並称される.

- ブラックホール「熱」力学は
一般相対論の微分方程式の
ふるまいから出てくる。
アインシュタイン方程式はむずかしいとは言え
単に g_{ij}（10コの関数）のみたす
偏ビブン方程式で、分子アボガドロ数コ
の方程式より断然かんたん。

- これは不思議なことである。

- でもたいていの教科書でふれられている
熱力学の公理論的アプローチでは
断熱操作等のみたす性質から
温度とエントロピーの存在を導出し
第1.2.3法則をみちびく。
これは統計力学を仮定しない。
（日本の物理屋はこのアプローチに伝統が
ある。田崎、佐々、沙川 …）

- ブラックホールも「熱力学の公理系」を
みたすことを確認すればそれでよいのでは???
前からやろうと思ってやっていない。誰かやって!!!

閑話休題.

ホーキングは ブラックホール時空で

場の量子論を考えると. $T \propto \kappa$ で定まる

熱輻射があることを示した。

これをちゃんとやるにはまた一学期くらいかかる....

以下は形式的なギロンをする.

$\boxed{\text{量子力学}}$: ① 系にはとびとびの

エネルギー準位 E_a がある. $(a=1,2,3,\cdots)$

② a番目の準位の波動関数は

$$e^{-iE_a t/\hbar}$$

と変化する. ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$ はプランク定数.

$h \sim 6.6 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}$)

$\boxed{\text{量子統計力学}}$: 温度 T の平衡状態では

a番目の準位が実現する確率は

$$e^{-\frac{E_a}{k_B T}}$$ に比例する.

k_B: ボルツマン定数.

$\sim 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$

$$e^{-itE_a/\hbar} \longleftrightarrow e^{E_a/k_BT}$$

温度 T は形式的に虚時間 $t = \dfrac{i\hbar}{k_BT}$ に相当.

(もう少し正確には、時間 t を解析接続すると虚時間 $t = \dfrac{i\hbar}{k_BT}$ で周期的になる、という条件になる.)

いま計量

$$ds^2 = -F(r)\, c^2 dt^2 + \frac{1}{F(r)} dr^2$$

で $F(r_s) = 0$,

$$F(r) = ●\underbrace{(r - r_s)}_{\rho^2\ \text{と呼ぶ}} + \cdots とする.$$

$dr = 2\rho d\rho$.

$t = i\tau$ として

$$ds^2 = ●\rho^2 c^2 d\tau^2 + \frac{dr^2}{●\rho^2}$$

$$= ●\rho^2 c^2 d\tau^2 + \frac{4}{●} d\rho^2$$

$$= \frac{4}{●}\left(d\rho^2 + \rho^2 d\left(\frac{●}{2} c\tau\right)^2\right).$$

平面の極座標は $d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ で

$$\varphi \sim \varphi + 2\pi.$$

よって $\dfrac{●}{2} c\tau$ は 2π 周期だと思うのがよい.

〜〜 τ は $\dfrac{4\pi}{●c}$ 周期。

表面重力 $\kappa = \frac{c^2}{2}F'(r_S) = \frac{c^2}{2}$ だったから

$\tau\ (=it)$ は $\frac{2\pi c}{\kappa}$ 周期.

これが $=\frac{\hbar}{k_B T}$ なので

$$\boxed{T = \frac{\hbar}{k_B \cdot 2\pi c}\kappa}.$$

$TdS = \frac{c^2 \kappa}{8\pi G_N} dA$ だったから

$$\boxed{S = k_B \frac{c^3}{G_N \hbar}\frac{A}{4}}.$$

シュバルツシルト解のばあい

$F(r) = 1 - \frac{r_S}{r}$, $r_S = \frac{2G_N M}{c^2}$ なので

$\kappa = \frac{c^4}{4G_N M}$ だった.

すると

$$T = \frac{c^3 \hbar}{k_B \cdot 8\pi G_N M}$$

$$S = k_B \frac{4\pi G_N M^2}{\hbar c}$$

となる.

物理の基礎定数が混んでてくる すごいね!

c 光速　k_B 統計力学

$\hbar$ 量子力学　G_N 重力