第4回

一般相対(性理)論
general relativity

ニュートンの重力理論は特殊相対論とあいいれない。

⇨ 特殊相対論をさらに拡張した
一般相対論というものになる.

平らな時空のもカ　曲がった時空のもカ

その前に… 力とは?

$F = ma$

マサツ力とかいろいろあるが、つきつめれば…

重力

電磁気力 ← Maxwell 19世紀 電気力 磁気力

電弱力 ← Glashow Weinberg Abdus Salam 20世紀 電磁気力 弱い力

弱い力 ← 崩壊をおこす.

強い力 ← クォークを陽子・中性子にまとめる力.

いつも量子的.

の4つがある. (3っ? 5っ?)

39K 安定　40K 不安定　41K 安定

体の1kgあたり
1sあたり
60〜70コ崩壊する
らしい.

何がそんなに違うのか???

量子電磁気学
量子弱い力
$\boxed{\text{量子強い力}}$

物理学的には確立.
実験とよく合う.
数学的にはまだ定義されていない.

定義し, 基本的な性質を証明すると
百万ドルの賞金 (ミレニアム問題のひとつ)

量子重力: 実験結果は全くない.
理論的には物理学のレベルでも
全然できていない.
ブラックホールの情報喪失問題はその一端.

クーロン力:

$$ma = F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}$$

→ a は $\frac{q}{m}$ に依存.

重力:

$$ma = F = -G_N \frac{mM}{r^2}$$

→ a は $\frac{m}{m}$ に依存
~> 依存しない.

クーロン力とくらべると

$$= -G_N \frac{\tilde{m}\tilde{M}}{r^2}$$

で m: 慣性質量
$\tilde{m}$: 重力質量

が異なってもよい気がする.

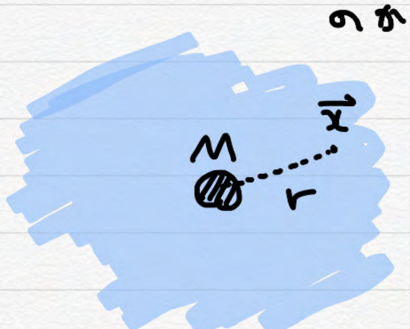
でも $m = \tilde{m}$ は実験的に確認されている.
(2017~ MICROSCOPE 実験, 10^{-15} レベル)

一般相対論は $m = \tilde{m}$ が内部に組み込まれている.

重力場

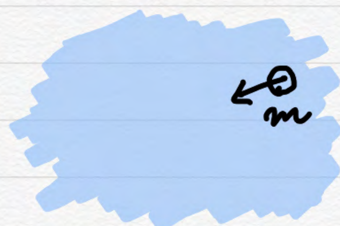
$$F = G_N \frac{Mm}{r^2}$$

のかわりに



$$\phi(\vec{x}) = -G_N \frac{M}{r}$$

がまずあって



$$m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix}$$ となる.

$\frac{\partial}{\partial x}$ は y, z をとめて x だけビブン. ------> 偏微分 partial derivative

実際 $$-\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{d}{dr}\frac{1}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{1}{r^2}$$

で $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

だから

$$m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = -m \cdot \frac{G_N M}{r} \cdot \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix}$$

$\vec{x}$ 方向の単位ベクトル.

電場も同様.

ここまでだと等価な書き換えにすぎないが

モノが無くても

重力場 / 電磁場 のゆらぎが伝わる：重力波 / 電磁波 = 光

ので場も実在する.

モノが無いときの(ニュートン)重力場の方程式：

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\phi=0.$$

$\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ の略記.

$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\frac{1}{r}=0$ を確認しよう！

$\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{r}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$ だった. よって

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{x\cdot 2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$$

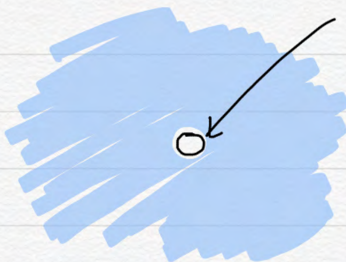
だから

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{y\cdot 2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{z\cdot 2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$$

$3(x^2+y^2+z^2)$

→ 足すとゼロ.



原点以外では何もない場合の

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\phi=0$$

の解は?

多分 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ にしか依存しないだろう.

そこで $\phi=f(r)$ と仮定すると

$$\frac{\partial}{\partial x}f(r)=\frac{x}{r}f'(r),\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(r)=\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r)$$

から

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\phi=\frac{2}{r}f'(r)+f''(r)=0.$$

$$\rightsquigarrow\quad f'(r)=\frac{\bullet}{r^2}\quad\rightsquigarrow\quad f(r)=\frac{\blacksquare}{r}+\blacktriangle.$$

また

$$\begin{cases}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\phi_1=0\\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\phi_2=0\end{cases}$$

のとき,

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right](a\phi_1+b\phi_2)=0.$$

方程式が線形.

$$\rightsquigarrow\quad \phi=\frac{\bullet}{|\vec{x}-\vec{穴}_1|}+\frac{\blacksquare}{|\vec{x}-\vec{穴}_2|}$$ も解.

(一般相対論の方程式は非線形でときにくい.)

これまでは重力場が時間に依存しない場合だった.

時間依存を許す + $\boxed{\text{特殊相対論で不変}}$

にするもっとも簡単な方法は

$$\left[-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\phi=0$$

とすること. これは クライン・ゴルドン方程式 と呼ばれる
(Klein-Gordon)

が, 重力を記述しない.

- Higgs 粒子, パイオン等の方程式に近い.
- 特殊相対論 (1905) と一般相対論 (1915) の間に Nordström によって 1912 に提唱されている. でも実験と合わなかった.
- Klein, Gordon は 1926 年.

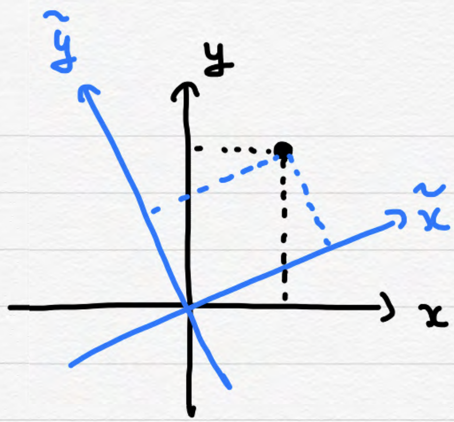
どういう事か?

より簡単にするため,

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right]\phi=0 \quad \text{が 回転不変}$$

$$\left[-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]\phi=0 \quad \text{が ローレンツ変換で不変}$$

という話をまずしよう.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\, \tilde{x} - \sin\theta\, \tilde{y} \\ \sin\theta\, \tilde{x} + \cos\theta\, \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \phi(x, y)$$

のとき、 $\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right)^2\right] \tilde{\phi} = 0$

と $\left[\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2\right] \phi = 0$

が 等価であれ 、というのが 方程式の 回転不変性 .

確認するには、一般に偏ビブンについて

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{f} = \dfrac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{f} = \dfrac{\partial x}{\partial \tilde{y}} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}}$$

を使う。

なぜか？

偏ビブンの定義は、δx, δy を微小量として

$$f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y$$

ということ。 $\parallel$

$$\tilde{f}(\tilde{x}+\delta\tilde{x}, \tilde{y}+\delta\tilde{y}) - \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}}\right)\delta\tilde{x} + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{y}}\right)\delta\tilde{y}.$$

そこで…

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}}\delta \tilde{x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{y}}\delta \tilde{y}$$

であるが，ここで

$$\delta x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \boxed{\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}}\delta \tilde{x} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}}\delta \tilde{y}}$$

$$\delta y(\tilde{x}, \tilde{y}) = \boxed{\frac{\partial y}{\partial \tilde{x}}\delta \tilde{x} + \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}}\delta \tilde{y}}$$

を左辺に代入，$\delta \tilde{x}$ と $\delta \tilde{y}$ の係数を比較して得られる．

- ε-δ 式にきちんとやってもよい．
- このまま厳密にもできる．(超準解析という．)
- 物理屋ならこれで納得してもよい．

すると $\dfrac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = \cos\theta \dfrac{\partial \phi}{\partial x} - \sin\theta \dfrac{\partial \phi}{\partial y}$

ここで $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}f = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}f$ を使った．

より
$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2}\tilde{\phi} = (\cos\theta)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2\cos\theta\sin\theta \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\phi + (\sin\theta)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

同様に
$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2}\tilde{\phi} = (\sin\theta)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\phi + (\cos\theta)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

よって
$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}}\right)^2\right]\tilde{\phi} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right]\phi.$$

$(ct, x) \longleftrightarrow (c\tilde{t}, \tilde{x})$ が

ローレンツ変換で与えられている時に

$$\phi(t,x) = \tilde{\phi}(\tilde{t},\tilde{x})$$

と場を変換すると

$$\left[-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right]\phi = 0 \quad と$$

$$\left[-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}\right)^2\right]\tilde{\phi} = 0$$

が等価なのもほとんど同じ導出である.

Klein-Gordon 方程式

$$\left[-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\phi = 0$$

は 回転でもローレンツ変換でも不変.

$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(c\tilde{t})^2 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2$$

なる勝手な線形変換で不変.

でも重力場の方程式ではない.

電磁場の従う Maxwell 方程式も

同様に回転でもローレンツ変換でも不変.

(歴史的には逆で, Maxwell 方程式から

ローレンツ変換が発見された. (Lorentz 1904

Poincaré 1905)

Einstein は物理的意味を明らかにした(1905)).