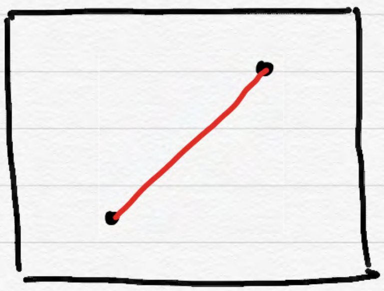
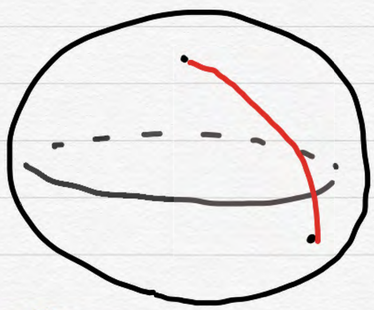
$\boxed{\text{第五回}}$

一般相対論の方程式の為には
曲がった空間のキカを学ばねばならない。大変。
(でも、大部分はキカイ的にできる。)



平面

直線が最短。



球面。 一様に曲がっている。

大円が最短。

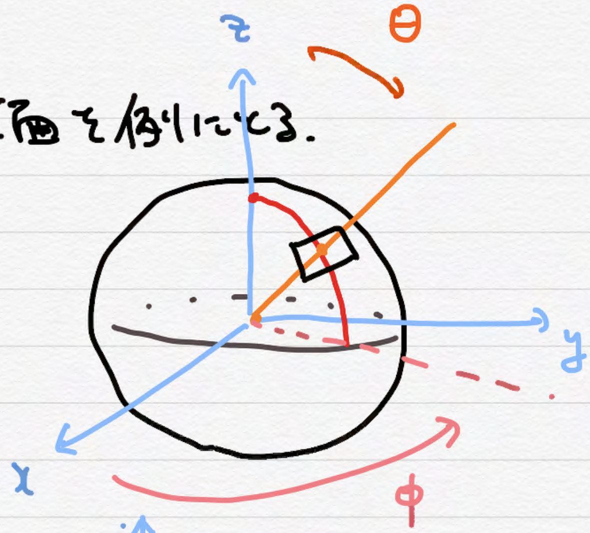
もっと一般的な
曲面。

二点間の最短経路
を測地線という。
geodesic

平らな三次元空間に
うめこまれた曲がった面 $\xrightarrow{\text{その運動}}$ シャボン玉 など

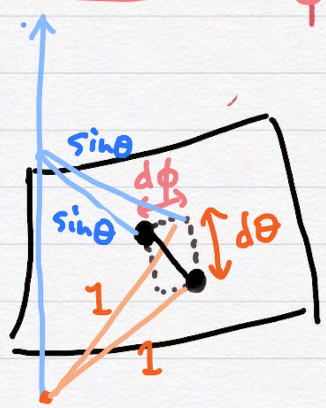
もっと抽象的に、うめこみ無しにそれ自身曲がっている
ものを考えてもよい。 $\xrightarrow{\text{その運動}}$ 重力場

球面を例にとる。



$$x^2+y^2+z^2=1.$$

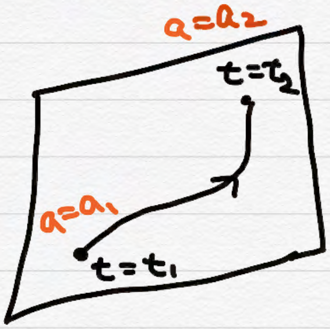
$$x=\sin\theta\cos\phi$$
$$y=\sin\theta\sin\phi$$
$$z=\cos\theta$$



微小な $d\phi$, $d\theta$ だけ離れた二点のきょり ds は

$$\boxed{ds^2=(d\theta)^2+(\sin\theta\, d\phi)^2}$$

をみたす。

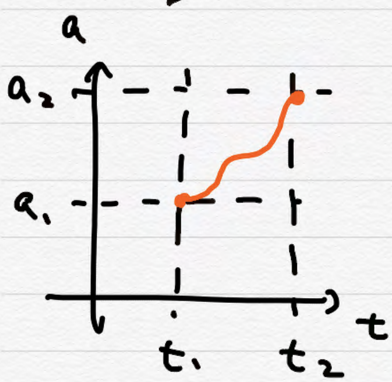


$(\theta(t),\ \phi(t))$ で与えられる曲線を考える。

長さは微小長さの和だから

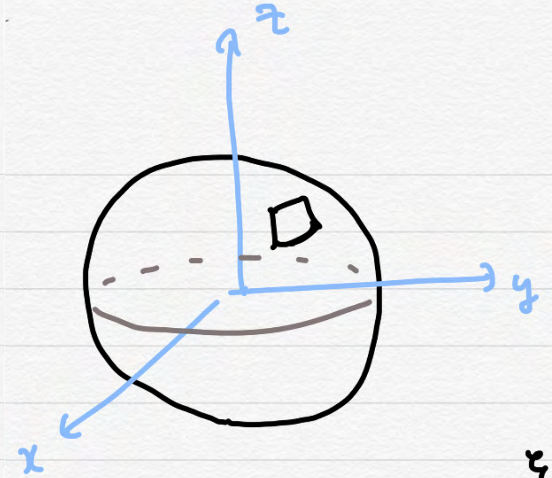
$$\int_{t_1}^{t_2} ds=\int_{t_1}^{t_2}\frac{ds}{dt}\,dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+(\sin\theta)^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2}\,dt.$$



$$=\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{\left(\frac{d\theta}{da}\right)^2+(\sin\theta)^2\left(\frac{d\phi}{da}\right)^2}\,da.$$

曲線をどうパラメタ付けするかに依存しない。

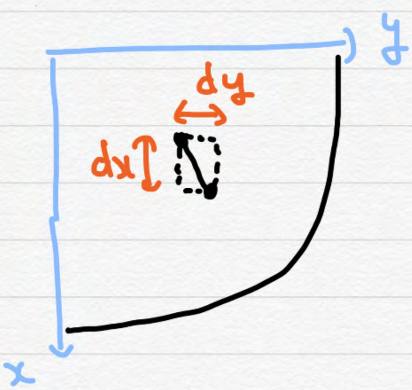


前頁では θ, ϕ を使ったが

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

を使ってもよい.

⇓ 上からみる



x, y をび小に dx, dy だけうごかすと

$$dz = \frac{\partial\sqrt{1-x^2-y^2}}{\partial x}dx + \frac{\partial\sqrt{1-x^2-y^2}}{\partial y}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x\,dx + y\,dy).$$

よって $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ （3次元空間内）

$$= dx^2 + dy^2 + \frac{1}{1-x^2-y^2}(x\,dx + y\,dy)^2.$$

曲線 $(\theta(t), \phi(t))$ は $(x(t), y(t))$ とも書ける,

ただし $x(t) = \sin\theta(t)\cos\phi(t)$

$y(t) = \sin\theta(t)\sin\phi(t)$.

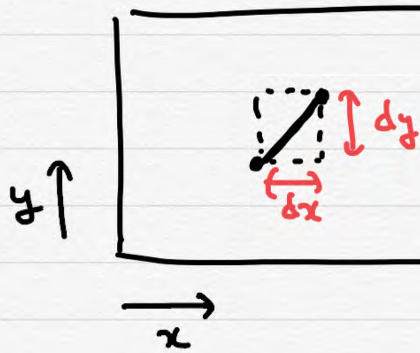
曲線の長さは

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\right)^2}\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{1-x^2-y^2}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

曲面にどう座標をいれるかにもよらない。

合成関数のビブンの公式を使えばわかる.

一般に曲がった面（埋め込まれてない）を



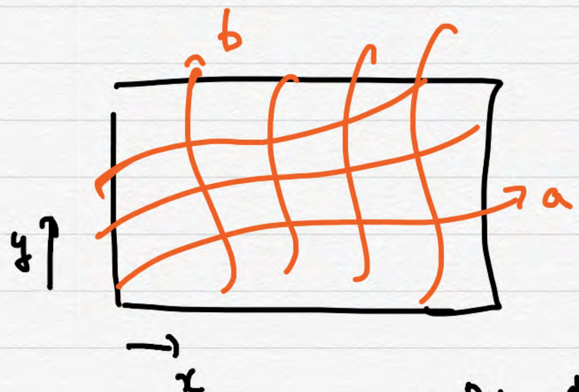
微小区間の長さが

$$\boxed{ds^2 = \bigcirc\, dx^2 + \square\, dy^2 + \triangle\, dx\,dy}$$

計量 metric と呼ぶ…

で与えられるようなもの、とする。

（勝手な$\bigcirc$, $\square$, $\triangle$が平らな空間への埋め込みで与えられるかは全く非自明。）



$$\begin{cases} x = x(a,b) \\ y = y(a,b) \end{cases} \qquad \begin{cases} a = a(x,y) \\ b = b(x,y) \end{cases}$$

と別の座標を入れると

$$\boxed{ds^2 = \$\, da^2 + \heartsuit\, db^2 + \clubsuit\, da\,db}$$

と書くことになる。

$$da = \frac{\partial a}{\partial x}dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy, \quad db = \frac{\partial b}{\partial x}dx + \frac{\partial b}{\partial y}dy$$ だから、

代入して比較すると

$$\begin{cases} \bigcirc = \left(\dfrac{\partial a}{\partial x}\right)^2 \$ + \left(\dfrac{\partial b}{\partial x}\right)^2 \heartsuit + \dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial x}\clubsuit \\[2ex] \square = \left(\dfrac{\partial a}{\partial y}\right)^2 \$ + \left(\dfrac{\partial b}{\partial y}\right)^2 \heartsuit + \dfrac{\partial a}{\partial y}\dfrac{\partial b}{\partial y}\clubsuit \\[2ex] \triangle = 2\dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial a}{\partial y}\$ + 2\dfrac{\partial b}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial y}\heartsuit + \left(\dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial y} + \dfrac{\partial a}{\partial y}\dfrac{\partial b}{\partial x}\right)\clubsuit \end{cases}$$

書くだけで大変！ でも大したことはしていない。

もう少し簡潔に書く習慣がある．一般の n 次元として．
座標を $x^1, x^2, \dots, x^n$ とする．（上付き添字．べき乗ではない．）

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{g_{ij}} dx^i dx^j$$

← 対称行列，$g_{ij} = g_{ji}$ とする．

$$= g_{ij} dx^i dx^j$$

（アインシュタインの規約：
2回でてくる添字は
1から　まで足す　）

$x^1 =: p$，$x^2 =: q$ のときは g_{12} を g_{pq} と書いたりもする．

$$ds^2 = \bullet\, dx^2 + \blacksquare\, dy^2 + \blacktriangle\, dxdy$$

のばあいは $g_{xx} = \bullet$　$g_{yy} = \blacksquare$　$g_{xy} = g_{yx} = \frac{1}{2}\blacktriangle$．

いま２種の座標系

$$x^1 \cdots x^n \ ; \ \tilde{x}^1 \cdots \tilde{x}^n$$

があったとする．

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \tilde{g}_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j$$

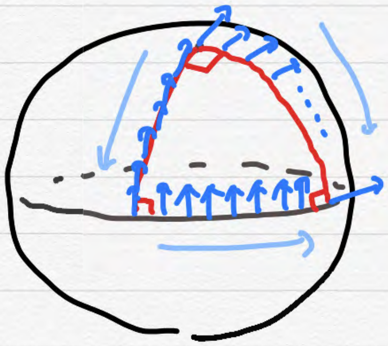
のとき，$dx^i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k$ なので

代入してヒカクすると

$$\tilde{g}_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} g_{ij}$$

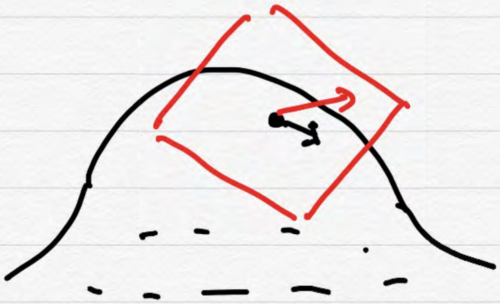
$$= \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} g_{ij}.$$

曲がった空間での"平行移動"について.



経路によって接ベクトルの
平行移動の結果が異なる.

これをどう感覚でなく
数式で捉えるか？



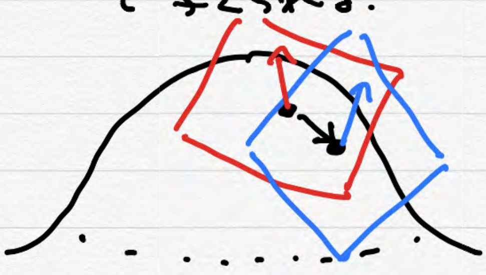
$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i dx^j$$

点 $(x^1 \cdots x^n)$ では
微小ベクトル $(dx^1 \dots dx^n)$ の
(長さ)^2 は上式で与えられる.

点 $(x^1 \cdots x^n)$ での
接空間のベクトル $(v^1 \dots v^n)$ の長さは
微小でなくても

$$|v|^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, v^i v^j$$

で与えられる.



点 $(x^1 \cdots x^n)$ での
接ベクトル $(v^1 \cdots v^n)$
を 点 $(x^1+\delta x^1, \dots, x^n+\delta x^n)$
に平行移動したものを
$(v^1+\delta v^1, \dots v^n+\delta v^n)$ とする.

δv^i はどうとるべきか？

「曲がった空間での平行移動」という概念は

業界で標準的なものがある. $\boxed{\text{要出}}$

(I) 長さを保つ : $|v|^2 = |v+\delta v|^2$

(II) 線形 : $\delta v^i = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\Gamma^i_{jk}}\, v^j \delta x^k$

この係数を決定したい.

$(x^1 \cdots x^n)$ での計量

(I) より

$$\sum_{i,j} g_{ij} v^i v^j = \sum_{i,j} (g_{ij} + \delta g_{ij})(v^i + \delta v^i)(v^j + \delta v^j)$$

$(x^1+\delta x^1 \ \cdots \ x^n+\delta x^n)$ での計量.

一次の微量を残すと

$$\sum_{i,j} \underbrace{(\delta g_{ij})}_{\displaystyle \sum_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\delta x^k} v^i v^j + \sum_{i,j} g_{ij} v^i \underbrace{\delta v^j} + \sum_{i,j} g_{ij} \underbrace{\delta v^i} v^j$$

(II) を代入

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^i v^j \delta x^k = \sum_{i,j,k,l} g_{ij} \Gamma^j_{kl} v^i v^k \delta x^l$$

$$+ \sum_{i,j,k,l} g_{ij} \Gamma^i_{kl} v^k v^j \delta x^l.$$

$\Gamma_{ikl} = \sum_j g_{ij} \Gamma^j_{kl}$ とおくと

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^i v^j \delta x^k$$

$$= \sum_{ijl} \Gamma_{ikl} v^i v^k \delta x^l + \sum_{jkl} \Gamma_{jkl} v^k v^j \delta x^l$$

$$= \sum_{ijk} \left(\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} \right) v^i v^j \delta x^k$$

となる. v^i, δx^k は勝手なので

(#) $\boxed{\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}}$ であればよい.

(#)が解ければ.

$\boxed{\Gamma_{ijk} = \sum_l g_{il} \Gamma^l_{jk}}$ だったから.

g の逆行列 $(g^{-1})^{ij}$ は

$$\sum_j (g^{-1})^{ij} g_{jk} = \delta^i{}_k = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$$

なので

$$\sum_j (g^{-1})^{ij} \Gamma_{jkl} = \sum_{j,m} (g^{-1})^{ij} g_{jm} \Gamma^m_{kl}$$

$$= \sum_m \delta^i{}_m \Gamma^m{}_{kl} = \Gamma^i_{kl}.$$

すなわち Γ_{ijk} がわかれば Γ^i_{jk} がわかるし

Γ^i_{jk} がわかれば Γ_{ijk} がわかる.

しかし

(#) $\boxed{\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}}$ は

このままでは解けない。なぜか：

Γ_{ijk} は n^3 コ 未知数。

式の数は $i.j$ が対称なので $\sim \dfrac{n^3}{2}$ コ。

方程式の数がたりない。

追加の要求

線形性 ： $\delta v^i = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \Gamma^i_{jk} v^j \delta x^k$

において、$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. --- (III)

$\Gamma_{ijk} = \sum_l g_{il}\Gamma^l_{jk}$ だから

$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj}$ と言ってもよい。

(I) 長さの保存，(II) 線形性 にくらべて

(III) は 物理的？解釈に乏しい。

[(III) をみたさないような平行移動、ひいては

重力理論を考えてもよい。

捻り(ひねり) (torsion) のある重力、という実験とあわないか…]

ともかく:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} & \cdots あ \\ \Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj} & \cdots い \end{cases}$$

を連立する.

あ′: $\dfrac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki} \overset{い}{=} \Gamma_{kij} + \Gamma_{jik}$

あ″: $\dfrac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{ikj} \overset{い}{=} \Gamma_{kij} + \Gamma_{ijk}$.

$\frac{1}{2}$(あ′ + あ″ − あ) を考えると

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

よって $\Gamma^l_{ij} = \sum_k (g^{-1})^{lk} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \dfrac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$

が わかった。

$\boxed{\text{例}}$ 球面は

$$ds^2 = d\theta^2 + (\sin\theta\, d\phi)^2 \quad \text{だった.}$$

$g_{\theta\theta} = 1$, $g_{\theta\phi} = 0$, $g_{\phi\phi} = (\sin\theta)^2$.

$(g^{-1})^{\theta\theta} = 1$, $(g^{-1})^{\theta\phi} = 0$, $(g^{-1})^{\phi\phi} = (\sin\theta)^{-2}$.

がんばって計算すると

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\theta}=0.\quad \Gamma^{\phi}_{\theta\theta}=0.\quad \Gamma^{\theta}_{\phi\theta}=0.\quad \Gamma^{\phi}_{\phi\theta}=\cot\theta.$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\phi}=0.\quad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi}=\cot\theta.\quad \Gamma^{\theta}_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta.\quad \Gamma^{\phi}_{\phi\phi}=0.$$

どういうことか？

点 (θ,ϕ) で (v^θ, v^ϕ) なる接ベクトル

（長さは $\sqrt{(v^\theta)^2+(\sin\theta\, v^\phi)^2}$ ）

を $(\theta+\delta\theta, \phi+\delta\phi)$ まで平行移動すると

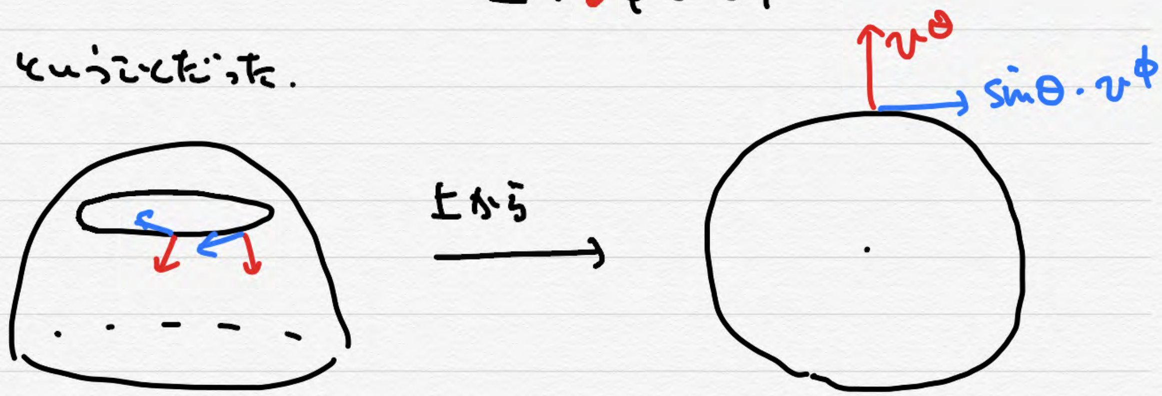
$(v^\theta+\delta v^\theta,\ v^\phi+\delta v^\phi)$ 但し

$$\delta v^\bullet = -\sum_{\bullet\bullet}\Gamma^{\bullet}_{\bullet\bullet}v^\bullet\delta x^\bullet$$

$$= -\sum_{\bullet}\Gamma^{\bullet}_{\bullet\theta}v^\bullet\delta\theta$$

$$-\sum\Gamma^{\bullet}_{\bullet\phi}v^\bullet\delta\phi$$

ということだった。



だから $(v^\theta,\ \sin\theta\, v^\phi)$ を考えるとよい。

$\delta\theta \neq 0,\ \delta\phi = 0$ のとき：

$(v^\theta, \sin\theta\, v^\phi) = (1, 0) \Rightarrow$

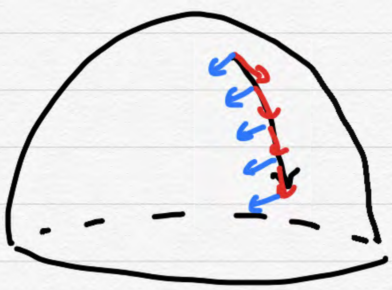
$(\delta v^\theta, \delta(\sin\theta\, v^\phi)) = (0, 0)$

$(v^\theta, \sin\theta\, v^\phi) = (0, 1) \Rightarrow$

$$(\delta v^\theta, \delta(\sin\theta\, v^\phi)) = \left(0,\ \begin{array}{l}\cos\theta \cdot \delta\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta} \\ + \sin\theta\, \delta v^\phi\end{array}\right) = (0, 0)$$

$$\delta v^\phi = -\cot\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}\, \delta\theta$$

単に



緯度方向に平行移動したとき，接ベクトルの緯度成分と経度成分は保たれるということ．

一方，$\delta\theta = 0$．$\delta\phi \neq 0$ のとき．

$(v^\theta, \sin\theta\, v^\phi) = (1, 0) \Rightarrow$

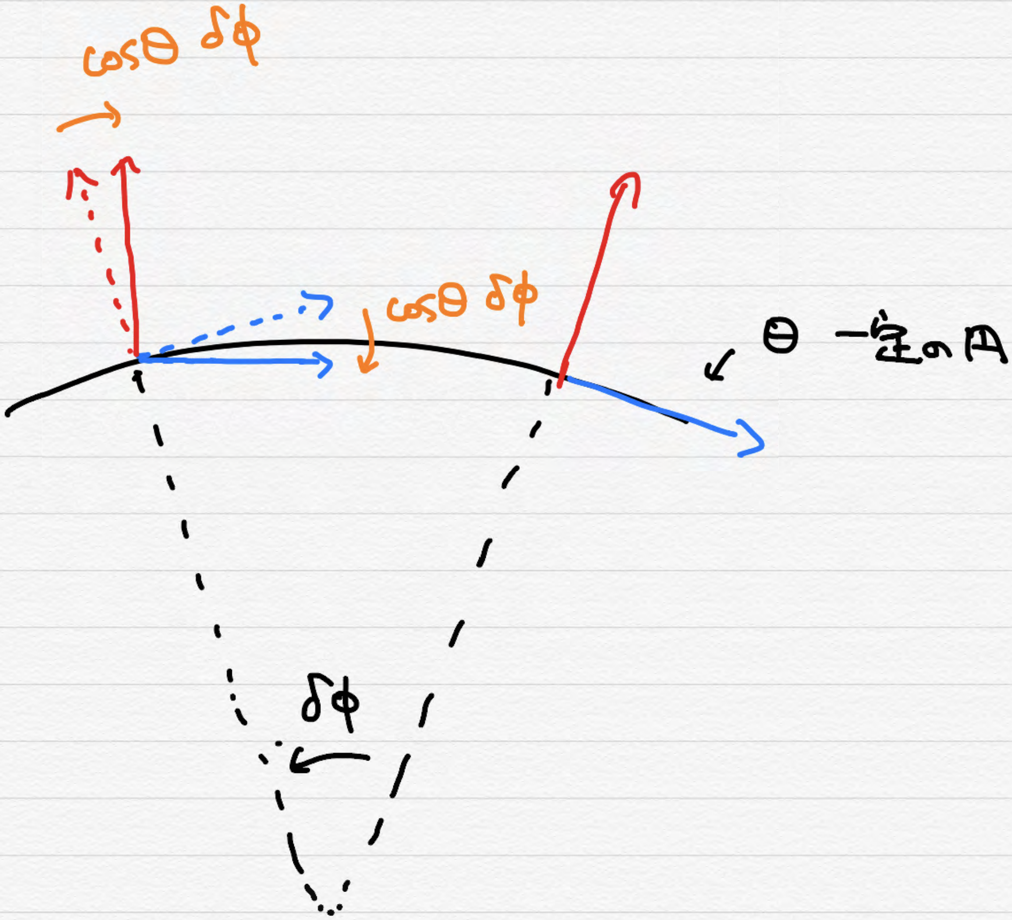
$$(\delta v^\theta, \delta(\sin\theta\, v^\phi)) = (0, \sin\theta\, \delta v^\phi)$$
$$= (0, -\cos\theta)$$

$(v^\theta, \sin\theta\, v^\phi) = (0, 1) \Rightarrow$

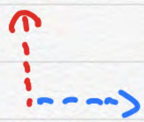
$$(\delta v^\theta, \delta(\sin\theta\, v^\phi)) = (\cos\theta, 0).$$

これはどういうことか？

球面を上からみる。



ということ。経度方向に反時計 δφ 平行移動すると

δφ 回転された軸  よりも

時計まわりに (cosθ) δφ ずれた向きに

うつされる。

北極近く、赤道近くでは確かにそうあるべき！