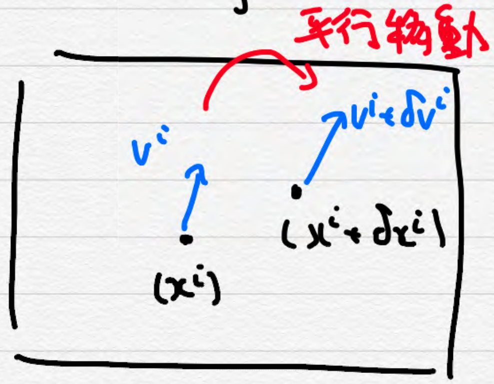
ここまでのまとめ

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

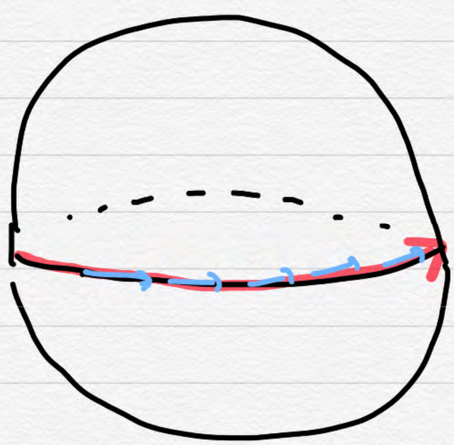


$$\delta v^i = -\sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}\, v^j\, \delta x^k .$$

$$\Gamma^i_{jk} = \sum_l (g^{-1})^{il}\, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right).$$

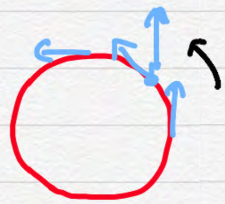
平らな空間で力がかかっていないてモノは直進する。

曲がった空間で力が（空間のまがり以外）かかっていないと，モノはなるべく真っすぐ進むだろう。



大円：接ベクトルを平行移動すると接ベクトル。

← 小円. 上からみると



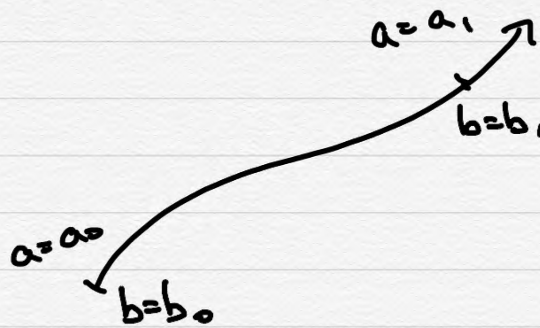
接ベクトルを平行移動したものは接ベクトルでない。

そこで:

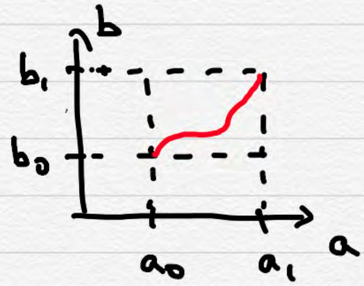
$\boxed{\text{なるべくまっすぐ}}$ $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 接ベクトルを平行移動したものは接ベクトルである。

これを 測地線 (geodesic) と呼ぶ。

数式では:



曲線 $x^i(a)$ を考える。

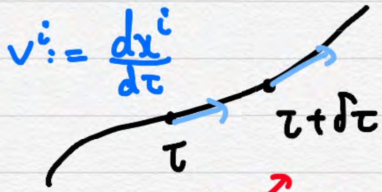


パラメタ付けにはいろいろ方法がある。

接ベクトル : $\frac{dx^i}{da}$.

接ベクトルの長さ $\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{da}\frac{dx^j}{da}}$ が一定になるような パラメタを取ろう。 (一定の速さで動く ということ。)

そういうパラメタを a でなく τ と書こう。



$\delta x^i = v^i d\tau$ だけうごいた.

$$\delta v^i \Big|_{\text{平行移動}} = -\sum_{k,l} \Gamma^i_{k,l} v^k v^l \delta\tau$$

$$\delta v^i \Big|_{\text{接ベクトルとして}} = \frac{dv^i}{d\tau} \delta\tau .$$

これらが等しいとして. $\boxed{\text{測地線の式}}$ は

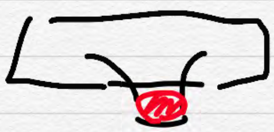
$$\frac{dv^i}{d\tau} + \sum_{k,l} \Gamma^i_{k,l} v^k v^l = 0$$

同じことだが

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \sum_{k,l} \Gamma^i_{k,l} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0 .$$

$\boxed{\text{一般相対論}}$ では

①



重いものが時空をまげる.

⇑

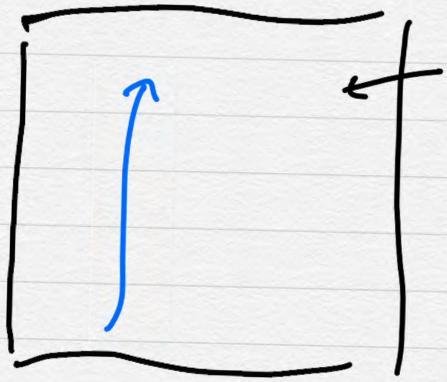
こっちはマダ.
(あとですこし
まだ準備がたりない…)

②

まがった時空を
モノが動く.

⇑

ここまでで
説明できる!



4次元時空

(x^0, x^1, x^2, x^3)

計量

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i dx^j$$

[平らなばあいは

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

ただし $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$]

① 微小にはなれた2つの時空点の間の

固有時間 $\delta\tau$ は

$$c\delta\tau = \sqrt{-\delta s^2} = \sqrt{-\sum_{i,j} g_{ij}\, \delta x^i \delta x^j}$$

固有きょり δx は　　符号によってえらぶ.

$$\delta x = \sqrt{\delta s^2} = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}\, \delta x^i \delta x^j}$$

② 重力以外力をうけないモノは

測地線を動く.

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \sum_{k,l} \Gamma^i_{k,l} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0$$

加速度があるとき　Γ.. がノンゼロ.

重力がよわく，時間依存せず，　　ものが遅いばあい．

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \boxed{-\frac{\partial}{\partial x_i}\phi} \qquad \begin{matrix}(x_1 & x_2 & x_3) \\ & \parallel & \\ (x, & y, & z)\end{matrix}$$

であってほしい．

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \sum_{k,l} \Gamma^i_{k,l} \frac{dx^k}{d\tau}\frac{dx^l}{d\tau} = 0$$

とひかく．　(x^0, x^1, x^2, x^3)

$\qquad\qquad\qquad\ \ \parallel$

$\qquad\qquad (ct, x, y, z)$

$t \sim \tau$　なので

$$\frac{dx^i}{d\tau} \sim (\underset{=}{c}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$$

とても大きい．

時間非依存なので

ゼロ

そこで

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} \sim -c^2 \Gamma^i_{0,0}$$

$$= -c^2 \frac{1}{2}\sum_k (g^{-1})^{ik}\left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}\right)$$

$$\sum g_{ij}\, dx^i dx^j$$

$$\sim -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

なんで　$(g^{-1})^{ik} \sim \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

比較すると

よって　$\displaystyle \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \boxed{\frac{c^2}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}}$.

$$g_{00} = -1 - \frac{2\phi}{c^2}$$

とするのがよい．

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i dx^j$$

だったから、 $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ を固定して

$\delta x = \delta y = \delta z = 0$ ならば…

固有時は

$$c^2 \delta\tau^2 = -\delta s^2 = g_{00}\,(c\,\delta t)^2$$

$$g_{00} \sim -\left(1 + \frac{2}{c^2}\phi\right)$$

$$\Rightarrow \quad \delta\tau \sim \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right)\delta t .$$

地表で $\phi = 0$ とすると $\delta\tau = \delta t$

地表の時計の経過時間.

$6.4 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$

高さ h が地球半径より十分小さいとして

そこでの重力ポテンシャルは gh

$$\leadsto \quad \delta\tau = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)\delta t .$$

飛行機の巡航高度: $10000\ \mathrm{m}$

$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ として $c \sim 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$ だから

一般相対論効果

$$\frac{gh}{c^2} \sim 1 \times 10^{-12} .$$ これだけ速くすすむ.

一方、巡航速度は $900\ \mathrm{km}/$時 として

特殊相対論効果

$$\frac{v^2}{2c^2} \sim 3 \cdot 10^{-13}$$ これだけ遅くすすむ

地球の中心からRのところをまわる
人工衛星のばあい：

$$m\frac{v^2}{R} = G_N\frac{Mm}{R^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad v^2 = \frac{G_N M}{R} = \frac{G_N M}{R_{地球}}\cdot\frac{R_{地球}}{R}$$

<u>一般相対論的ススみ</u>

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{G_N M}{R_{地球}} - \frac{G_N M}{R}\right)$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{G_N M}{R_{地球}}\left(1-\frac{R_{地球}}{R}\right) \qquad \text{ススむ}$$

<u>特殊相対論的おくれ</u>

$$\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2c^2}\frac{G_N M}{R_{地球}}\cdot\frac{R_{地球}}{R} \qquad \text{おくれる}$$

$\frac{R_{地球}}{R} = \frac{2}{3}$ のところでつりあう！

$R_{地球} \sim 6\cdot 10^6$ m

$R_{GPS} \sim 26\cdot 10^6$ m

$$\frac{1}{c^2}\frac{G_N M}{R_{地球}}\left(1-\frac{3}{2}\frac{R_{地球}}{R}\right) \sim 4.3\times 10^{-10} \quad \text{だけ}$$

はやくススむ.

← $g\cdot R_{地球}$

地表で一日 $= 3600\times 24$ s

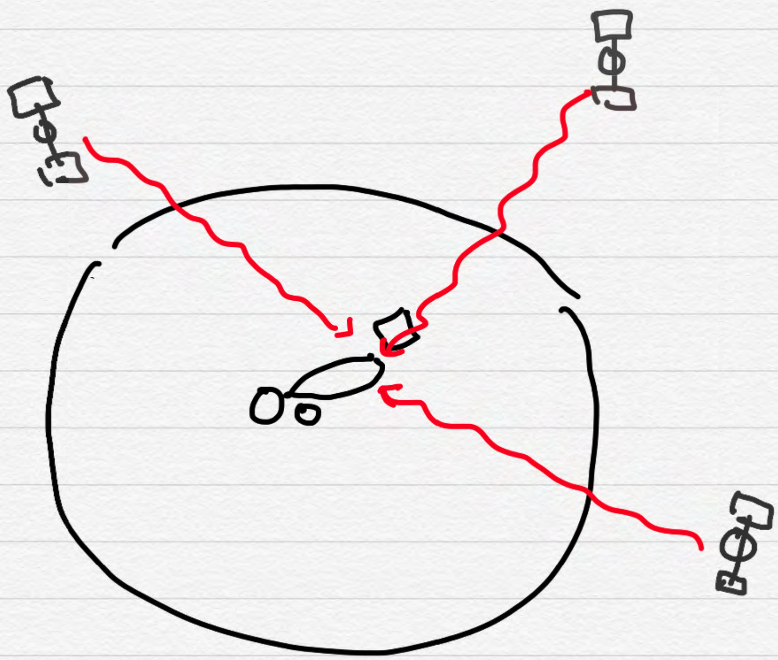
↓

GPS衛星では 一日 $- 3600\times 24\times 4.3\times 10^{-10}$ s

≀

37μs.

スマホのGPSは基本的には i番目の GPS衛星



が放送している (t_i, x_i, y_i, z_i) の値をもとに

$$c^2|t_i - t_{私}|^2 = |x_i - x_{私}|^2 + |y_i - y_{私}|^2 + |z_i - z_{私}|^2$$

を i について連立してといて $(t_{私}, x_{私}, y_{私}, z_{私})$

をわりだしている.

t_i が $1\mu s$ もずれると $c \cdot 1\mu s \sim 300m$

も誤差がでて どうしようもない.

文献　N. Ashby
'Relativity in Global Positioning System'
Living Review in Relativity. 6 (2003) 1

には　いろいろ面白いことが書いてある.

- GPS の試験版では研究グループの一部が一般相対論効果の存在に懐疑的であったため. 効果を取りいれるかどうかは打ち上げ後の測定によって決めることになっていた.

- もともとアメリカ軍の計画のため, 初期は民間はゴミの多いデータしか得られないようにしてあった.

- 上記の平均高度による一般/特殊相対論補正は (t_i, x_i, y_i, z_i) を衛星が放送する前の段階で取りいれてあるが. 軌道の離心率による更なる一般/特殊相対論補正は含まれておらず. それは受信器側で補正している. スマホは常時相対論の計算をしている!

初期の衛星の計算能力では大変だったためらしい.