

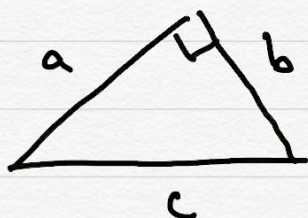
特殊相対性(性)理論 special relativity.

第三章 ①

平らな時空 (spacetime) の幾何.

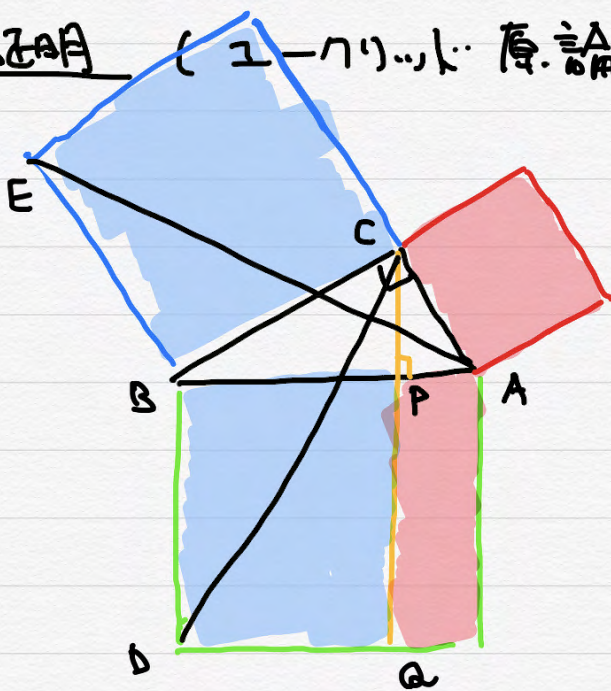
すなわち、平らな空間の力の復習から始めよう.

ピタゴラスの定理



$$a^2 + b^2 = c^2$$

証明 (ユークリッド原論 一巻のおしるしの定理.)



$\triangle ABE$ と
 $\triangle DBC$ は合同.

よって

$$\square_{\text{blue}} = \square_{\text{green}}$$

また

$$\square_{\text{red}} = \square_{\text{green}}$$

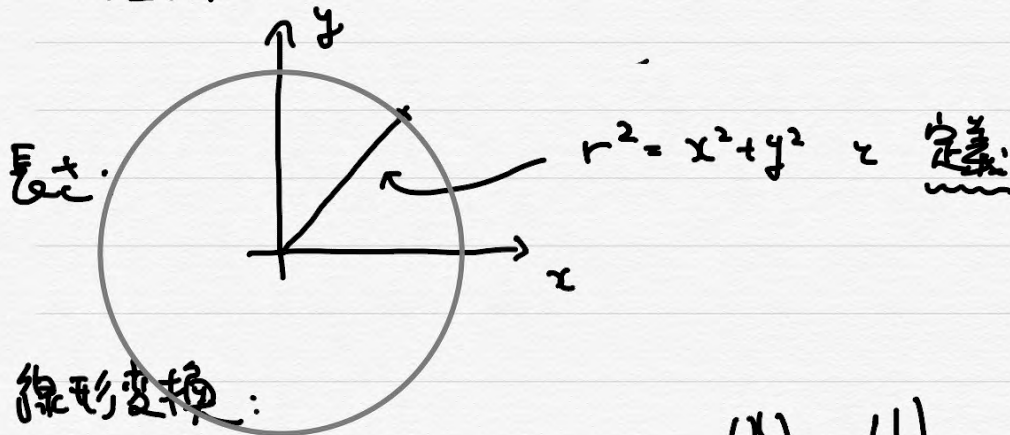
よって

$$\square_{\text{blue}} + \square_{\text{red}} = \square_{\text{green}} \quad \text{QED}$$

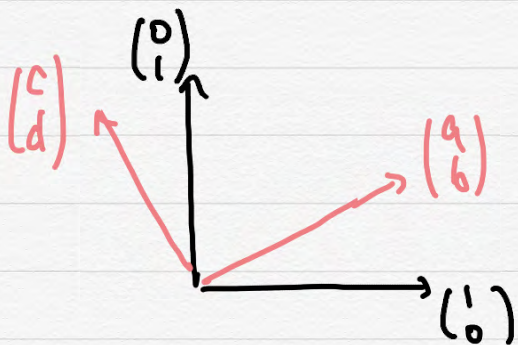
(ちなみに原論は13巻まで. 正二十面体をしらべておれ.)

- ・ 長さ, 角度 などの概念,
- ・ 回転 などで (長さ) は保たれる などの事実 (から出発)
- ・ 「2つの辺が等しいはたして角が等しい 三角形の合同」

座標系での:



線形変換:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} y \\ &= \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

回転 での 長さを保つ 線形変換 である。 と 定義

$$(x')^2 + (y')^2 = (a^2 + b^2)x^2 + 2(ac + bd)xy + (c^2 + d^2)y^2$$

$$\text{よ) } \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

三角関数 をもつて

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

と 100% 対応しているのが便利である。

これを角 θ の回転 と 定義。

角 θ の回転 + 角 φ の回転 は どうなるか？

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \theta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \theta$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cos \theta + \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \sin \theta$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) \end{pmatrix}$$

同様に

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \varphi) \\ \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix}$$

角 $\theta + \varphi$ の回転 になる。

(以上の計算においては \cos, \sin 等の

ユークリッド幾何ではなく

解析で定義したものだとしておくのが一番いい)

$$\boxed{\text{初等力学}} = \boxed{\text{座標力学}}$$

等価

ここでは 行々の世界である。

現実 / 物理 との関係は？

- ・ 身の回りのかたものには確かに固有の長さ、角度がある (ように見え、実際測定してみるときこうである。)

⇒ 初等幾何 = 座標幾何 からの
論理的帰結は身の回りのかたものに
あてはまる。

- ・ 「かたものをご回転させても長さがかわらない」
という事は不思議なことである。(?)

平らな時空のキカ ... 特殊相対論

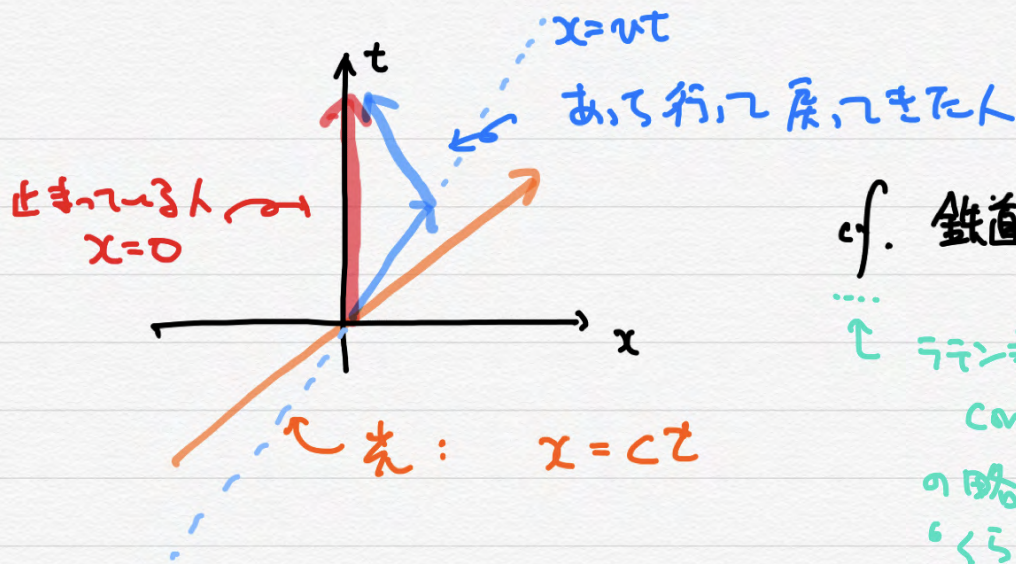
曲った ? ... 一般

←
まづは
こゝで。

- ここでと同様
- ① 初等キカの 770-4 と
 - ② 座標キカの ———— がある。

よくある教科書は ① が多くなっています。

今回の講義・時間の関係上 はじめから ② をやる。



cf. 鉄道の例.

↑
 ...
 言語
 confer
 の略.
 'くらべて'の意.

つまり $c = 299792458 \text{ m/s}$.

↑
 誤差の全範囲. 定義.

原点 $(0,0)$ と 時空点 (t,x) について

$(ct)^2 - x^2 > 0$ なる

$(c\tau)^2 := (ct)^2 - x^2$ として

τ を 固有時 (proper time)

$(ct)^2 - x^2 < 0$ なる

$x_0^2 := x^2 - (ct)^2$ として

x_0 を 固有長さ (proper length)

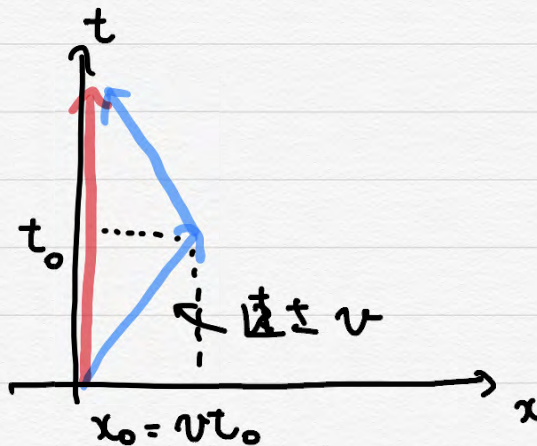
と 言う.

ローレンツ変換 による $(ct)^2 - x^2$ を保つ
 線形な座標変換のこと.

	平面的	特殊相対論
大切なもの	$+x^2 + y^2$	$+ (ct)^2 - x^2$
保つての変換	回転	ローレンツ変換

c があつたから t と x の単位が...
 伝統的に $[s]$ と $[m]$ で異なるから.
 $t' := ct$ と定めて時間を $[m]$ で測れば...
 単に $t^2 - x^2$ で. 平面的な形式が
 つかうだけ.

影響:



かかた時間

赤: $2t_0$

青: $2\tau_0$, $\tau_0 = \sqrt{t_0^2 - \frac{x_0^2}{c^2}} = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

$\approx t_0 - \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot t_0$

少し短く!



例として:

東京から大阪まで $\sim 400 \text{ km}$ と

新幹線 $\sim 200 \text{ km/h}$ で往復.

片道に $\sim 2 \text{ h} \sim 7 \cdot 10^3 \text{ s}$ かかる.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \sim \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{200 \text{ km} / 3600 \text{ s}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \right)^2$$

$\sim 2 \cdot 10^{-14}$ くらい小さい値.

\Rightarrow 往復したときの $3 \cdot 10^{-10} \text{ s} \sim 0.3 \text{ ns}$ くらい
差.

$\downarrow 10^9$

CPU のクロック: 3 GHz ... 1周期が 0.3 ns くらい.

測れなくなるかもしれない.

東京 \leftrightarrow ニューヨーク \rightarrow 飛行機で往復すると

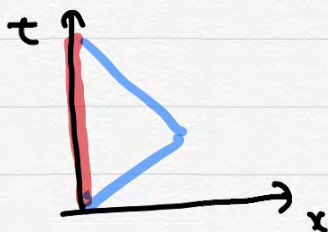
20 ns くらい差がある.

(実は同程度の一般相対論補正がある、
後述.)

Rb原子時計を持っていくと実際に差が出る.

五月祭でやってみよう???

- 10⁻¹⁴ の差の10⁹倍とかわかる.



赤と青の対等ではないから
10⁹倍とかわかる.

ローレンツ変換



$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - (x')^2$$

を要求.

$$\begin{aligned} (ct-x)(ct+x) &= (ct'-x')(ct'+x') \end{aligned}$$

たゞし、何か実数 η があつて

$$\begin{cases} ct+x = e^{\eta}(ct'+x') \\ ct-x = e^{-\eta}(ct'-x') \end{cases} \quad \text{としたい.}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\eta}+e^{-\eta}}{2} & \frac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{2} \\ \frac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{2} & \frac{e^{\eta}+e^{-\eta}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta \\ \sinh \eta & \cosh \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{としたい.}$$

何かローレンツ変換.

$$\left[\begin{aligned} &(\cosh \eta)^2 - (\sinh \eta)^2 = 1. \\ &\begin{cases} \cosh(\eta+\xi) = \cosh \eta \cosh \xi + \sinh \eta \sinh \xi \\ \sinh(\eta+\xi) = \sinh \eta \cosh \xi + \cosh \eta \sinh \xi \end{cases} \end{aligned} \right] \quad \text{としたい.}$$

$\begin{matrix} 10^3 \times A & \eta \\ 10^3 \times A & \xi \end{matrix}$ のローレンツ変換

= $10^3 \times A \eta + \xi$ のローレンツ

変換

← 合成則を使う.

変換.

回転も 実の同様にしてる.

$$x^2 + y^2 = (x')^2 + (y')^2$$

$$\Leftrightarrow (x+iy)(x-iy) = (x'+iy')(x'-iy')$$

ここで

$$\begin{aligned} x'+iy' &= \mathbb{M} (x+iy) \\ x'-iy' &= \mathbb{M}^{-1} (x-iy) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{複素共役}$$

$$\text{よって } \overline{\mathbb{M}} = \mathbb{M}^{-1}, \quad \text{よって } \mathbb{M} \overline{\mathbb{M}} = 1.$$

$$\text{よって } \mathbb{M} = \cos\theta + i \sin\theta \quad \text{よって}$$

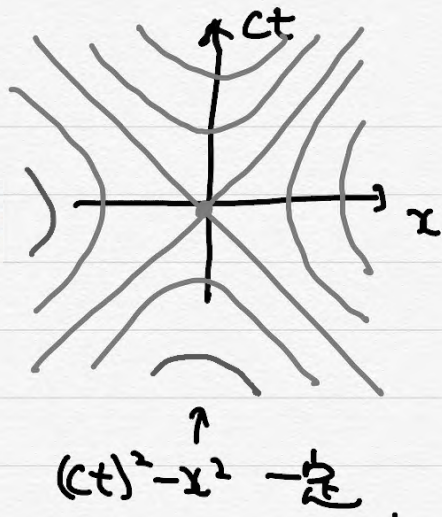
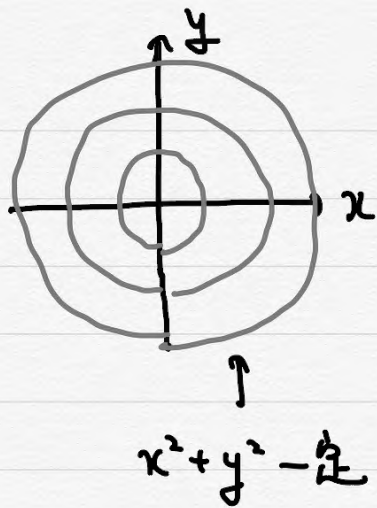
$$=: e^{i\theta}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} & -\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} & \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

これは角 θ の回転, と定義する.

まとめると:



$$\begin{aligned} x' + iy' &= e^{i\theta} (x + iy) \\ x' - iy' &= e^{-i\theta} (x - iy) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} ct' + x' &= e^{\eta} (ct + x) \\ ct' - x' &= e^{-\eta} (ct - x) \end{aligned}$$

三角関数

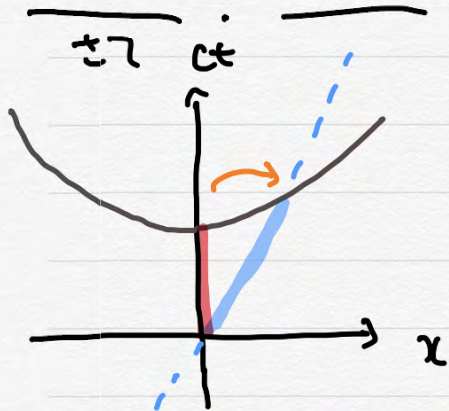
\sin, \cos, \tan



双曲線関数

\sinh, \cosh, \tanh

特殊相対論には (数学的には) エーリット幾何以上に
不思議なことは何もなし! i を使わない η は $\eta = i\theta$ である。



$$x = vt = \left(\frac{v}{c}\right) ct$$

ローレンツ変換で

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \cosh \eta \\ \sinh \eta \end{pmatrix}$$

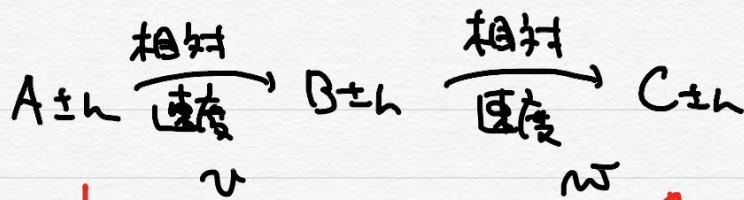
になる。

$$\frac{v}{c} = \tanh \eta = \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta}$$

一定の相対速度 v の座標系への変換である。

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \sinh \eta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

である。



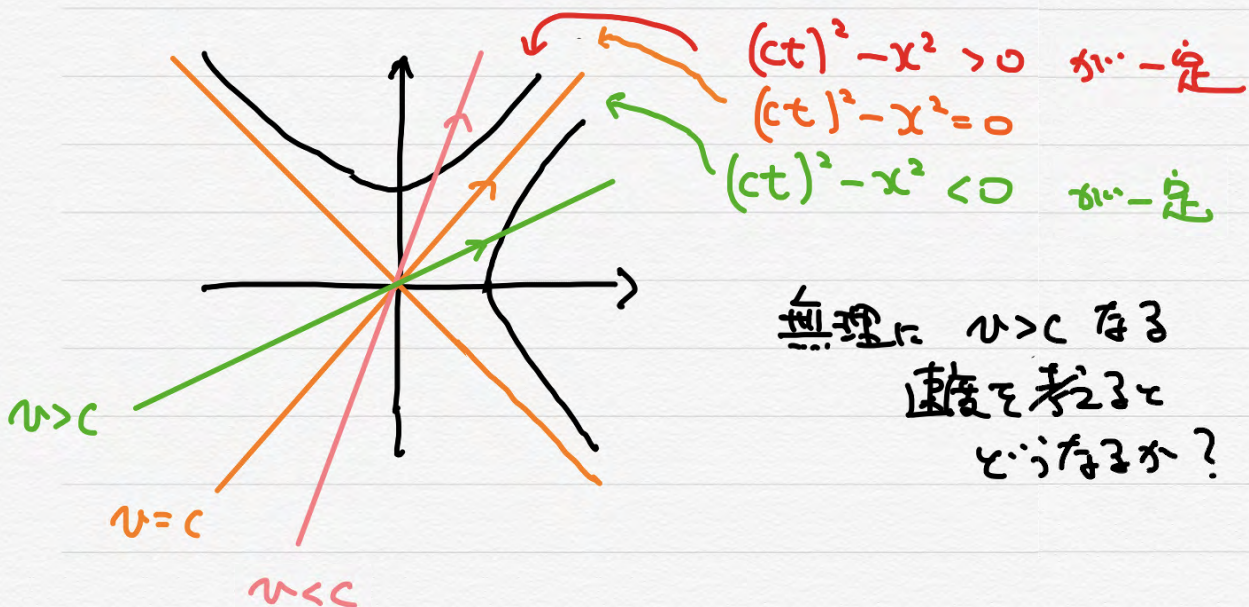
合成相対速度は？

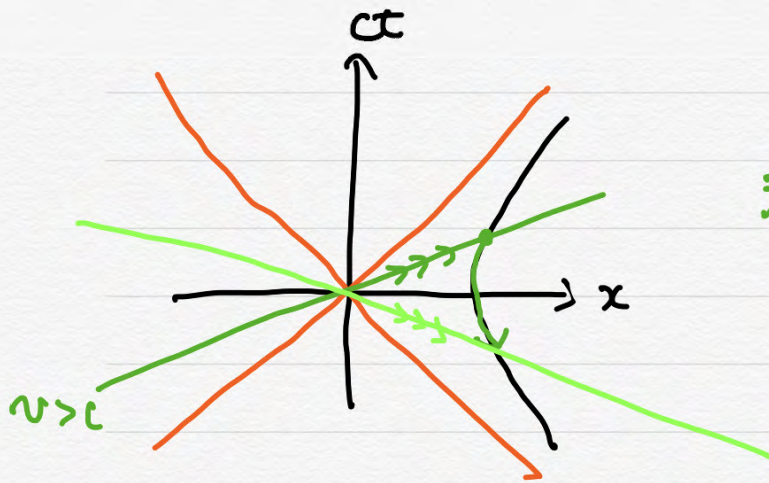
$$\frac{v}{c} = \tanh \eta \quad \frac{w}{c} = \tanh \xi$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{合成速度}}{c} &= \tanh(\eta + \xi) \\ &= \frac{\tanh \eta + \tanh \xi}{1 + \tanh \eta \tanh \xi} \\ &= \frac{(v+w)/c}{1 + vw/c^2} \end{aligned}$$

$\tanh \eta < 1$ である $\frac{v}{c} < 1$.

$\Rightarrow v > c$ なる相対速度の座標系は存在しない。





未来に進んでいるもの

過去に進んでいるものに

ローリング変換を施して

因果律を破る。

2011年に OPERA 実験 (ジュネーブでつくった
ニュートリノを Gran Sasso (イタリア) で受け、
どう変化したかを調べようという目的) が
おもしろい結果を示した:

$$\frac{731 \text{ km}}{c} \text{ よりも } 70 \text{ ns} \text{ ほど速く到着している!}$$

~ 2.5 ns

⇒ 一年間のデータの結果、2点の時刻を
合わせるために使っている GPS から測定の誤差の
4-7% のコネクターが少し緩んでいたことが
わかった。

しかしよく問題はなかった。

この episode からもわかるように、
近年では 特殊相対論 / 光速一定は
非常によく検証されている。だから

現在Tのときも「+H」の「秒」が既に
定義されている。光速が厳密に

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

となる。これ定義されている。

「秒」の定義は量子力学の所で後述。

m : 質量

$$m \begin{pmatrix} \cosh \eta \\ \sinh \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m / \sqrt{1 - (v/c)^2} \\ \frac{mv/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{pmatrix} \quad \text{を考へる。}$$

v/c で展開して はじめの教理のみとすると

$$= \begin{pmatrix} m + \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) / c^2 + \dots \\ \frac{mv}{c} + \dots \end{pmatrix}$$

↑ 高次で存した運動エネルギー

↑ 高次で存した運動量

相対論的には上記の 相対論的エネルギー

$$m \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c^2 \\ p/c \end{pmatrix}$$

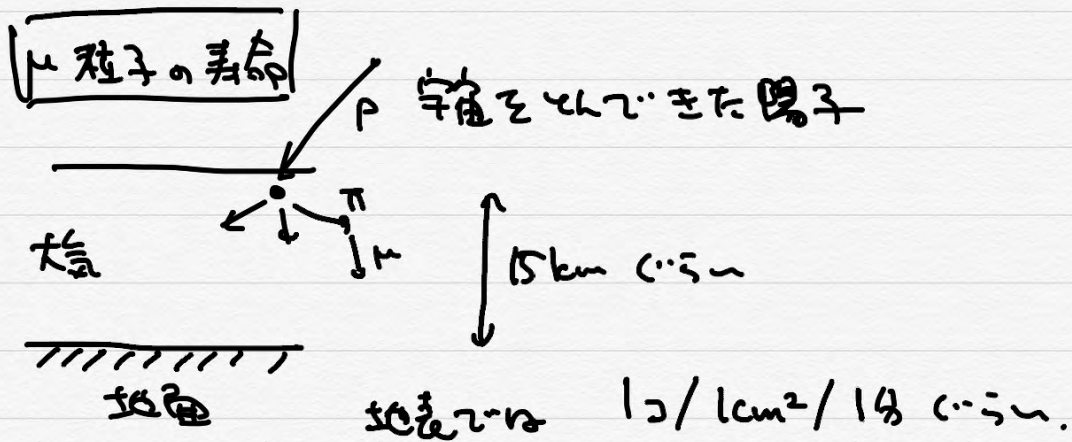
↑ 相対論的運動量

が各種保存則にあつた。

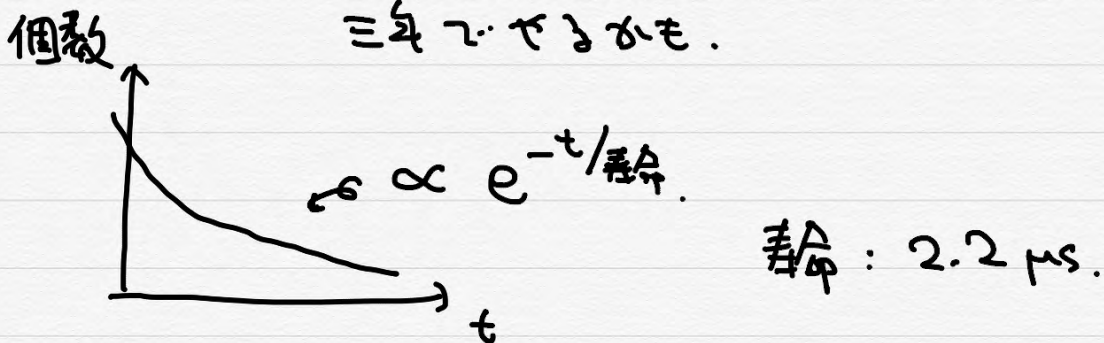
特に $v=0$ のとき $E=mc^2$.

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} =: m_* c^2 \quad \text{と 呼びやり 量 して}$$

速く存在し m_* が 大 きい 存在し,
 と 通俗 解説 書 に (5) 表 示 気 が 入 り だ い.
 あまり 便 利 存 在 し.



雲 箱 で み る の も 容 易 . 物 理 学 科 存 在
 三 年 で や る か も .



速 で 走 っ て $2\mu\text{s} \cdot c \sim 600 \text{ m}$ 程 だ .

地 表 で 届 き け り に 存 在 し .

どうなるか?

$$\mu \text{ の質量 } m_{\mu} c^2 \sim 100 \text{ MeV}$$

↑
電子1つに1V動かして
得た電子エネルギーは
1eV.

上空での強烈なエネルギーでつくられる。

相対論的エネルギーは 4 GeV くらいになる。

$$\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \sim 4 \text{ GeV}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \sim \frac{1}{40}. \quad \left(1 - \frac{v}{c} \sim \frac{1}{800}\right)$$

同じ時間だけ進む。

40倍くらい i.e. 24 km くらい進む。

地上まで到達。

一般相対(性理)論
general relativity

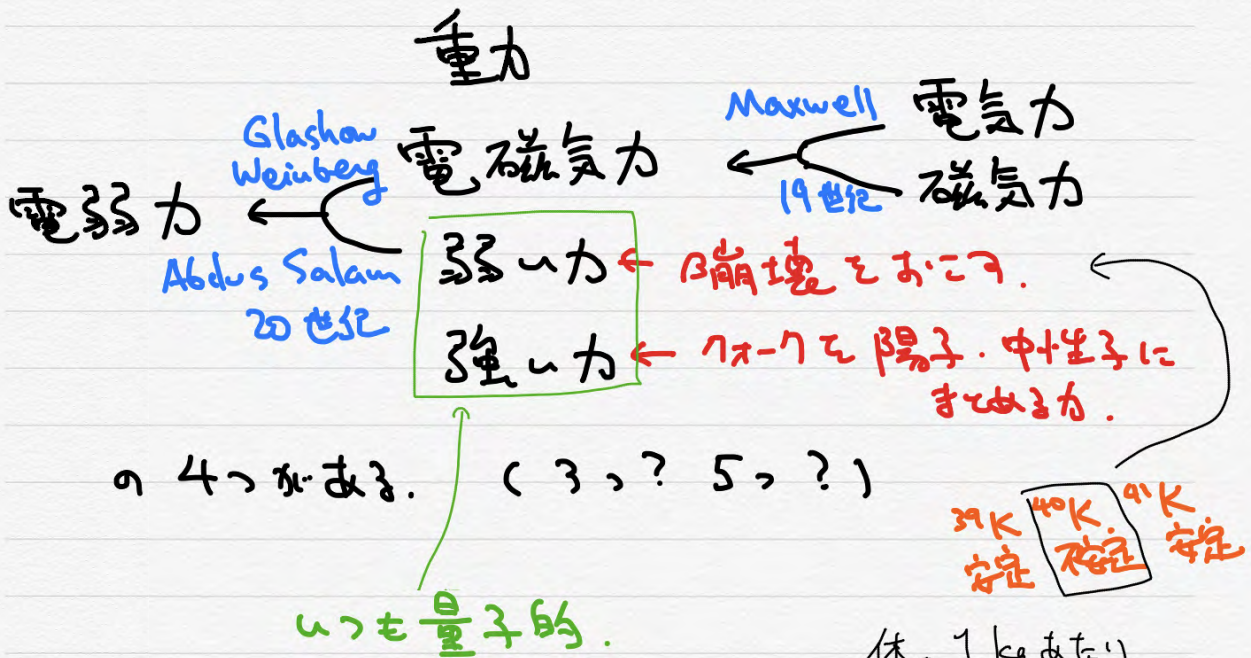
ニュートンの重力理論は特殊相対論と
あうみれなう。

⇒ 特殊相対論をさらに拡張して
一般相対論 といふことになる。
平らな時空のキカ ← 曲がった時空のキカ

その前に... 力とは?

$$F = ma$$

↑
2つの力とかいろいろあつかう。つきりぬれぬ。



体の1kgあたり
1sあたり
60~70ヶ崩壊する
5cm.

何かそんな風に迷うのか???

量子電磁気学 } 物理屋的に確立.
 量子弱ゝ力 } 実験と合う.
 量子強ゝ力 } 教学的にまだ定義中.
 ↑ 定式化、基本的な性質を証明するに
 百万ドルの資金。(ミレニアム問題のやつ)

量子重力: 実験結果は全くなし.
 理論的に物理屋のレベルでも
 全然できてない.
 グラヴィトン木の情報の喪失問題の一端.

クーロン力:

$$ma = F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \rightarrow a \propto \frac{q}{m} \text{ に依存.}$$

重力:

$$ma = F = -G_N \frac{mM}{r^2} \rightarrow a \propto \frac{M}{m} \text{ に依存} \\ \rightsquigarrow \text{独立しない.}$$

クーロン力とくらべて

$$= -G_N \frac{\tilde{m} \tilde{M}}{r^2} \quad \begin{matrix} m: \text{慣性質量} \\ \tilde{m}: \text{重力質量} \end{matrix}$$

が異なることもよくある。

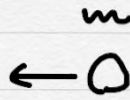
でも $m = \tilde{m}$ は実験的に確認されている。

(2017 ~ MICROSCOPE 実験, 10^{-15} レベル)

一般相対論は $m = \tilde{m}$ が内部に組み込まれている。

重力場

$$F = G_N \frac{Mm}{r^2}$$



の代わりに



$$\phi(\vec{x}) = -G_N \frac{M}{r}$$

かきまわると



$$m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} \quad \text{と可。}$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ の y, z をとめて
x だけ微分.

-----> ∂ 偏微分 partial derivative

実際

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) \frac{d}{dr} \frac{1}{r} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{1}{r^2}$$

で

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

だから

$$m \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = -m \cdot \frac{G_N M}{r^2} \cdot \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix}$$

∂
 \vec{x} 方向の単位ベクトル.

電場と同様.

ここでだいたい等価な書き換えにできるのか

ε/が無くても

重力場

電磁場

のゆらぎが伝わる:

重力波

電磁波 = 光

ので場も実在する。

ε/が無くときの(=ユ-テン)重力場の方程式:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \phi = 0.$$

↑ $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$ の略記.

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{1}{r} = 0 \quad \text{εを確認しよう!}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} \quad \text{た、た。} \quad \text{よ、よ}$$

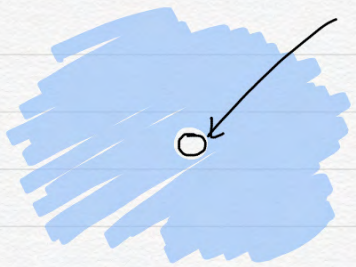
$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{3}{2} \frac{x \cdot 2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$$

た、た

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{3}{2} \frac{y \cdot 2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} + \frac{3}{2} \frac{z \cdot 2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}$$

→ 足すところ。



原点以外への何れなる場点の

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \phi = 0$$

の解は?

答分 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ にかた取りするたに3。

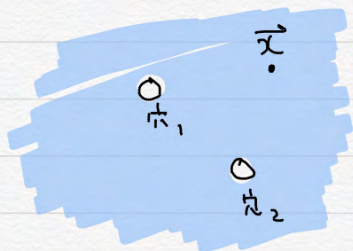
とて $\phi = f(r)$ と仮定する

$$\frac{\partial}{\partial x} f(r) = \frac{x}{r} f'(r), \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 f(r) = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) f'(r) + \frac{x^2}{r^2} f''(r)$$

$$\text{よ} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \phi$$

$$= \frac{2}{r} f'(r) + f''(r) = 0.$$

$$\leadsto f'(r) = \frac{\text{⊙}}{r^2} \quad \leadsto f(r) = \frac{\text{⊞}}{r} + \text{⊠}.$$



また

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \phi_1 = 0 \\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \phi_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{のとき} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] (a\phi_1 + b\phi_2) = 0.$$

方程式が線形

$$\leadsto \phi = \frac{\text{⊙}}{|\vec{x} - \vec{r}_1|} + \frac{\text{⊞}}{|\vec{x} - \vec{r}_2|} \quad \text{⊠}$$

(一般相対論の方程式は非線形である)

このときの重力場が時空に依存しない場合だいた.

時空依存を許す + **特殊相対論で不変**

にすることができる簡単な方法の

$$\left[-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \phi = 0$$

とすること. この $\nabla^2 \phi = 0$ のような方程式と呼ばれる (Klein-Gordon)

が. **重力を記述しない.**

- Higgs 粒子. 10次元等 a 方程式に近しい.
- 特殊相対論 (1905) と一般相対論 (1915) の間に Nordström により 1912 に提唱されている. でも実験と合わなかった.
- Klein, Gordon は 1926年.

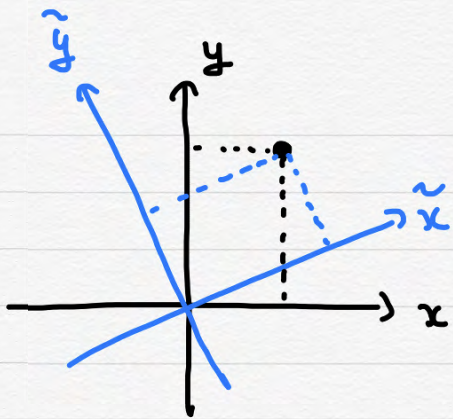
どうなるか?

より簡単にすることができる.

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] \phi = 0 \quad \text{が} \quad \text{回転不変}$$

$$\left[-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \phi = 0 \quad \text{が} \quad \text{ローレンツ変換で不変}$$

とこの話をまとめる.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \tilde{x} - \sin\theta \tilde{y} \\ \sin\theta \tilde{x} + \cos\theta \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \phi(x, y)$$

のとき, $\left[\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right] \tilde{\phi} = 0$

と $\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] \phi = 0$

が等価である

方程式の
回転不変性

不変性を確かめる, 一般に偏微分について

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \tilde{f} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \tilde{f} = \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

を扱う.

なぜか?

偏微分の定義は, $\delta x, \delta y$ は微小量と見

$$f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta y$$

と見ると.

$$\tilde{f}(\tilde{x} + \delta \tilde{x}, \tilde{y} + \delta \tilde{y}) - \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} \right) \delta \tilde{x} + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{y}} \right) \delta \tilde{y}$$

と見ると.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \delta \tilde{x} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \delta \tilde{y}$$

これを逆に、 $\delta x, \delta y$ を

$$\delta x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \delta \tilde{x} + \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} \delta \tilde{y}$$

$$\delta y(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} \delta \tilde{x} + \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \delta \tilde{y}$$

ε 左辺に代入, $\delta \tilde{x}$ と $\delta \tilde{y}$ の係数を比較して得られる.

- ε - δ 式に代入してやってみよう.
- このまま厳密にもて可なり. (超準解析を使う.)
- 物理屋ならこれだけで納得して可なり.

┌

$$\text{例} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{x}} = \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f$$

↓ 交換性.

$$\text{例} \quad \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \phi = (\cos \theta)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \phi + (\sin \theta)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$\text{同様に} \quad \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \phi = (\sin \theta)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \phi + (\cos \theta)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$\text{例} \quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right] \phi = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] \phi.$$

$$(ct, x) \leftrightarrow (c\tilde{t}, \tilde{x}) \text{ か}$$

ローレンツ変換で与えられるときに

$$\phi(ct, x) = \tilde{\phi}(c\tilde{t}, \tilde{x})$$

と場を変換すると

$$\left[-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] \phi = 0 \quad \text{と}$$

$$\left[-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \right] \tilde{\phi} = 0$$

が等価なことを示す。同じ導出である。

Klein-Gordon 方程式

$$\left[-\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] \phi = 0$$

は回転でもローレンツ変換でも不変。

$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(c\tilde{t})^2 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2$$

なる線形変換で不変。

でも重力場の方程式ではない。

電磁場の従う Maxwell 方程式で

同様に回転でもローレンツ変換でも不変。

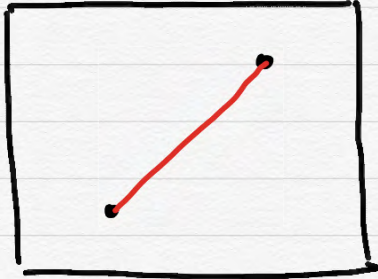
(歴史的には逆に、Maxwell 方程式から
ローレンツ変換が導き出された。(Lorentz 1904
Poincaré 1905)
Einstein の "物理的付随" を明らかにした (1905))

第五回

一般相対論の方程式の意には

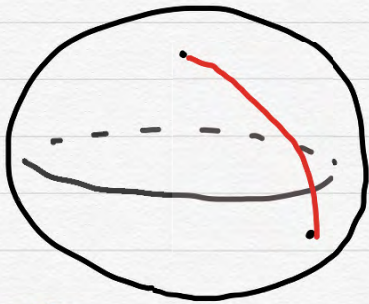
曲がった空間、力を学ばねばならぬ。大変。

(でも、大部分は力学的にできる。)



平面

直線が最短。



球面。一樣に曲がっている。

大円が最短。



もっと一般的な
曲面。

二点間の最短経路
と測地線という。

geodesic

平らな三次元空間に

曲がられた曲がった面

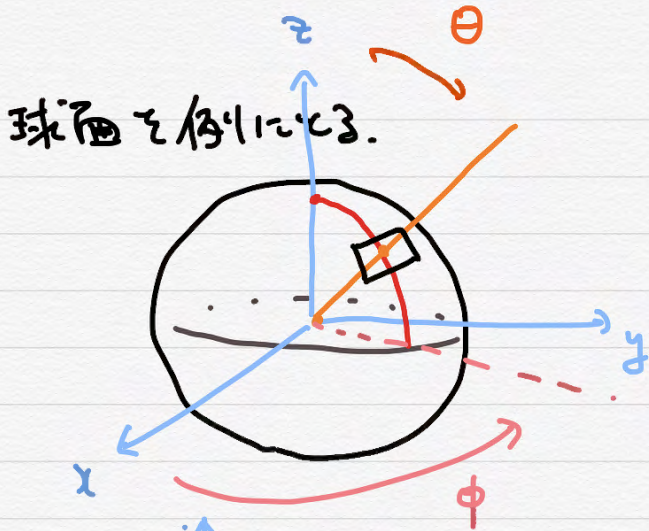
その運動

→ ニュートン 万有

もっと抽象的に、曲がりに無しに それ自身 曲がっている

ものを考えよう。

その運動, 重力場

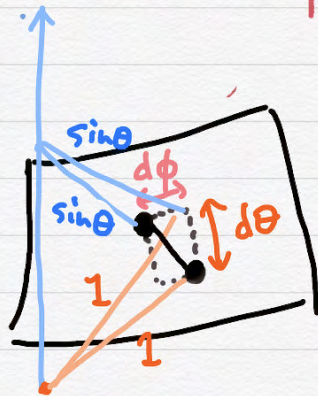


$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$x = \sin \theta \cos \phi$$

$$y = \sin \theta \sin \phi$$

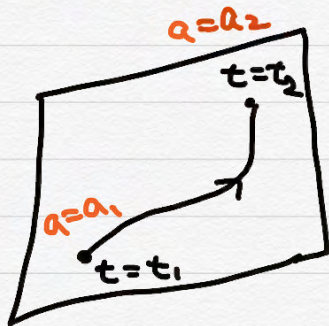
$$z = \cos \theta$$



微小な $d\phi, d\theta$ だけ離れた
二点の距離 ds は

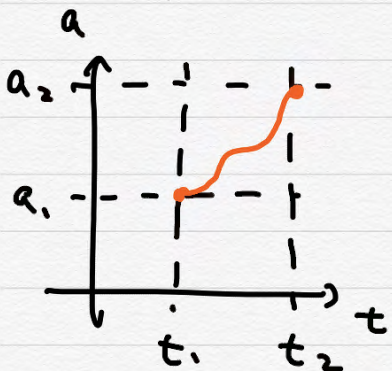
$$ds^2 = (d\theta)^2 + (\sin \theta d\phi)^2$$

と表せる.



$(\theta(t), \phi(t))$ を与えられる
曲線を考える.

上の微小区間の和から



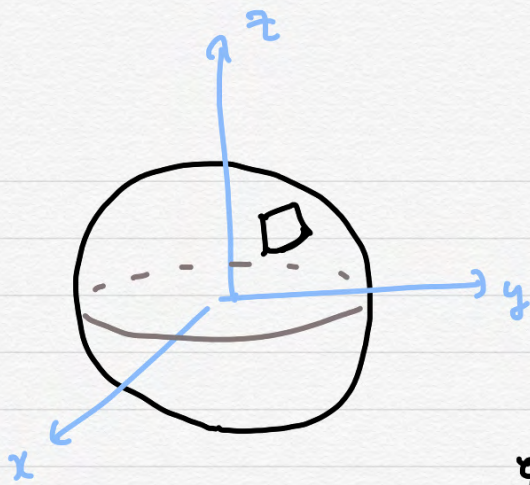
$$\int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + (\sin \theta)^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} dt.$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \sqrt{\left(\frac{d\theta}{da}\right)^2 + (\sin \theta)^2 \left(\frac{d\phi}{da}\right)^2} da.$$

曲線はこう

100%の付加価値に
依存しない.

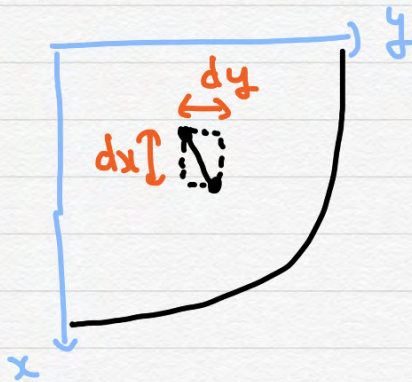


前頁の θ, ϕ を使って

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

を使えば

↓ 展開



x, y を使って dx, dy について

展開

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial \sqrt{1-x^2-y^2}}{\partial x} dx \\ &\quad + \frac{\partial \sqrt{1-x^2-y^2}}{\partial y} dy \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x dx + y dy) \end{aligned}$$

$$\therefore ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{3次元空間内})$$

$$= dx^2 + dy^2 + \frac{1}{1-x^2-y^2} (x dx + y dy)^2$$

曲線 $(\theta(t), \phi(t))$ の $(x(t), y(t))$ を使えば

$$x(t) = \sin \theta(t) \cos \phi(t)$$

$$y(t) = \sin \theta(t) \sin \phi(t)$$

曲線の長さを

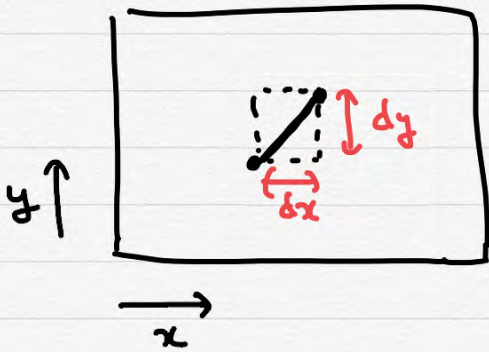
$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\sin \theta \frac{d\phi}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{1}{1-x^2-y^2} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

曲面にどう座標を
つけかにもよるよ

合成関数の微分公式を使えばわかる。

一般に曲がった面 (埋め込まれた) を

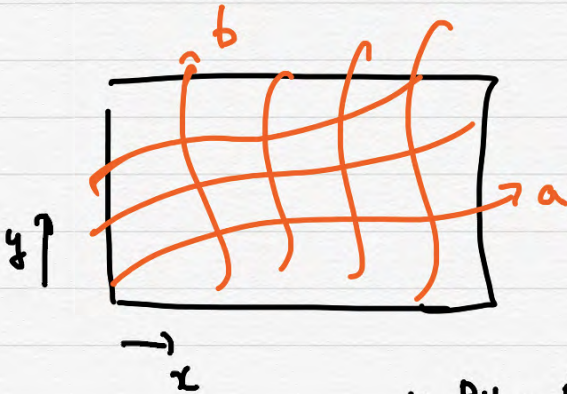
計量
metric
↓
と呼ぶ:



この区間の長さは

$$ds^2 = \textcircled{\text{///}} dx^2 + \textcircled{\text{\\}} dy^2 + \textcircled{\text{▲}} dx dy$$

で与えられるが、これは、
 異なる $\textcircled{\text{///}}$, $\textcircled{\text{\\}}$, $\textcircled{\text{▲}}$ が異なる
 空間への埋め込みで与えられる
 全く非自明。



$$\begin{cases} x = x(a, b) \\ y = y(a, b) \\ a = a(x, y) \\ b = b(x, y) \end{cases}$$

と別の座標を与える

$$ds^2 = \textcircled{\text{▲}} da^2 + \textcircled{\text{●}} db^2 + \textcircled{\text{☼}} da db$$

と書くこともできる。

$$da = \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy, \quad db = \frac{\partial b}{\partial x} dx + \frac{\partial b}{\partial y} dy \quad \text{である。}$$

これを代入すると

$$\begin{cases} \textcircled{\text{///}} = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 \textcircled{\text{▲}} + \left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2 \textcircled{\text{●}} + \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} \textcircled{\text{☼}} \\ \textcircled{\text{\\}} = \left(\frac{\partial a}{\partial y}\right)^2 \textcircled{\text{▲}} + \left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)^2 \textcircled{\text{●}} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} \textcircled{\text{☼}} \\ \textcircled{\text{▲}} = 2 \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial y} \textcircled{\text{▲}} + 2 \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} \textcircled{\text{●}} + \left(\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}\right) \textcircled{\text{☼}} \end{cases}$$

書かなくて大変! なるべく代入しない。

もう少し簡潔に書く習慣がある。一般 n 次元として、
座標を x^1, x^2, \dots, x^n とする。(上付き添字、
ベキ集りの存在。)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j$$

↖ 対称行列, $g_{ij} = g_{ji}$ とする。

$$= g_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{アインシュタイン規約: } 2\text{回} \sim \text{2回} \text{ 添字は } 1 \text{ 回 } \sim \text{2回} \text{ だけ})$$

$x^1 =: p, x^2 =: q$ のときは $g_{12} = g_{pq}$ と書いたりする。

$$ds^2 = \textcircled{\otimes} dx^2 + \textcircled{\otimes} dy^2 + \textcircled{\triangle} dx dy$$

のときは $g_{xx} = \textcircled{\otimes} \quad g_{yy} = \textcircled{\otimes} \quad g_{xy} = g_{yx} = \frac{1}{2} \textcircled{\triangle}$.

いま 2 種の座標系

$$x^1 \dots x^n ; \tilde{x}^1 \dots \tilde{x}^n$$

があったとする。

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = \tilde{g}_{ij} d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j$$

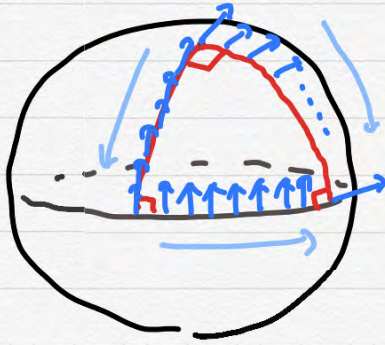
のとき、 $dx^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^k$ とする。

代入して計算すると

$$\tilde{g}_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} g_{ij}$$

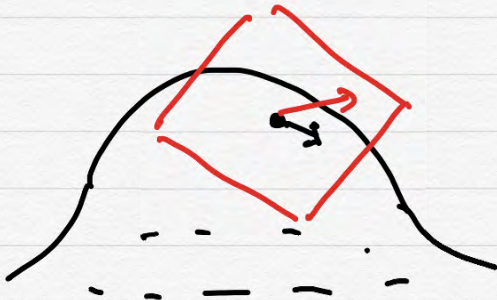
$$= \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} g_{ij}$$

曲がった空間での'平行移動'について.



経路によって接ベクトルの
平行移動の結果が異なる.

これをどう感覚でなく
数式で捉えるか?



$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

点 $(x^1 \dots x^n)$ での

微小ベクトル $(dx^1 \dots dx^n)$ の

長さ² は上式で与えられる.

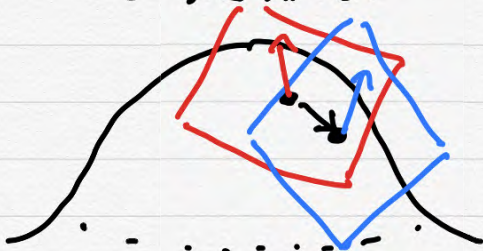
点 $(x^1 \dots x^n)$ での

接空間のベクトル $(v^1 \dots v^n)$ の長さは

微分で与えられる

$$|v|^2 = \sum_{i,j} g_{ij} v^i v^j$$

で与えられる.



点 $(x^1 \dots x^n)$ での

接ベクトル $(v^1 \dots v^n)$

と点 $(x^1 + \delta x^1, \dots, x^n + \delta x^n)$

に平行移動したものを

$(v^1 + \delta v^1, \dots, v^n + \delta v^n)$ とする.

δv^i はどうなるのか?

「曲がった空間での平行移動」という概念の結果として標準的である。 要式

(I) 長さを保つ : $|v|^2 = |v + \delta v|^2$

(II) 線形 : $\delta v^i = - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \underbrace{\Gamma_{jk}^i}_{\text{この係数を決定する}} v^j \delta x^k$

$(x^1 \dots x^n)$ の計量

この係数を決定する。

(I) より

$$\sum_{i,j} \underbrace{g_{ij}}_{(x^1 \dots x^n) \text{ の計量}} v^i v^j = \sum_{i,j} \underbrace{(g_{ij} + \delta g_{ij})}_{(x^1 + \delta x^1 \dots x^n + \delta x^n) \text{ の計量}} (v^i + \delta v^i) (v^j + \delta v^j)$$

一次の微分量を残す

$$\sum_{i,j} \underbrace{\delta g_{ij}}_{\sum_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \delta x^k} v^i v^j + \sum_{i,j} g_{ij} v^i \delta v^j + \sum_{i,j} g_{ij} \delta v^i v^j$$

↓ (II) を代入

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^i v^j \delta x^k = \sum_{i,j,k,l} g_{ij} \Gamma_{kl}^j v^i v^k \delta x^l + \sum_{i,j,k,l} g_{ij} \Gamma_{kl}^i v^k v^j \delta x^l$$

$$\Gamma_{ikl} = \sum_j g_{ij} \Gamma_{kl}^j \quad \text{etc etc}$$

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} v^i v^j \delta x^k$$

$$= \sum_{i,k,l} \Gamma_{ikl} v^i v^k \delta x^l + \sum_{j,k,l} \Gamma_{jkl} v^k v^j \delta x^l$$

$$= \sum_{i,j,k} (\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}) v^i v^j \delta x^k$$

とある。 $v^i, \delta x^k$ は任意だから。

$$(\#) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} \quad \text{でなければならない。}$$

(#) の証明

$$\Gamma_{ijk} = \sum_l g_{il} \Gamma_{jk}^l \quad \text{だから}$$

g の逆行列 $(g^{-1})^{ij}$ は

$$\sum_j (g^{-1})^{ij} g_{jk} = \delta^i_k = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

だから

$$\begin{aligned} \sum_j (g^{-1})^{ij} \Gamma_{jk} &= \sum_{j,m} (g^{-1})^{ij} g_{jm} \Gamma_{k}^m \\ &= \sum_m \delta^i_m \Gamma_{k}^m = \Gamma_{k}^i. \end{aligned}$$

だから Γ_{ijk} は Γ_{jk}^i と表わすことができる。

Γ_{jk}^i は Γ_{ijk} と表わす。

しかし

$$(\#) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} \quad \text{or}$$

この式では解けない。なぜか:

Γ_{ijk} は n^3 の未知数。

この数の i, j が対称なので $\sim \frac{n^3}{2}$ 。

1方程式の数が多い。

追加の要約

線形性:
$$\delta v^i = -\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_{jk}^i v^j \delta x^k$$

に於いて,
$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i \quad \dots \text{(III)}$$

$$\Gamma_{ijk} = \sum_{\alpha} g_{i\alpha} \Gamma_{jk}^{\alpha} \quad \text{だから}$$

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj} \quad \text{と書ける。}$$

(I) 長さの保存, (II) 線形性 に於いて

(III) の物理的? 解根に乏しい。

(III) を満たさるような平行移動。むしろ
重力理論を考えてみる。
提議) (torsion) のある重力。という実験は
あるか?

よから:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} \quad \dots \text{ア} \\ \Gamma_{ijk} = \Gamma_{ikj} \quad \dots \text{イ} \end{array} \right.$$

ε₂₃23.

$$\text{ア}' : \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} = \Gamma_{kji} + \Gamma_{jki} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{jik}$$

$$\text{ア}'' : \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{ikj} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{ijk}$$

$\frac{1}{2}(\text{ア}' + \text{ア}'' - \text{ア})$ ε₂₃23

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

$$\text{ε.2} \quad \Gamma_{ij}^k = \sum_k (g^{-1})^{kk} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

3. あか. 7c.

134 球座標

$$ds^2 = d\theta^2 + (\sin\theta d\phi)^2 \quad T_{ij}, T_{ij}$$

$$g_{\theta\theta} = 1, \quad g_{\theta\phi} = 0, \quad g_{\phi\phi} = (\sin\theta)^2.$$

$$(g^{-1})^{\theta\theta} = 1, \quad (g^{-1})^{\theta\phi} = 0, \quad (g^{-1})^{\phi\phi} = (\sin\theta)^{-2}.$$

計算する必要がある

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = 0 \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\phi} = 0 \quad \Gamma_{\phi\theta}^{\theta} = 0 \quad \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot\theta$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^{\theta} = 0 \quad \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \cot\theta \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta\cos\theta \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\phi} = 0$$

どうなるか?

点 (θ, ϕ) での速度ベクトルは

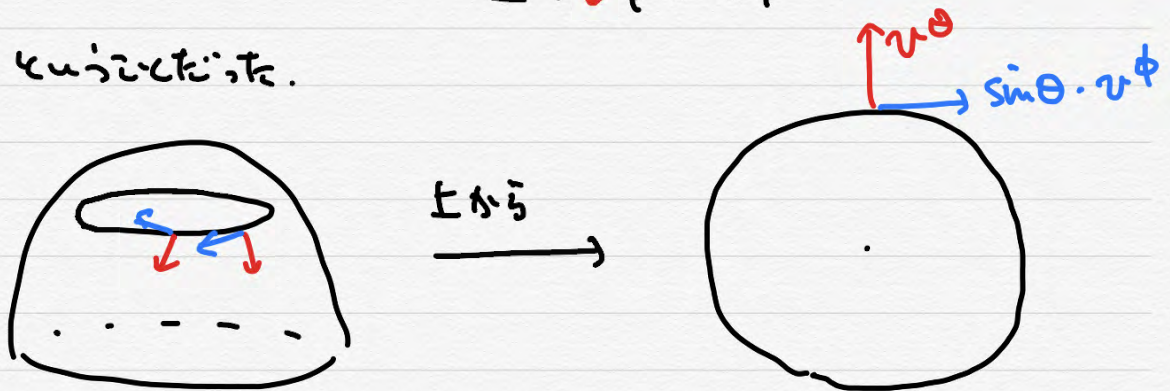
$$\left(\dot{\theta}, \sqrt{(\dot{\theta})^2 + (\sin\theta \dot{\phi})^2} \right)$$

点 $(\theta + \delta\theta, \phi + \delta\phi)$ まで平行移動する

$(v^{\theta} + \delta v^{\theta}, v^{\phi} + \delta v^{\phi})$ だと

$$\begin{aligned} \delta v^{\theta} &= -\sum \Gamma_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot} v^{\cdot\cdot} \delta x^{\cdot\cdot} \\ &= -\sum \Gamma_{\cdot\cdot\theta}^{\cdot\cdot} v^{\cdot\cdot} \delta\theta \\ &\quad - \sum \Gamma_{\cdot\cdot\phi}^{\cdot\cdot} v^{\cdot\cdot} \delta\phi \end{aligned}$$

これをたいて



だから $(v^{\theta}, \sin\theta v^{\phi})$ を考えよう

$\delta\theta \neq 0, \delta\phi = 0$ のとき:

$$(r^\theta, \sin\theta r^\phi) = (1, 0) \Rightarrow$$

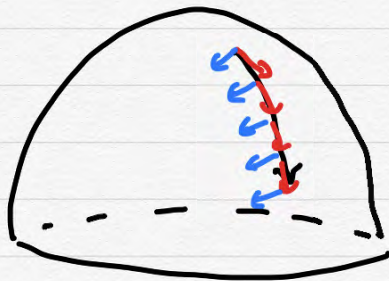
$$(\delta r^\theta, \delta(\sin\theta r^\phi)) = (0, 0)$$

$$(r^\theta, \sin\theta r^\phi) = (0, 1) \Rightarrow$$

$$(\delta r^\theta, \delta(\sin\theta r^\phi)) = \left(0, \cos\theta \cdot \delta\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta} + \sin\theta \delta r^\phi \right) = (0, 0)$$

$$\delta r^\phi = -\cot\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta} \delta\theta$$

単位



緯度方向に平行移動したとき、接ベクトルの緯度成分と経度成分は互いに垂直である。

- 方. $\delta\theta = 0, \delta\phi \neq 0$ のとき.

$$(r^\theta, \sin\theta r^\phi) = (1, 0) \Rightarrow$$

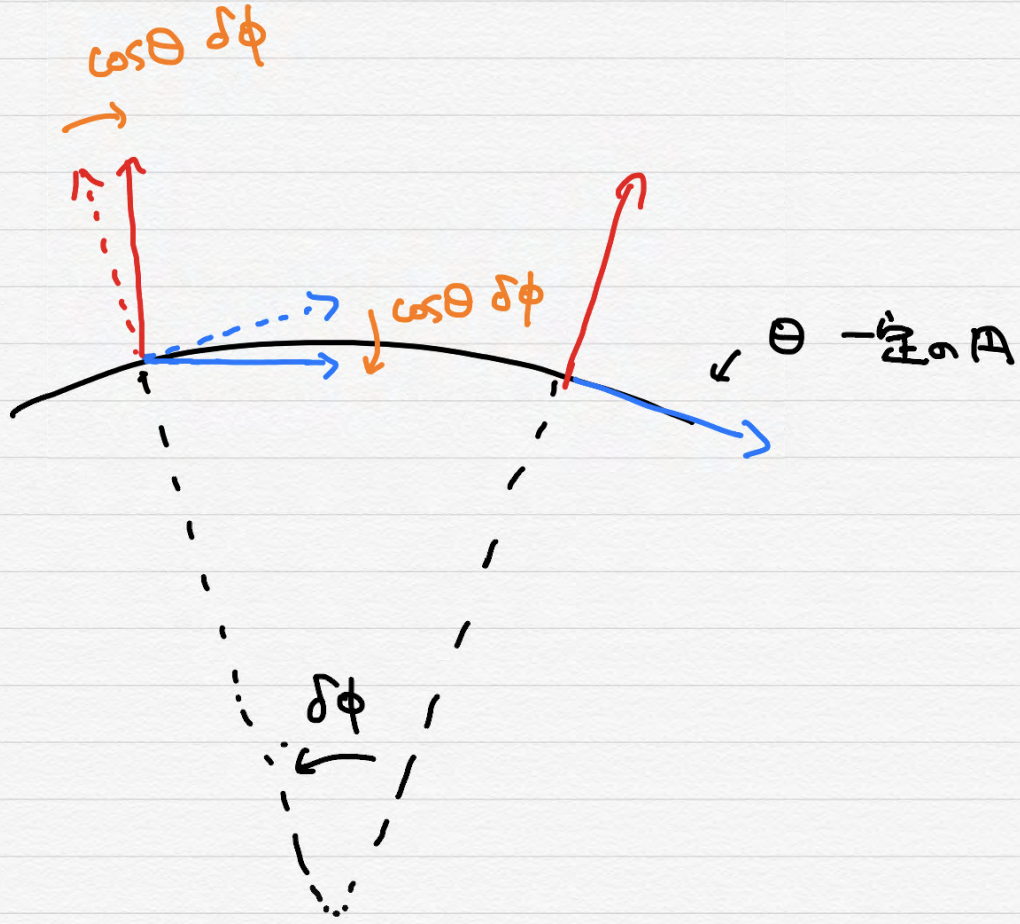
$$(\delta r^\theta, \delta(\sin\theta r^\phi)) = (0, \sin\theta \delta r^\phi) = (0, -\cos\theta)$$

$$(r^\theta, \sin\theta r^\phi) = (0, 1) \Rightarrow$$

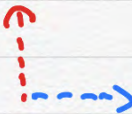
$$(\delta r^\theta, \delta(\sin\theta r^\phi)) = (\cos\theta, 0)$$

これはどうなるか？

球面を動かす。



つまり、経度方向に反時計 $\delta \phi$ 平行移動すると

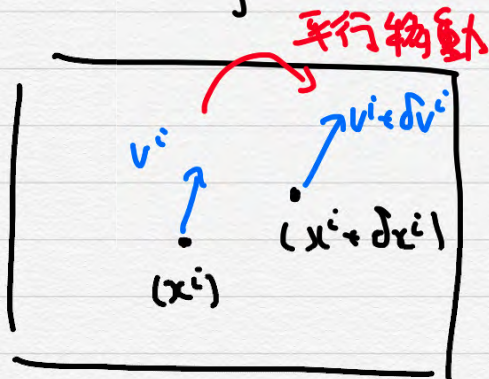
$\delta \phi$ 回転した軸  となる

時計回りに $(\cos \theta) \delta \phi$ 変わった向きに
なる。

北極近く、赤道近くでは確かにこうなる！

空間のまわり

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

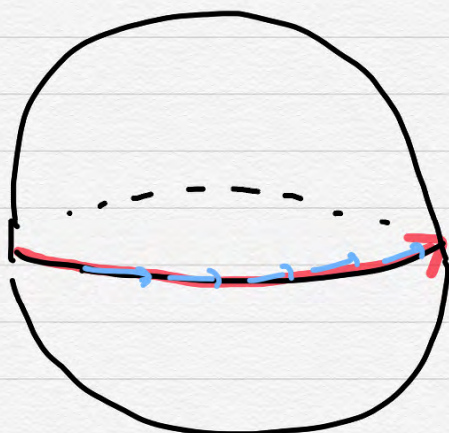


$$dv^i = - \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i v^j dx^k$$

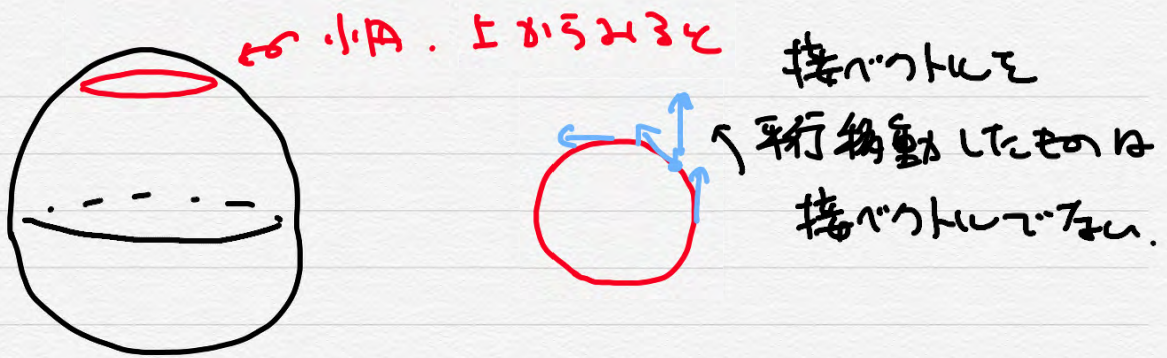
$$\Gamma_{jk}^i = \sum_{\alpha} (g^{-1})^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

平らな空間でしかかかるとして
 正しい。

曲がった空間でしかか (空間のまわり以外)
 かかるとして、正しい 道 だ。



大田: 接点として平行移動
 すると接点。



ここで:

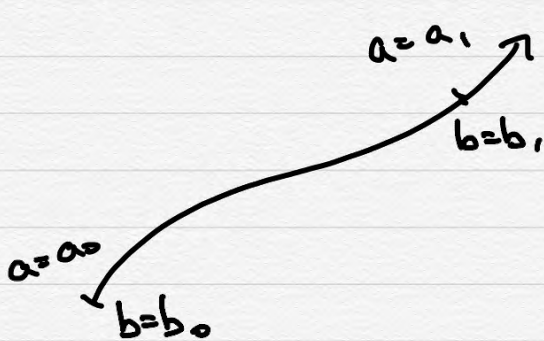
存在ベクトル場

定義 \Rightarrow

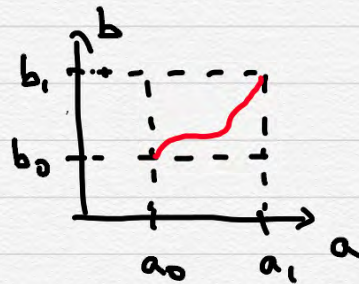
接ベクトルを平行移動したものは接ベクトルではない。

これを 測地線 (geodesic) と呼ぶ。

数式では:



曲線 $x^i(a)$ を考える。



10次元付にはいろいろな方法がある。

接ベクトル: $\frac{dx^i}{da}$

接ベクトルの長さ $\sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{da} \frac{dx^j}{da}}$ が一定になるように

10次元 τ を取る。(一定の速さで進む) とする。

x^i の 10次元 τ a と関係 τ と書こう。

$$v^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

$\delta x^i = v^i d\tau$ くらいと近似.

$$\delta v^i |_{\text{平行輸送}} = - \sum_{k,l} \Gamma_{k,l}^i v^k v^l \delta\tau$$

$$\delta v^i |_{\text{慣性の系}} = \frac{dv^i}{d\tau} \delta\tau$$

これらが等しいこと. 測地線の式 の

$$\frac{dv^i}{d\tau} + \sum_{k,l} \Gamma_{k,l}^i v^k v^l = 0$$

同じこと
だから $\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \sum_{k,l} \Gamma_{k,l}^i \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0$

一般相対論 での

①



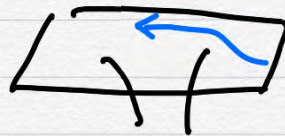
重力のおかげで時空を歪める.



こゝでは2A:

(あと2C
また準備がたいな...)

②

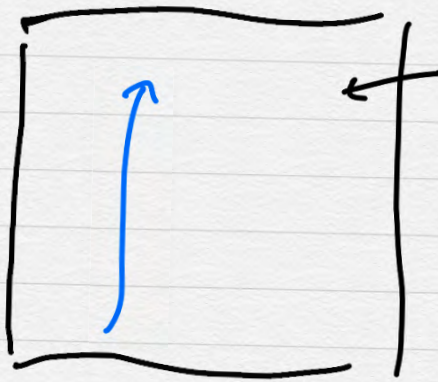


動かした時空を
tau / が動く.



こゝまでで

説明できる!



4次元時空

$$(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

計量

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

平坦な時空

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

$$\text{ただし } (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

- ① 微小には存在した2つの時空点 a 間
固有時間 $d\tau$ の

$$cd\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j}$$

- 固有長さ dx の ↑ 符号は $+, -, -, +$ の順

$$dx = \sqrt{ds^2} = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j}$$

- ② 重力以外に力はない τ の

測地線を重力 \leftarrow

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \sum_{k,l} \Gamma_{k,l}^i \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0$$

↑ 加速度が表せる $\Gamma_{k,l}^i$ が必要

重力がよくなる、時間依存せよ。

元が通るよくなる。

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

(x_1, x_2, x_3)
 (x, y, z)

であらう。

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \sum_{k,l} \Gamma_{k,l}^i \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0$$

とわかる。 (x^0, x^1, x^2, x^3)
 (ct, x, y, z)

$t \sim \tau$ なる。

$$\frac{dx^i}{d\tau} \sim \left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

とでもできる。

時間非依存なる。
 $t=0$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \frac{d^2 x_i}{dt^2} &\sim -c^2 \Gamma_{0,0}^i \\ &= -c^2 \frac{1}{2} \sum_k (g^{-1})^{ik} \left(\frac{\partial g_{0k}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0k}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^k} \right) \end{aligned}$$

$$\sum g_{ij} dx^i dx^j$$

$$\sim -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

$$\text{よって} \quad (g^{-1})^{ik} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

比較すると

$$\text{よって} \quad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$$

$$g_{00} = -1 - \frac{2\phi}{c^2}$$

とでもできる。

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

よって、 $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ と固定して
 $dx = dy = dz = 0$ ならば、

固有時間の

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 = -\underbrace{g_{00}}_{\sim -(1 + \frac{2}{c^2}\phi)} (c dt)^2$$

$$\Rightarrow d\tau \sim \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) dt$$

地表で $\phi=0$ ならば $d\tau = dt$

↑
 地表の時刻の
 経過時間。

$6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$

高さ h が地球半径より十分小さくして
 h での重力加速度を gh

$$\leadsto d\tau = \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right) dt$$

飛行機線の巡航高度: 10000 m

$g = 9.8 \text{ m/s}^2$ として $c \sim 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ならば

一般
 相対論
 効果

$$\frac{gh}{c^2} \sim 1 \cdot 10^{-12}$$

これは 速く なる。

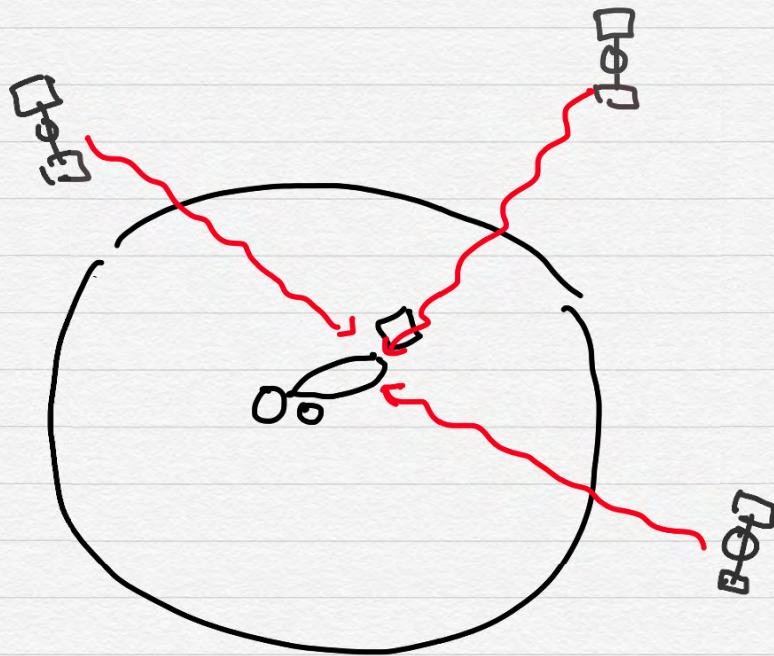
V-方、巡航速度は 900 km/時 として

特殊
 相対論
 効果

$$\frac{v^2}{2c^2} \sim 3 \cdot 10^{-13}$$

これは 遅く なる。

22本の GPS の基本的には i 番目の GPS 衛星



が放送している (t_i, x_i, y_i, z_i) の値 ε を c に

$$c^2 |t_i - t_{\text{rec}}|^2 = |x_i - x_{\text{rec}}|^2 + |y_i - y_{\text{rec}}|^2 + |z_i - z_{\text{rec}}|^2$$

と i について連立させて $(t_{\text{rec}}, x_{\text{rec}}, y_{\text{rec}}, z_{\text{rec}})$ を求められている。

t_i が $1 \mu\text{s}$ を与える $c \cdot 1 \mu\text{s} \sim 300 \text{m}$ も誤差が $7 \sim 8$ ぐらいある。

文献: N. Ashby

"Relativity in Global Positioning System"

Living Review in Relativity. 6 (2003) 1

この いろいろ面白いことが書いてある。

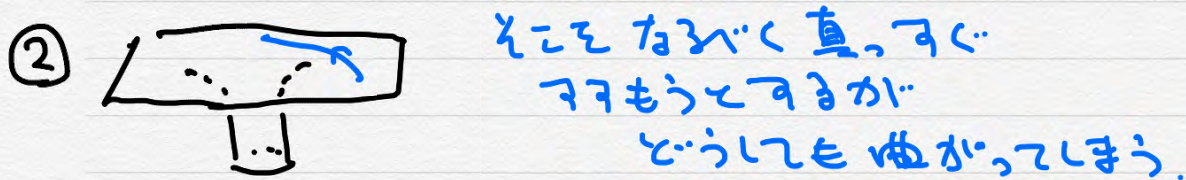
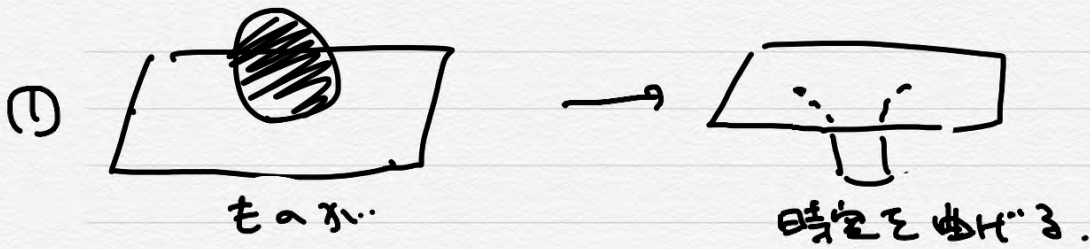
- GPS の試験版での研究グループの一部が一般相対論効果の存在に懐疑的であったため、効果を取り除くかどうかは打上げ後の測定によって決めることになった。

- 色々アメリカ軍の計画のため、初期の民間のGPSのアンテナしか得られなかった。

- 上記の平均高度による一般/特殊相対論補正の (t_i, x_i, y_i, z_i) を衛星が放送する前の段階で取り除く必要がある。軌道の離心率による更なる一般/特殊相対論補正の合計が「補正の合計が」 γ の受信器側で補正している。 **22木の常時相対論の計算をしている!**

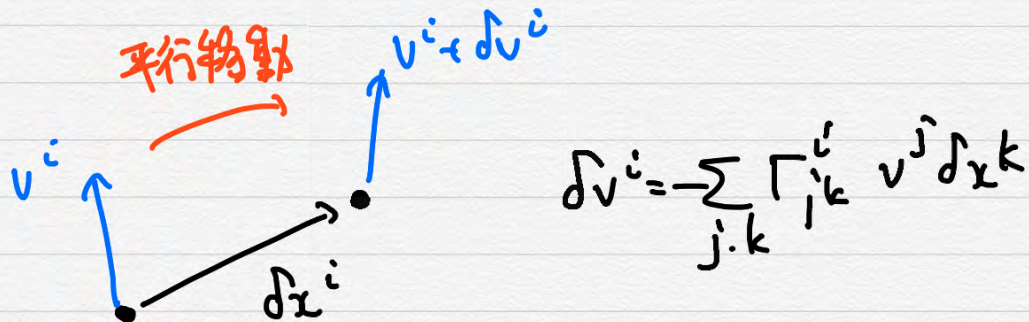
初期の衛星の計算能力が大変だったためらしい。

一般相対論では



②を前回やったので、①を学ぼう！

で、4の前には:



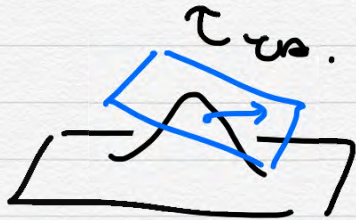
だったが、これは時空の座標の仕かたに対し
 大丈夫なのかな？

前回前に、 $\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] \phi(x, y) = 0$
 と $\left[\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right] \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$
 が、回転のあとで等価であることを確認。 $(T = x)$
 これの一般相対論版の話。

さてさて、座標変換

$$\tilde{x}^i \leftrightarrow x^i$$

のところで、接ベクトル v^i はどう変換されるか？



微小ベクトル δx^i

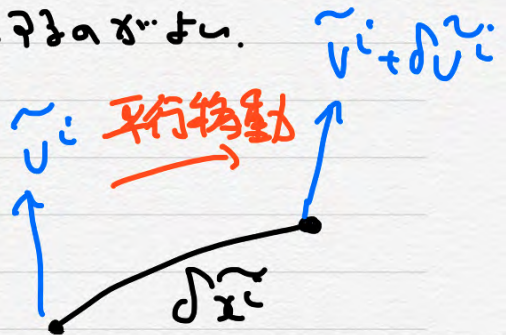
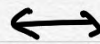
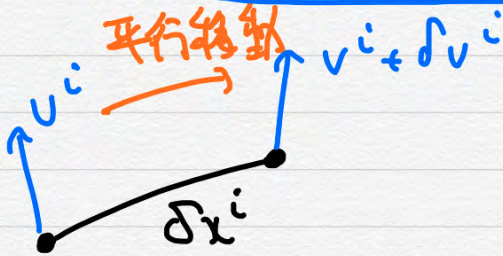
を微小で存して見ようように
伸ばしてやる。

$$\delta \tilde{x}^i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \delta x^j \quad \#$$

なる。

$$\tilde{v}^i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} v^j \quad \#$$

と可なりかよ。



か、大丈夫であるには

$$\tilde{v}^i + \delta \tilde{v}^i \stackrel{???}{=} \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \Big|_{at \ x + \delta x^i} (v^j + \delta v^j) \quad \text{か、欲しい。}$$

黒直に $\delta v \leftarrow \Gamma, \tilde{v} \leftarrow \#$

$\delta v \leftarrow \Gamma, v, \delta x$ と

一次の微小量を取り、 $v \cdot \delta x$ の位数を比較すると

$$-\sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^l} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^m} \stackrel{???}{=} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l \partial x^m} - \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \Gamma_{lm}^j \quad \#$$

と 4次元で知られる。

$\tilde{\Gamma} \in \tilde{g}$ である. $\Gamma \in g$ である.

$$g_{ij} = \sum_{k, \ell} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^\ell}{\partial x^j} \tilde{g}_{k\ell} \quad \text{これを代入して}$$

比較すればよい.

x と \tilde{x} 平行移動は

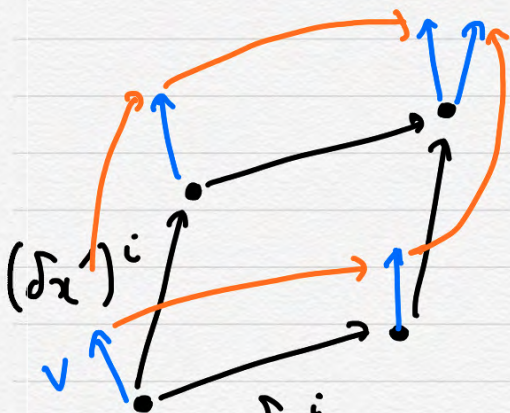
- ① 長さを保つ ② 線形 ③ $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$

で一意に決まる. ???

座標による概念..

条件③が座標変換で大丈夫であることが
前ページの式から $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{kj}^i$

と $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ の両立するから.



平行移動の考えを
考える.

δx^i として $(\delta x')^i$ を考える.

$$v^i \Rightarrow v^i - \sum_{j, k} \Gamma_{jk}^i v^j \delta x^k$$

$$\Rightarrow v^i - \sum_{\ell, m} \Gamma_{\ell m}^i (v^\ell - \sum_{j, k} \Gamma_{jk}^\ell v^j \delta x^k) (\delta x')^m$$

$x^i + \delta x^i$
での値

... ①

$$- \sum_{j, k} \Gamma_{jk}^i v^j \delta x^k$$

$$-\sum_{\ell, m} \Gamma_{\ell m}^i v^\ell (\delta x')^m$$

$$\frac{d}{dt} (\delta x')^i \approx \delta x^i \approx \delta x^i$$

$$v^i - \sum_{j, k} \Gamma_{jk}^i (v^j - \sum_{\ell, m} \Gamma_{\ell m}^j v^\ell (\delta x')^m) \delta x^k$$

$x + \delta x'$ での値

... ②

① と ② の差 ε $\delta x, \delta x'$ の高次項 \rightarrow 2次項 ε^2

$$\sum_{\ell, k, m} -\frac{\partial \Gamma_{\ell m}^i}{\partial x^k} v^\ell \delta x^k (\delta x')^m + \sum_{j, \ell, k, m} \Gamma_{\ell m}^i \Gamma_{jk}^\ell v^j \delta x^k (\delta x')^m$$

$$+ \sum_{j, k, m} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^m} v^j \delta x^k (\delta x')^m - \sum_{j, \ell, k, m} \Gamma_{jk}^i \Gamma_{\ell m}^j v^\ell \delta x^k (\delta x')^m$$

$$=: -\sum_{j, k, m} R^i{}_{jkm} v^j \delta x^k (\delta x')^m$$

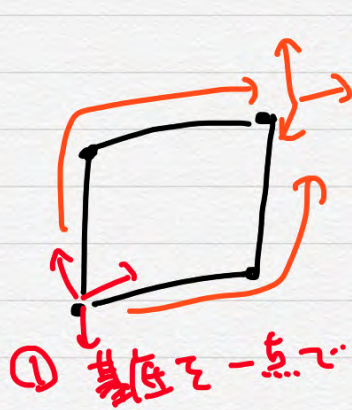
$$R^i{}_{jkm} = \frac{\partial \Gamma_{jm}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^m}$$

$$+ \sum_{\bullet} \Gamma_{\bullet k}^i \Gamma_{jm}^{\bullet} - \sum_{\bullet} \Gamma_{\bullet m}^i \Gamma_{jk}^{\bullet}$$

リ-マン曲率 ε^2 .

$R^i{}_{jkl}$ が全部 = 0

\Leftrightarrow 時空が平ら。



① 基底を一点で定めておく。

② γ の基底を平行移動して他の点にもっていく。

$R^i{}_{jkl} = 0$ ならば
この経路に依存しない。
 \leadsto 全ての点で揃ったときに基底が変わる。

③ γ を使って座標系を定める。

④ γ の座標系では $ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ となる。

$R^i{}_{jkl}$ の座標変換でどう変わるか？

$$\tilde{x}^i \leftrightarrow x^i \quad a \in \mathbb{Z}^4$$

Ⓜ $dx^i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} dx^j$

Ⓜ $\tilde{v}^i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} v^j$ となる。

$$\left(\tilde{v} \in \square \uparrow \text{ (ただし } a \neq 0 \text{ の } \mathbb{Z}^4 \text{)} \right)^i = \sum_j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \left(v \in \square \uparrow \text{ (ただし } a \neq 0 \text{ の } \mathbb{Z}^4 \text{)} \right)^j$$

の形である。

よって

$$\sum_{\tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{e}} \tilde{R}^{\tilde{c}}_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{e}} \tilde{v}^{\tilde{j}} \delta_{\tilde{k}}^{\tilde{c}} (\delta_{\tilde{e}}^{\tilde{c}})^{\tilde{e}}$$

$$= \sum_i \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{c}}}{\partial x^i} \sum_{j,k,e} R^i_{jke} v^j \delta_x^k (\delta_{x^e})^e$$

④, ⑤ 条件を比較すると

$$\sum_{\tilde{j}, \tilde{k}, \tilde{e}} \tilde{R}^{\tilde{c}}_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{e}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{k}}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{e}}}{\partial x^e} = \sum_i \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{c}}}{\partial x^i} R^i_{jke} \quad \text{⑥}$$

$$M^{\tilde{c}}_i = \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{c}}}{\partial x^i}, \quad N^i_{\tilde{c}} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{\tilde{c}}} \quad \text{は互いに逆行列}$$

⑥ の両辺を (j, k, e を固定して) \tilde{c}, i にかんじて
 左辺を \tilde{c} について行列表 M が i にかんじて \tilde{c} について
 両辺に逆行列 N をかける

$$R^i_{jke} = \sum_{\tilde{c}} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{\tilde{c}}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{k}}}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{e}}}{\partial x^e} \tilde{R}^{\tilde{c}}_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{e}}$$

がわかった。(特にある座標系で $R^i_{jke} = 0$
 なら他の座標系でも $\tilde{R}^{\tilde{c}}_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{e}} = 0$.)

上式で $i = k$ としてみる

$$\sum_i R^i_{jil} = \sum_i \sum_{\tilde{c}} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{\tilde{c}}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{l}}}{\partial x^l} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{e}}}{\partial x^e} \tilde{R}^{\tilde{c}}_{\tilde{j}\tilde{k}\tilde{e}}$$

逆行列

$$= \sum_{\tilde{j}, \tilde{e}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{e}}}{\partial x^e} \sum_{\tilde{c}} \tilde{R}^{\tilde{c}}_{\tilde{j}\tilde{c}\tilde{e}}.$$

よって $R_{je} := \sum_i R^i_{jic}$ ← Ricci 曲率

$$\tilde{R}_{\tilde{j}\tilde{e}} := \sum_{\tilde{c}} \tilde{R}^{\tilde{c}}_{\tilde{j}\tilde{c}\tilde{e}} \quad \text{と定まる}$$

$$R_{je} = \sum_{\tilde{j}, \tilde{e}} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{j}}}{\partial x^j} \frac{\partial \tilde{x}^{\tilde{e}}}{\partial x^e} \tilde{R}_{\tilde{j}\tilde{e}}.$$

ある座標系で R_{ij} が全て 0

↔ 他の座標系で $\tilde{R}_{\tilde{c}\tilde{d}}$ が全て 0.

「物質の無いところでのアインシュタイン方程式」

$$R_{ij} = 0$$

座標系によらぬ条件.

重力が与えられる場合,

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \sum_{ij} \textcircled{ij} dx^i dx^j.$$

さらに

① が時空 x^0 によらぬとすると

$$R_{00} \sim \sum_{i=1,2,3} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^2 \textcircled{00}.$$

よって $\textcircled{00}$

は

$\textcircled{00}$

に帰着.

二つが空での重力場の方程式!!!

Γ-方程式の解!

座標をどうとれるか?



角度方向のうまおすに

θ, ϕ で 105x1 みたいなの。

単位球面の計量

$$ds^2 = r^2 (d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2)$$

面積 $4\pi r^2$ の球面の計量

回転対称で時間に依存しない 4次元時空の計量は

$$ds^2 = -F(r) c^2 dt^2 + G(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2)$$

$r > L$ での r の値を r とし $r < L$ での r の値を r とし

$$R_{ij} = 0.$$

計算は手計算の代わりに Mathematica を使う...

$$x^1 = ct, x^2 = r, x^3 = \theta, x^4 = \phi \quad \text{とす。}$$

この $x^{0,1,2,3}$ には r が θ である。Mathematica は

守則に従って添字は 1 から始まる。2 番目の r とした。

講義ノートにある Mathematica の例を参照。

$$G(r)R_{11} + F(r)R_{22} = \frac{(G(r)F(r))'}{rG(r)}$$

と仮定して $F(r)G(r) = \text{定数}$.

$$r \rightarrow \infty \text{ での } ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2)$$

に近づくと $r \rightarrow \infty$ のとき

$$F(r)G(r) = 1.$$

これを G で消去. すると

$$R_{33} = 1 - (rF(r))'$$

と仮定して $rF(r) = r + \text{定数}$.

$$F(r) = 1 + \frac{\text{定数}}{r}$$

$c^2 dt^2$ の係数 $-F(r)$ が重力が弱くなるにつれて

$$-\left(1 + \frac{2}{c^2} \phi\right)$$

だから. 遠方での $\phi = -\frac{2}{c^2} \phi$ 重力

$$\phi = -\frac{G_N M}{r}$$

$$F(r) = 1 - \frac{2G_N M}{c^2} \cdot \frac{1}{r}.$$

計量の

シュバルツシルト解!!

シュワルツシルト ...

とも言う.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2G_N M}{c^2} \cdot \frac{1}{r}\right) c^2 dt^2$$

Schwarzschild

$$+ \frac{1}{1 - \frac{2G_N M}{c^2} \cdot \frac{1}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2).$$

結果は先ほど複雑である。

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad \varepsilon \quad \text{シュバルツシルト半径である。}$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2)$$

\uparrow
 $r = r_s$ で $c=0$

\uparrow
 $r = r_s$ で 発散。

時間が止まる。

でも無限に遠く??

$$G_N \sim 6.67 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

$$c \sim 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \frac{2GM_{\text{太陽}}}{c^2} \sim 3 \text{ km}$$

$$M_{\text{太陽}} \sim 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$r \sim r_s$ のあたりで何かおこるのかを知らねば

座標変換をなさなければならない。

領域 $r > r_s$ において

$$\rho = \left(\cosh \frac{ct}{2r_s} \right) \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{\frac{r}{2r_s}}$$

$$\tau = \left(\sinh \frac{ct}{2r_s} \right) \sqrt{\frac{r}{r_s} - 1} e^{\frac{r}{2r_s}}$$

とすると
 $d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial ct} d(ct) + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr$

$dp = \frac{\partial \rho}{\partial ct} d(ct) + \frac{\partial \rho}{\partial r} dr$

と整理して

おこなうと整理

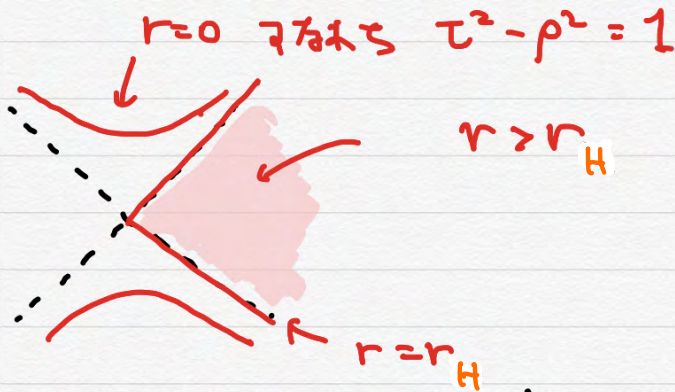
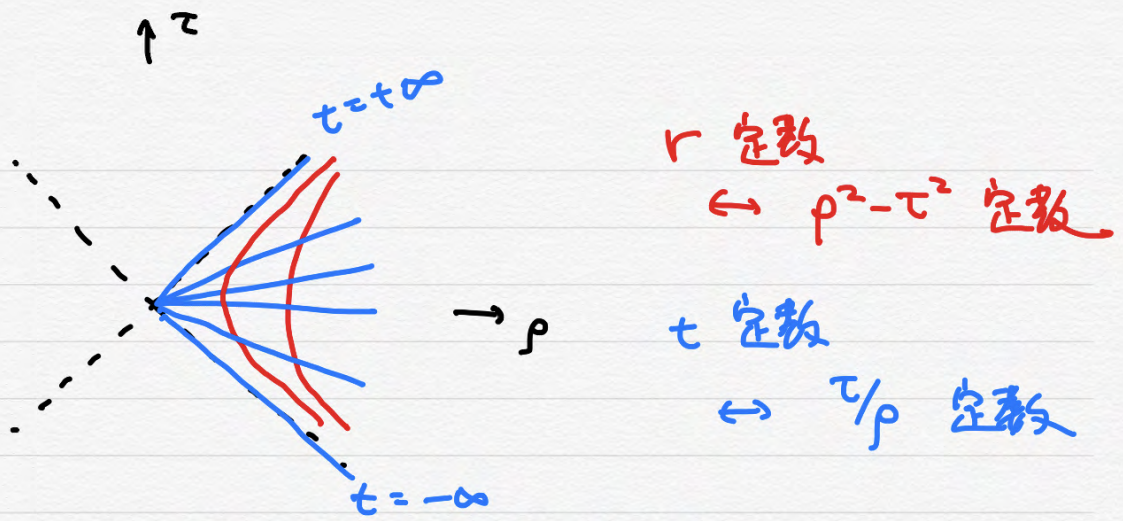
することができる。

$$-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2$$

$$= \frac{4 e^{-r/r_s} r_s^3}{r} (-d\tau^2 + d\rho^2) \quad \text{となる。}$$

$$r < r_s \text{ の } \rho = \left(\sinh \frac{ct}{2r_s} \right) \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{r/r_s}, \quad \tau = \left(\cosh \frac{ct}{2r_s} \right) \sqrt{1 - \frac{r}{r_s}} e^{r/r_s}$$

とすると計量の形式は同じになる。



Kruskal-Szekeres 座標系 とは、

この座標系では $\frac{4e^{-r/r_s} r_s^3}{r} (-d\tau^2 + d\rho^2)$

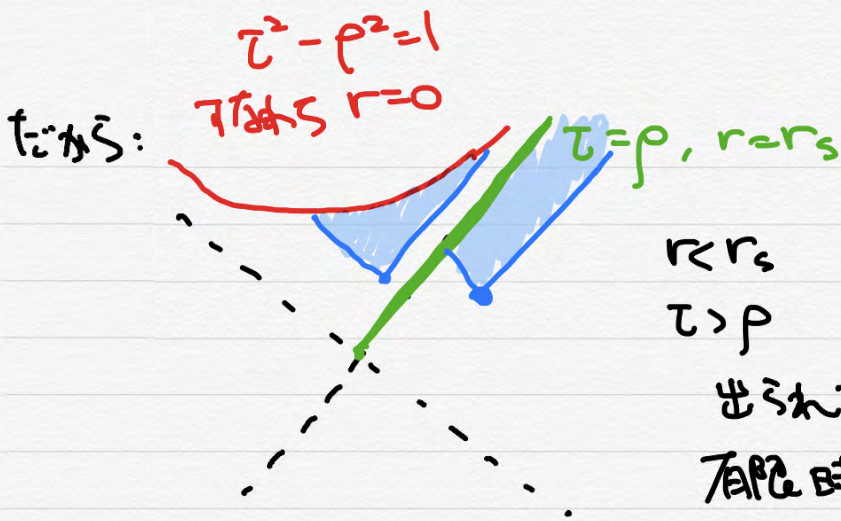
存在し、 $r = r_s$ にも存在しては局所的には何もなし。

光速 $\begin{cases} \text{より遅い} & \dots & ds^2 < 0 \\ \text{と同じ} & & ds^2 = 0 & \text{ } t_1, t_2 \\ \text{より速い} & & ds^2 > 0 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{l} ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 \quad \dots \\ x = ct \quad \text{と} \quad \text{して} \quad \text{お} \quad \text{か} \quad \text{し} \end{array} \right)$

⇒ ρ, τ 座標では、光速以下のものは

傾き $\pm 45^\circ$ の間を動く。 $\rho = \tau$



$r < r_s$ 可能な
 $\tau > \rho$ に近づくと
 出られぬ。
 有限時間で $r=0$ に行く。

$r > r_s$ だと外にも逃げられる。

固有時間では有限時間で $r = r_s$ を通過して $r = r_s$ の中に入る。

しかしこれは 遠方の観測者の時刻 t では 無限に時間がかかる。

$$\left(\begin{array}{l} t = \text{一定の } \tau/\rho \text{ が一定.} \\ t \rightarrow +\infty \text{ で } \tau/\rho \nearrow +1 \text{ になる.} \end{array} \right)$$

$r = r_s$ の球面をブラックホールの

(事象の)地平面

(event) horizon

とよ。

(時間が余ったら、ホズドクるときに一般相対論の トンネルをさくから電話を受けた話でもできる。)

ブラックホールの熱力学

シュバルツシルト解

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2G_N M}{c^2 r} \right) (dt)^2 + \frac{1}{1 - \frac{2G_N M}{c^2 r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2)$$

地平線の半径: $r_s = \frac{2G_N M}{c^2}$

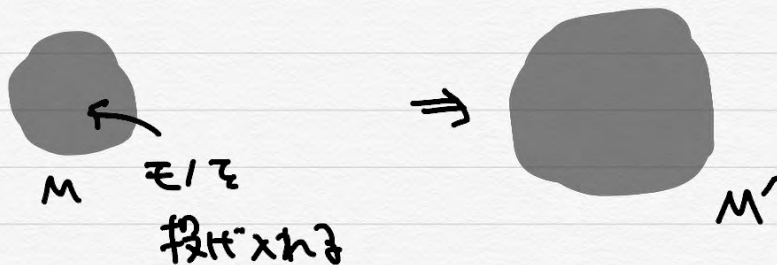
表面積: $4\pi r_s^2$

もっと一般の状況でも、「地平線の定義できる。

ホーキング (1972):

ブラックホールの地平線の面積は減少する。

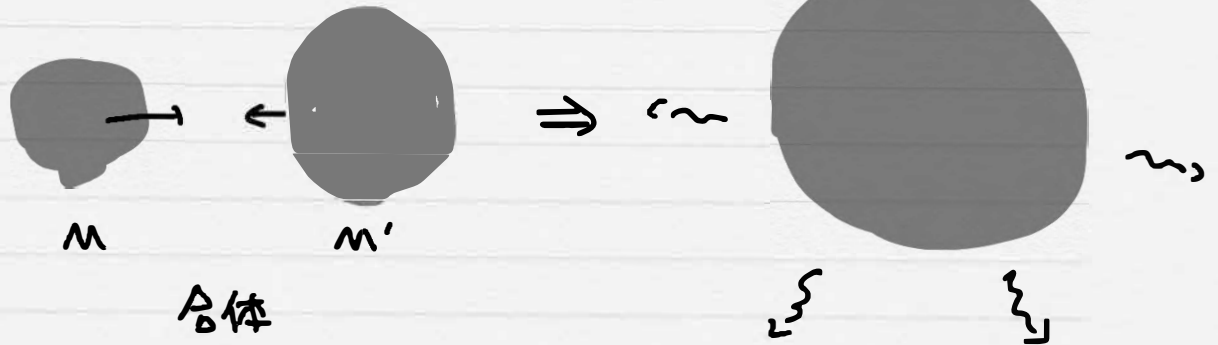
例として



$M < M'$ ためから $r_s < r_s'$

ブラックホールから ϵ/ϵ は出ていくのと逆は存在する。

また:



エネルギーは Mc^2 . 合体の際に M''
 重力波を放出してエネルギーを失うので

$$M'' \leq M + M'$$

しかし表面積は減らさなければならないので

$$M^2 + (M')^2 \leq (M'')^2$$

$$M = M' \text{ とし } \sqrt{2}M \leq M''$$

最大 $(2 - \sqrt{2})Mc^2$ のエネルギーが放出。

世界初の観測 GW150914 での理論値をみると

$$36 M_{\odot} + 29 M_{\odot} \rightarrow 62 M_{\odot}$$

なので確かにみたされている。エネルギーも
 ちゃんと与えられている。



7.5.17 年 - 1.1 の回転している
 ことがわかった。

Kerr 解

角運動量を J とし、無次元量

$$\chi = \frac{Jc}{GM^2} \quad \text{と考へる}$$

$\chi < 1$ が知られている。

($\chi > 1$ の時は特異点か地平面の外に出てしまふので作らなうと思われている。)

地平面の面積: $4\pi \cdot \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - \chi^2}}{2}$

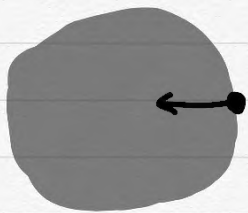
なので、それぞれのブラックホールの χ を測定しようと
した。 出来た論文が 去年だ。

結論としては、確かに面積は増えている。

(それぞれの χ は 案外 大きいらしい。)

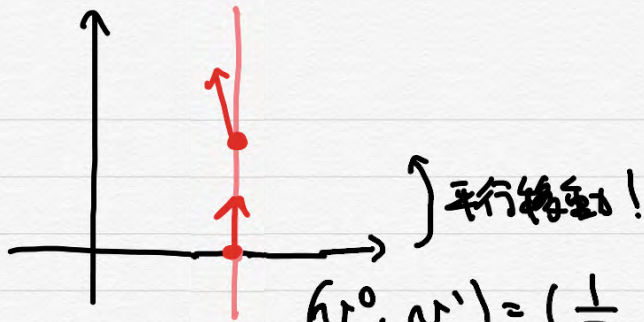
この件に関して YouTube に素敵な解説がある: <https://youtu.be/18Pd4TAfYU8>

ブラックホールの 表面重力



計量 $-F(r) (cdt)^2 + \frac{1}{F(r)} dr^2$ と考へる。

$$\begin{cases} \Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} F(r) F'(r) \\ F_{tt}^t = 0 \end{cases} \quad \text{なので}$$



$$(v^0, v^1) = \left(\frac{1}{\sqrt{F}}, 0 \right)$$

ε δx⁰ 平行移動だから

$$(\delta v^0, \delta v^1) = \left(0, -\frac{1}{2} \sqrt{F} F' \delta x^0 \right)$$

このvの規格化条件から $\sqrt{-F (\delta v^0)^2 + \frac{1}{F} (\delta v^1)^2} = \frac{F'}{2} \delta x^0$

よって場所 r における 加速度は $k = \frac{c^2 F'(r)}{2}$

$F(r) = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$ ε 代入して $k = \frac{GM}{r^2}$

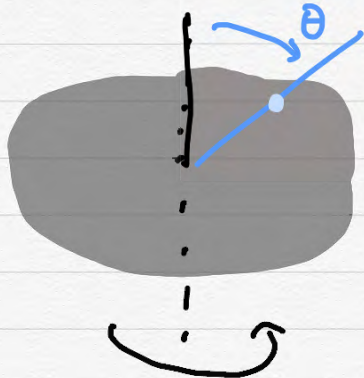
$r = r_s$ での
" $\frac{2GM}{c^2}$

$k = \frac{c^4}{4GM}$
になる。

(この計算では
= 2-つの穴の穴の穴...
補正なしに
正しい)

回転したブラックホールの場合は

傾きのθ



地平面上の場所に傾きの

表面重力 k は変わって

よくなる。しかし実は

定常ブラックホールの
表面重力 k は
場所によらない。

平衡状態 ^{示量的.} における系の状態を定まる
 (絶対) 温度 T といふものがある. ← 熱力学
第0法則
 $T \geq 0$ である.

さて

熱力学での物理では
既に存在する
仕事の
符号

$$\delta E = \boxed{\text{熱の流入/流出}} - p\delta V + \mu\delta N$$

だから系の状態を定まる

エントロピー S ^{示量的.} といふものがある

可逆・準静的変化における

$$\boxed{\text{熱の流入/流出}} = T \delta S$$

熱力学
第1法則

一般の非可逆変化における

$$\boxed{\text{熱の流入/流出}} \leq T \delta S$$

特に孤立系では

$$\begin{aligned} 0 &\leq T \delta S \\ \text{可逆な} & 0 &\leq \delta S \end{aligned}$$

熱力学
第2法則

(エントロピーの
増大法則.)

熱力学:

$$dE = TdS + \phi dQ + \Omega dJ$$

ブラックホールの:

$$dE = \frac{c^2}{8\pi G} \kappa dA + \phi dQ + \Omega dJ$$

第1法則

T: 温度

κ : 表面重力

どちらも定常系では一定

第0法則

S: エントロピー

A: 面積

どちらも非減少

第2法則

ブラックホールの

$$T \propto \kappa, \quad S \propto A \quad \text{有り}$$

温度とエントロピーが同じなのは?

比例係数の

$$\begin{aligned} dE &= TdS + \dots \\ &= \frac{c^2 \kappa}{8\pi G} dA + \dots \end{aligned}$$

と等しいように定まらなければならない。

- 熱力学の多数の自由度を含む系を

粗視化して扱うことからあらわれる

と考へることが多い。(水には水分子が $\sim 10^{24}$ 個ある)

熱・統計力学と並行する。

- ・ ドラックホーレ「熱」が学の一般相対論の微分方程式の予備から出てくる。
アインシュタイン方程式のむづかしいのを言い換えて g_{ij} (10個の関数) のみで偏微分方程式で、ホフマンがドクダの方程式より断然かんたん。

これは不思議なことである。

- ・ でもたいていの教科書で知られている熱力学の公理論的アプロ-4では断熱操作等のみで性質から温度とエントロピーの存在を導出し第1,2,3法則を導く。

これは統計力学を仮定しない。

(日本の物理屋はこのアプロ-4に伝統がある。田崎、佐々、沙川...)

- ・ ドラックホーレ「熱力学の公理系」をみたすことを確認するのは、よくよくのどろ???
前からやろうと思ってる。誰かやれ!!!

閑話休題.

ホーキングのブラックホールの時空で..

場の量子論を考えると、 $T \propto \kappa$ で定まる

熱輻射があることを示した。

これをちゃんとやるにはまた一学期くらいかかる....

以下の形式的なものを示す。

量子力学: ① 系には ψ と ψ^* の
エネルギー準位 E_a がある. ($a=1,2,3,\dots$)

② a 番目の準位の波動関数の

$$e^{-iE_a t/\hbar}$$

と変化する. ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$ はプランク定数.

$$h \sim 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})$$

量子統計力学: 温度 T の平衡状態での

a 番目の準位が実現する確率の

$$e^{-\frac{E_a}{k_B T}} \quad \text{に比例する.}$$

k_B : ボルツマン定数.

$$\sim 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$e^{-itE_a/\hbar} \leftrightarrow e^{E_a/k_B T}$$

温度 T の形での \hbar 虚時間 $t = \frac{i\hbar}{k_B T}$ に相当.

(多少正確には、時間 t と解析接続 τ と
虚時間 $t = \frac{i\hbar}{k_B T}$ と、周期的 τ と τ と、条件に存在.)

u 計量

$$ds^2 = -F(r) c^2 dt^2 + \frac{1}{F(r)} dr^2$$

$$\tau \quad F(r_s) = 0,$$

$$F(r) = \rho^2 (r - r_s) + \dots \text{etc}$$

$$\rho^2 \text{ と呼ぶ. } dr = 2\rho dp.$$

$$\tau = it \text{ と } \tau$$

$$ds^2 = \rho^2 c^2 d\tau^2 + \frac{dr^2}{\rho^2}$$

$$= \rho^2 c^2 d\tau^2 + \frac{4}{\rho^2} dp^2$$

$$= \frac{4}{\rho^2} \left(dp^2 + \rho^2 d\left(\frac{\rho}{2} c\tau\right)^2 \right).$$

平面の極座標 $dp^2 + \rho^2 d\psi^2$ と

$$\psi \sim \psi + 2\pi.$$

よって $\frac{\rho}{2} c\tau$ は 2π 周期だと思おうかよ.

$\therefore \tau$ は $\frac{4\pi}{\rho c}$ 周期.

$$\text{表面重力 } k = \frac{c^2}{2} F(r_2) = \frac{c^2}{2} \text{ (注) } r_2, r_2 \text{ から}$$

$$\tau (= it) \text{ の } \frac{2\pi c}{k} \text{ 周期.}$$

$$\text{注: } = \frac{h}{k_B T} \text{ である}$$

$$T = \frac{h}{k_B \cdot 2\pi c} k$$

$$T dS = \frac{c^2 k}{8\pi G_N} dA \text{ } r_2, r_2 \text{ から}$$

$$S = k_B \frac{c^3}{G_N h} \frac{A}{4}$$

シュバルツシルト解の半径

$$F(r) = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad r_s = \frac{2G_N M}{c^2} \text{ である}$$

$$k = \frac{c^4}{4G_N M} \text{ } r_2, r_2 \text{ .}$$

である

$$T = \frac{c^3 h}{k_B \cdot 8\pi G_N M}$$

$$S = k_B \frac{4\pi G_N M^2}{h c}$$

である。

物理の基礎定数が決まってくるわけだ！

c 光速 k_B 統計力学

h 量子力学 G_N 重力

これまでのおさらい

シュワルツシルト解

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

よ $r=r_s$ にホライズン (地平線) を持つ。

表面重力 $\kappa = \frac{GM}{r_s^2}$

表面積 $A = 4\pi r_s^2$

より一般、
シュワルツシルト解の
は「ある」。

よ $dE = \frac{c^2}{8\pi G} \kappa dA + \Omega dJ + \Phi dQ$

ε だけだ。

↓
熱力学第一法則

$$dE = T dS + \Omega dJ + \Phi dQ$$

ホーキングによればシュワルツシルトは

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \frac{\hbar}{k_B \cdot 2\pi c} \kappa \\ S = \frac{k_B c^3}{4\hbar G} A \end{array} \right.$$

温度
ε 持つ。
I = tacc-

これについてもう少し詳しく見よう。

• まず T について: 一般に

$$ds^2 = -F(r)c^2 dt^2 + \frac{1}{F(r)} dr^2 + \dots$$

で $F(r_s) = 0$ のとき

$$k = \frac{c^2}{2} F'(r_s) \quad \text{とした。}$$

r_s 近傍の時空の計量のみで決まっている。

⊗ $T = \frac{\hbar}{k \cdot 2\pi c} k$ ← 量子効果でありことを示す。

重力自体は量子化しなくても、与之対した

古典的な時空の上で、電磁場などを考慮する。
↑
量子化した

前回上式 ⊗ は非常に形式的な導出をした。

もともと Hawking の計算はもっと物理的。

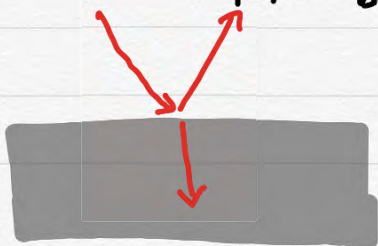
波の量子的な伝播を ごく普通に計算するだけ
(だから計算はやさしい。)

電磁場が媒質中を飛ぶのと同じ。

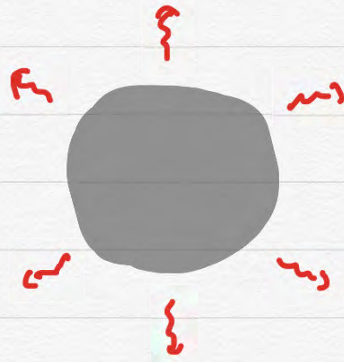
境界面で反射/屈折するのと

同じ計算。

「媒質」が「ブラックホールの時空」
なのだ。



兎に角, BH からは Hawking 輻射 が出ている.



エネルギー-保存から, BH のエネルギー = 質量の c^2 に c^2 の減子はする. 徐々に温度が上がる. 最後の爆発.

(現実には 宇宙背景放射の温度より低いため蒸発しないか...)

黒体輻射 だとすると 面積あたり時間あたりの放射エネルギーは シュテファン・ボルツマン 則より

$$\sigma T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 c^2 h^3}$$

$$\text{よって } \frac{d(Mc^2)}{dt} = -\sigma T^4 \cdot 4\pi A$$

$$T \propto M^{-1}$$
$$A \propto M^2$$

よ

$$d(M^3) \propto dt.$$

$$t_{\text{蒸発}} = \frac{5120\pi}{c^4} G^2 M^3.$$

$$M_{\text{太陽}} \sim 2 \times 10^{30} \text{ kg} \quad \text{とわかると}$$

$$t_{\text{蒸発}} \sim 2 \times 10^{67} \text{ 年}. \quad (\text{宇宙の年齢} \sim 140 \text{ 億年})$$

....

次に B.H. の エントロピー -

$$S = \frac{k_B c^3}{G_N h} \frac{A}{4}$$

に712. G_N , h があらわれここからわかるように、これは 重力の量子効果 である。

また、一般に エントロピー - なの？

熱力学では

$$dE = \underbrace{\text{熱}} + \text{仕事}$$

可逆なときは TdS

統計力学では： 巨視的には同じに見えても

微視的には異なる状態の集合である。

.....
a番目の状態のエネルギー - E_a とし

実現確率 $\propto e^{-E_a/k_B T}$: カノニカル分布.

比例定数は z^{-1} である

$$1 = \sum_a \frac{1}{z} e^{-E_a/k_B T} = P_a$$

よ) $z = \sum_a e^{-E_a/k_B T}$: 分配関数.
微視的

一般に 確率分布 $\{p_a\}$ に712 の エントロピー -

$$S = k_B \sum_a -p_a \log p_a \quad \text{7. 定数.}$$

カ/ニカ/ル分布において

平均エネルギー

$$E := \sum_a E_a \frac{1}{Z} e^{-E_a/k_B T}$$

微視的
エントロピー

$$S := k_B \sum_a \left(\frac{E_a}{k_B T} + \log z \right) \frac{1}{z} e^{-E_a/k_B T}$$

$$= \left(\sum_a \frac{E_a}{T} \cdot \frac{1}{z} e^{-E_a/k_B T} \right) + k_B \log z.$$

つまり $E - TS = -k_B T \log z$ である。

Tを固定して $E_a \rightarrow E_a + \delta E_a$ すると

$$\delta E - T\delta S = \sum_a \delta E_a \cdot \frac{1}{z} e^{-E_a/k_B T}$$

状態 a の

エネルギー変化

P_a である

状態 a の確率

仕事、期待値。

$$\leadsto \delta E = T\delta S + \text{仕事} \quad \text{となり}$$

熱力学を再現。

\leadsto 熱力学的エントロピー

= カ/ニカ/ル分布の微視的エントロピー。

N 状態ありるとき $S = k \sum_a -p_a \log p_a$

は $p_a = \frac{1}{N}$ が全 a の a で成立するとき最大.

($x \log x$ の x に \sqrt{x} がある. $p_i q \Rightarrow \frac{p_i q}{2}, \frac{p_i q}{2}$)
におきかえりて x と q である.

よって $S = k_B \log N$. エントロピー $\sim \log$ 状態数.

カノニカル分布 $p_a \propto e^{-E_a/kT}$

は エンタルピー期待値を考えた中で

エントロピー $-k \sum_a -p_a \log p_a$

を最大にする.

実際. $\sum p_a = 1$

$\sum p_a E_a =$ 決まった値 エントロピー

$\sum \delta p_a = 0$, $\sum (\delta p_a) E_a = 0$ カノニカル.

$\delta \left(\sum -p_a \log p_a \right) = \sum -\delta p_a \log p_a$ カノニカル.

① ② を満たす条件は $\delta p_a = 0$

$\Rightarrow \log p_a = \text{①} E_a + \text{②}$.

\Rightarrow 何か T に対し $p_a \propto e^{-E_a/kT}$

\Rightarrow 熱力学的エントロピー

= 平均エンタルピー - k 固定した T での微視的エントロピー

= 平均エンタルピー - k 固定した T での \log 状態数.

7. ランクホールの場合

$$S = \frac{k_B C^3}{G \hbar} \frac{A}{4}$$

$$= k_B \log \text{状態数} = k_B (\log 2) (\text{ビット数})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{4 G \hbar \log 2}{c^3} \text{あたりの } 1 \text{ ビット}}$$

$$\text{つまり } \frac{32 G \hbar \log 2}{c^3} \sim (7.6 \times 10^{-35} \text{ m})^2 \text{あたりの } 1 \text{ byte}$$

トビエ右の 情報量 / 状態数.

10 g の BH \rightsquigarrow 500 Gbyte くらい.

ちなみに、数係数 $4 \log 2$ を除くのは式 \square の

不思議である。① 状態数の無次元.

② 表面積に比例。③ 重力の相対論的量子効果
 G_N c \hbar

とすると G_N, c, \hbar から $(\text{長さ})^2$ の次元を
作らざるを得ない.

$$\text{7. ランクの長さ: } \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}} = \underline{1.6 \times 10^{-35} \text{ m}}$$

$$\text{7. ランクの時間: } \sqrt{\frac{G \hbar}{c^5}} = 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}$$

しかし $\Gamma_{\text{H}} = \frac{A}{4} \frac{kc^3}{G_{\text{NH}}}$

$$\sqrt{\frac{\Gamma_{\text{H}}}{G_{\text{NH}}}} = 21 \text{ Mg.}$$

何故か 日量的な大きさ。 ???

閑話休題.

$$S = \frac{kc^3}{G_{\text{NH}}} \frac{A}{4} \quad \text{は とんでもなく大きい}$$

と言ったが . . . ほかのもののエントロピーと比較しないと意味がないのでは。

黒体放射のエネルギー密度 : $\frac{4\sigma}{c} T^4$

エントロピー密度 : $\frac{16\sigma}{3c} T^3$

半径 R の球状の放射のかたまり :

$$Mc^2 = E = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{4\sigma}{c} T^4.$$

$$S = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{16\sigma}{3c} T^3$$

BH につじつとエントロピーは

$$S_{\text{BH}} = \frac{kc^3}{G_{\text{NH}}} \frac{4\pi}{4} \left(\frac{2G_{\text{NH}} M}{c^2} \right)^2$$

T, R は
太陽の
値に比べて

$$\frac{S_{\text{BH}}}{S} \sim 10^{10}$$

(???)

この状態数は どこからくるのか ?

↑
途方もない

- 古典重力解としての

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) (cdt)^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + (\sin\theta)^2 d\phi^2)$$

この 1) 形式 である。

- 表面積に比例する という特徴である。

(通常エンロピーの体積に比例する。)

- 重力が量子化されたら説明されるべきである。

ここまでのまとめ

$$T = \frac{\hbar}{k_B \cdot 2\pi c} \cdot k$$

曲がった時空間の
(重力でない、電磁場等の)
場の量子論の計算で
導出可能。

$$S = \frac{k_B c^3}{G \hbar} \frac{A}{4}$$

重力自体の量子化が
なされたら導出されるだろう。

- 重力の量子化されたらどうなるか??
- どういった量子化が正しいか??

重力の量子化されないといけないか？

- 物理屋から二十年以上時間を費やしてもできない。
実験的検証のことも難しい。
やらなくてはならないのでは？
- 重力は古典的 + 他は量子的、では無理では？
↑
どうなのかなと思われている。

① ブラウンの運動がある系での熱力学第二法則は

全エントロピー $\left[\frac{k_B c^3}{G_{\text{NH}}} \frac{A}{4} + \text{物質のエントロピー} \right]$ が増大

と思われている。重力が量子化される。

$\frac{k_B c^3}{G_{\text{NH}}} \frac{A}{4}$ は 熱統計学的エントロピーとの

関係があるとすると、物質をブラウンの運動に捨てる
操作は不可逆なのに エントロピーを減らす。

〜 第二種永動機関が作れる???

(論文が出版されているかもしれないけど)

思、たが、IP、としかして限りでは見当らない。

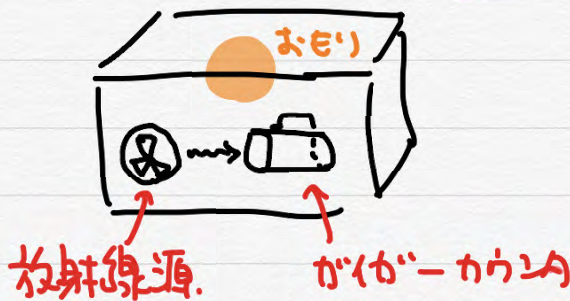
検索エンジンが貸したのか、宣伝で「永久

機関を作った」といふか、出てくるようにも、たが...

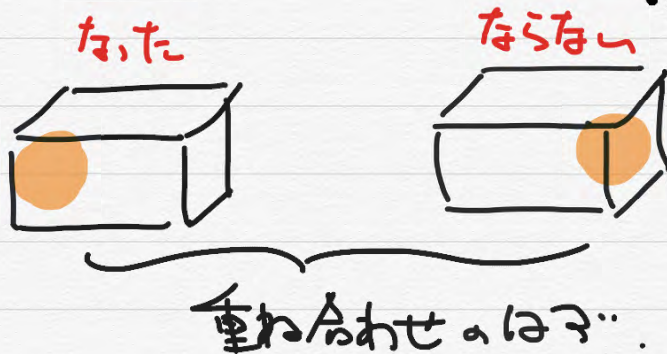
② 重力が量子化されているとすると、量子力学の重ね合わせの原理に関し新たなことがいえる。

Page-Geickler, "Indirect Evidence for Quantum Gravity" PRL 47 (1981) 979 の考案。

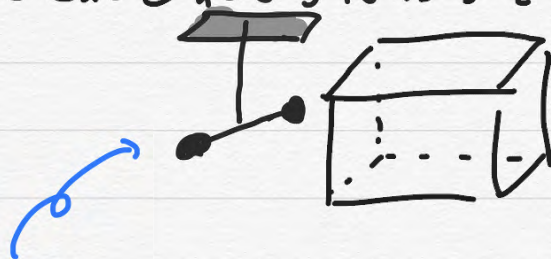
シュレーディンガーの猫のおとし



ある決めた時間内にガイガーカウンタが放射線を計測するおとしの状態で、おとしの場所をかえる。



さてこれをねじりばかりで測る。



重力によるおとしどうしのかをねじれとして測定。

イトゲンニユによる $\frac{m_{\text{重力}}}{m_{\text{増生}}}$ の測定で使われた。

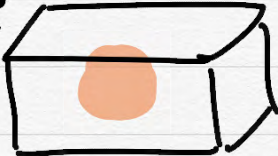
重なる重ね合せ中のおおりの
どちらの位置に対して働くのだろうか???

重力が古典的だとしても、それを決めるルールが
必要。上記論文では、

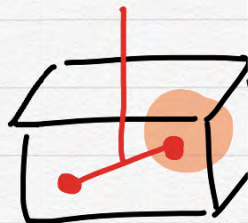
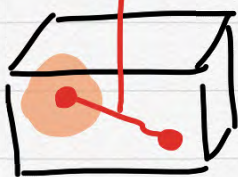
⊗ 「平均位置に対して重力がはたらく」
という安定なルールがトセン入ることを示した。
しほしほ: 理論的考察で使われていた。

もし ⊗ たてあがる。



の平均は真ん中
 である。

→ おおりのはかりの回らなく、というこじこじになるか
えんたはかりはなる。



とたてあがる。

Page-Geiklen での 実際には 実験をやったと主張している人が
ほんまか?

・重力を量子化できるとすると、どうなるか？

ゲージ場 **電磁場, 強い力, 弱い力** に使える

標準的な場の量子論の枠組みがある。

次元	1	2	3	4	5	6	...
ゲージ場	○	○	○	○	×	×	..
重力場	○	○	△	×	×	×	...

↑
3+1次元以上では
うまくいかない。

くりこみ不可能性と呼ばれる。

現時点での主流:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{弦理論} \\ \text{ル-70 量子重力} \end{array} \right.$

ル-70 量子重力

・ 3+1次元で途中までは普通に重力場を量子化する。

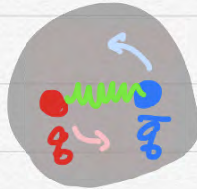
・ 途中で計量からアジール変数というものに
変数変換する。

・ ブラウン運動のエンロピーはあまり意味
自然に出る (ほぼ構成から、面積に比例した
状態数がある) から、比例係数が任意。

$$S = \frac{k_B C^3}{G \hbar} \cdot \text{Area} \cdot A \quad \leftarrow \frac{1}{4} \text{が導出できる。}$$

弦理論

もともと、 $X_{1,1}$ (とある $\Gamma_{2,1}$ の基底状態) が
相対論的弦の量子化であかきのところから?
という所から始まった.



閉弦もどうしても必要.

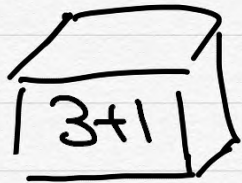
閉弦の励起のひたが重力であることが
気がついた。(米谷, Scherk, Schwarz)

\Rightarrow 相対論的式に量子重力が得られた.

でも

- ・ 時空は $9+1$ 次元でなっている.
- ・ 重力だけ 10^4 , 他のもつてくる

頭おかしいか.



x



非常に小さな
6次元空間

と思うと素粒子の標準模型とほぼ程度
説明できる.

超対称. グラフホーシ という 特定のグラフの
グラフホーシ については

$$J = \frac{k_B C^3}{G_{\text{nut}}} \frac{1}{4} \cdot A$$

か. 係数 $\frac{1}{4}$ も含めて 出る.

対応する 量子力学系 が 書き下せて.

普通に 統計力学 を するだけ.

面積 に 比例 する こと, や, 係数 $\frac{1}{4}$ は

すぐに出ること. 計算の最後でわかる.

シュルツェンバウム 解 での 導出 できている.

ル→量子力学

弦理論

どちらか 有難かる

趣味の問題.

(現代物理学との 関連は 弦理論 が
断然 ある. 僕の 興味 は 元のあたり.)

ブライのホールの情報問題

の前に

量子力学におけるエンタングルメント

の前に

量子力学における状態 状態 なの？

純粋状態
混合状態

I. 純粋状態は、複素数 \mathbb{C} を持つベクトル空間 の元である。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$$

$$|\mathbf{a}\rangle|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_N|^2$$

II. 時間発展は、このベクトル空間の
 \mathbf{a} を保つ線形変換である。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_N' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}$$

\uparrow
 $N \times N$ 行列.

III. 物理量の エルミート行列 \bar{X} で表わされる。

$$\text{状態 } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$$

この期待値は

$$\overline{X_{ij}} = X_{ji}$$

$$\langle X \rangle_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}^T X \vec{a}}{\vec{a}^T \vec{a}} = \frac{\overline{(a_1 \dots a_n)} X \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}{\overline{(a_1 \dots a_n)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}} \quad (\#)$$

で表わされる. $c \neq 0$ の複素数 c による

$$\langle X \rangle_{c\vec{a}} = \langle X \rangle_{\vec{a}} \quad \text{なること.}$$

$c\vec{a} \sim \vec{a}$ と同一視し, $|\vec{a}| = 1$ とする方が標準的.

例 $N=2$ とする. 物理量 $X_{ij} = \overline{X_{ji}}$ は
二状態系. qubit

$$\begin{pmatrix} c+z & x-iy \\ x+iy & c-z \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

なること, 4 つ線形独立な物理量

$$\mathbb{1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

がある.

上記公式 (#) から $\mathbb{1}$ の期待値は $\langle \mathbb{1} \rangle = 1$. 自明.

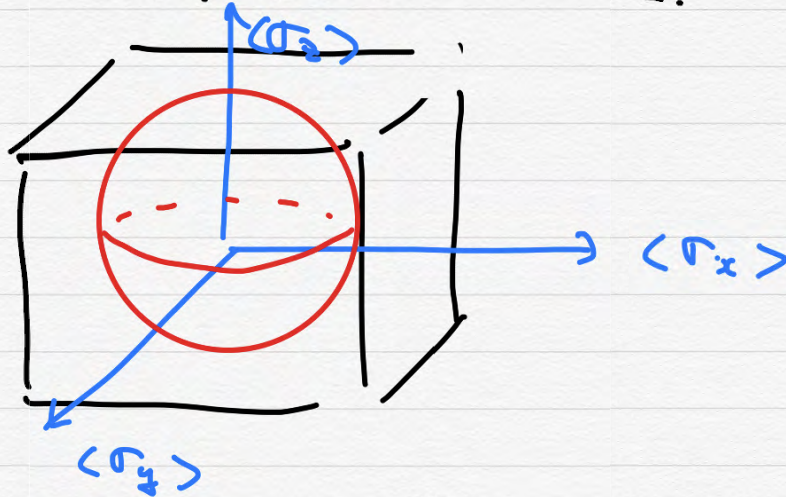
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は $\langle \sigma_i \rangle = 0$ となる

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{とて} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{と仮定する.}$$

$$\langle \sigma_z \rangle = |a|^2 - |b|^2, \quad \langle \sigma_x \rangle = \overline{a}b + a\overline{b} = 2 \operatorname{Re} a\overline{b}$$

$$\langle \sigma_y \rangle = -i\overline{a}b + ia\overline{b} = 2 \operatorname{Im} a\overline{b} \quad \text{なること.}$$

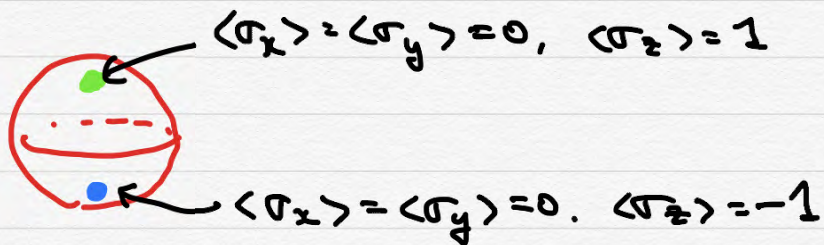
$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2 &= (|a|^2 - |b|^2)^2 + 4|ab|^2 \\
 &= (|a|^2 + |b|^2)^2 = 1.
 \end{aligned}$$



$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$: 110°の行列, $2\pi^\circ$ の x, y, z 成分」
 純粋状態: 球面にのる。

混合状態: 純粋状態を統計的に混ぜたもの。

たとえば..

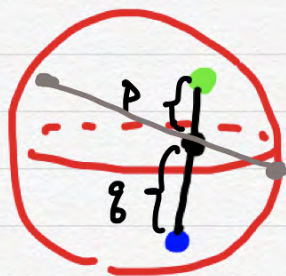


$\pm 1:1$ の場合..

$$\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = \langle \sigma_z \rangle = 0$$

なる混合状態に存在。

一般に



● τ ● ε
 $\rho: P$ で表せる
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の期待値の
 左図のようになる.

\Rightarrow 球の中の勝手な点 ρ は混合状態 ρ として実現可能.

純粋状態 ρ の分解の一意性がある.

数学的には: \vec{a} の期待値は $|\vec{a}| = 1$ かつ

$$\langle X \rangle_{\vec{a}} = \vec{a}^T X \vec{a}$$

$$\text{tr} M = \sum M_{ii} \rightarrow \underbrace{(\vec{a} \vec{a}^T)}_{a_i \vec{a}_j \text{ 成分でなる行列}} X$$

\vec{a} と \vec{b} は $p: (1-p)$ で表せる

$$\langle X \rangle = p \langle X \rangle_{\vec{a}} + (1-p) \langle X \rangle_{\vec{b}}$$

$$= \text{tr} \left[\underbrace{p(\vec{a} \vec{a}^T) + (1-p)(\vec{b} \vec{b}^T)}_{\rho \text{ と書く}} \right] X.$$

一般に $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ は p_1, \dots, p_k のかりあいで表せる

密度行列 $\rightarrow \rho = \sum_{u=1}^k p_u \begin{pmatrix} \rightarrow & \rightarrow^T \\ a_u & a_u \end{pmatrix}.$

$$\sum p_i = 1.$$

\uparrow
 正定値行列.

このエントロピーを $k_B \sum_B -p_u \log p_u$ と定めた。

しかしこれはよくない。なぜなら

$$\rho = \vec{a} \vec{a}^T = \frac{1}{2} \vec{a} \vec{a}^T + \frac{1}{2} \vec{a} \vec{a}^T$$

\uparrow $S=0$ \uparrow $S = k_B \log 2$??

分解に条件を付けたらいい。

一般に $N \times N$ の
Hermitian 行列 $M_{ij} = \overline{M_{ji}}$

$$M = \sum_{u=1}^N m_u \vec{a}_u \vec{a}_u^T$$

但し $|\vec{a}_u| = 1$, $\vec{a}_u \perp \vec{a}_v$ ($u \neq v$) とする。

密度行列を

$$\rho = \sum_{u=1}^N p_u \vec{a}_u \vec{a}_u^T$$

と分解するとき、但し $\vec{a}_u \perp \vec{a}_v$ $0 \leq p_u \leq 1$.

純粋状態: $p_u = 1$ ($u=1$ or $u=2$)
 $p_v = 0$ ($u \neq v$)

量子状態のエントロピーの定義:

上記のように分解して

$$S = k_B \sum_u -p_u \log p_u$$

↑
全ての可能な分解の中で最小。

この条件を課してはばい。



たゞこの直交制の二点に分割するに反対。

実際, $u \neq v$ として \vec{a}_u と \vec{a}_v は直交するから. $P_u \geq P_v$ であるから.

$$P_u \vec{a}_u \vec{a}_u^T + P_v \vec{a}_v \vec{a}_v^T$$

と \vec{a}_u, \vec{a}_v によって張られる 2次元部分空間内で対角化して

$$= P_{u'} \vec{a}_{u'} \vec{a}_{u'}^T + P_{v'} \vec{a}_{v'} \vec{a}_{v'}^T, \quad \vec{a}_u \perp \vec{a}_{v'}$$

とできる. $P_{u'} \geq P_{v'}$ である.

両辺の trace を取ると

$$P_u + P_v = P_{u'} + P_{v'} \quad \dots \textcircled{1}$$

両辺の 2乗の trace を取ると $P_u^2 + 2|\vec{a}_u^T \vec{a}_v|^2 P_u P_v + P_v^2$

$$= (P_{u'})^2 + (P_{v'})^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}^2 - \textcircled{2}$ より

$$(1 - |\vec{a}_u^T \vec{a}_v|^2) P_u P_v = P_{u'} P_{v'} \quad \text{が成り立つ}$$

$$P_u P_v > P_{u'} P_{v'} \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ と $\textcircled{3}$ から $P_{u'} > P_u \geq P_v > P_{v'}$.

$$\text{よって } -P_u \log P_u - P_v \log P_v$$

$$> -P_{u'} \log P_{u'} - P_{v'} \log P_{v'}$$

ここで微分法より示された.

↑ 関数が凸関数で.

$a > x > y > b$ として $a+b = x+y$ ならば

$$f(x) + f(y) > f(a) + f(b).$$

話題をかえて:

N次元ベクトル系 $A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$

M次元ベクトル系 $B \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^M$

合成系の

AB

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+M}$$

これは成り立たない!

合成系の $(V_{is}) \in \mathbb{C}^{NM}$ で与えられる。
 $i=1 \dots N \quad s=1 \dots M$

(数学的にはテンソル積を用いる。)

A系で X_{ij} , B系で Ξ_{st} を測定する
 期待値の

$$\langle X \Xi \rangle_{(v)} = \sum_{i,j,s,t} \overline{v_{is}} X_{ij} \Xi_{st} v_{jt}$$

(但し $|v|^2 = \sum_{i,s} |v_{is}|^2 = 1$ である。)

いま B系がゼロ状態であるとしよう。このとき

$\Xi_{st} = \mathbb{1}_{st}$ しか測定されることになる。

$$\langle X \mathbb{1} \rangle = \sum_{i,j,s,t} \overline{v_{is}} X_{ij} \mathbb{1}_{st} v_{jt}$$

$$= \sum_{i,j} \left(\sum_s v_{js} \overline{v_{is}} \right) X_{ij}$$

$$= \text{tr} \rho X \dots \begin{cases} (\vec{v}_1)_i = v_{i1} \\ (\vec{v}_2)_i = v_{i2} \\ \vdots \\ (\vec{v}_m)_i = v_{im} \end{cases}$$

AB 全系での
 純粋状態 (エンタングルメント = 0)

A系だけ測定する

混合になる。(エンタングルメント > 0)

存在 A系の純粋状態を
 混合状態とする。

AB系の純粋状態

$$|w_1|^2 + \dots + |w_m|^2 = 1$$

$$N \times M \text{ matrix } \begin{pmatrix} V_{1s} \\ \vdots \\ V_{Ns} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & w_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & w_m \\ & & & & 0 \end{pmatrix} U' \begin{matrix} M \\ \vdots \\ M \end{matrix}$$

73c

$$\rho = \sum_s V_{js} \overline{V_{is}} = \sum_{a=1}^{\min(N,M)} |w_a|^2 U_{ja} \overline{U_{ia}}$$

$$(\overline{U_a})_i = U_{ia} \text{ である}$$

$$|U_{ja}| = 1, \quad \overline{U_a} \perp \overline{U_c} \text{ である}$$

→ ρ のエントロピー

$$k_B \sum_{a=1}^{\min(N,M)} -P_a \log P_a \leq k_B \log \min(N,M)$$

AB系の純粋状態から B系を測定すると生じる

A系の混合状態のエントロピー

$$\text{高々 } k_B \log \min(\text{Aの自由度}, \text{Bの自由度})$$

量子系 の 熱力学的 エントロピー :

与えられた平均エネルギー、粒子数、電荷 etc.
 を実現する (混合) 状態 ρ での

量子力学的 エントロピー を 最大化 したものを.

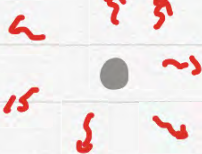


量子力学的には、純粋状態から
 出発するところから純粋状態である。
 エントロピー = 0.

↓ 光子.



BH に存在



???

Q. 存在している エントロピー > 0 か?

A. 巨視的 な量 (平均エネルギー etc.)
 での区別できないが、微視的には
 異なる状態がたまたまあるから。
 BH についての問題ではない。

Q. 最後に BH が 存在する、たゞ全部
 熱輻射に存在する、それが 100%
 変化するのでは?

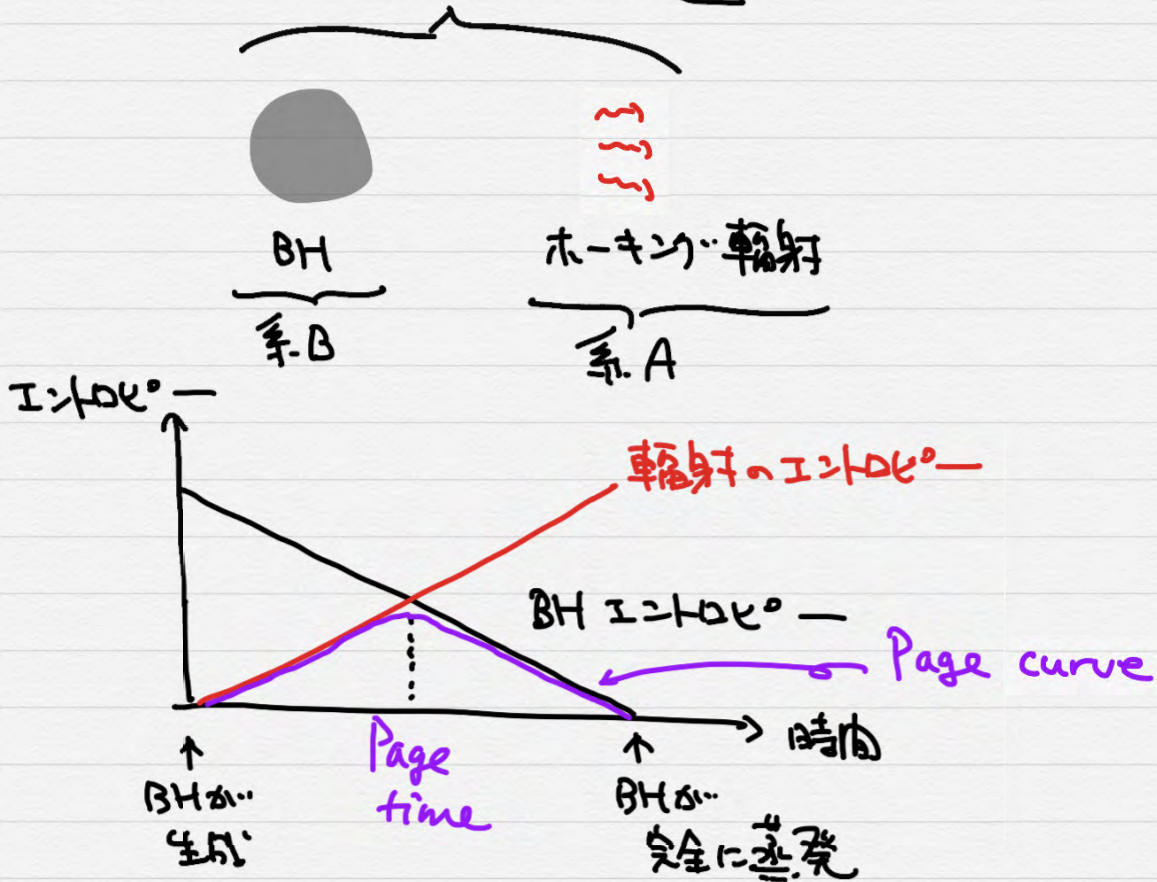
A. 最後の最後では 超高エネルギーで
 量子重力 が効いてくる。

また 未定成 分の 2/3 何とも言えない。

ここで再度 D. Page の登場: PRL 71 (1993) 1291
 PRL 71 (1993) 3743

もっと早い時期で矛盾が生じる!

いま 全系の純粋状態



しかし 系Aのエントロピー

$$\leq k_B \log(\text{系Bの状態数})$$

$$\sim \text{BH エントロピー}$$

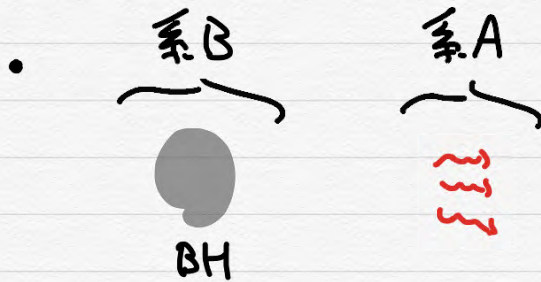
のはず。

- ・ 半分ぐらい蒸発した時点 (また BH は天文学的サイズでは) で既に矛盾が生じる。
- ・ それ以降は動的でなく、この放射のエントロピーは減少するはず。(Page curve)

二 数年の進展:

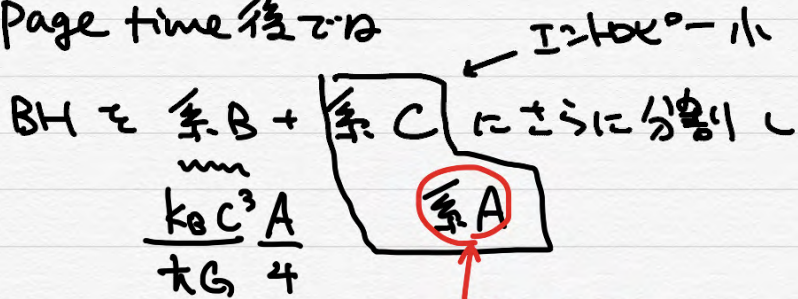
- 重力の半古典論的経路積分計算で Page curve をきちんと導出できるようになった. (Island 公式 とう.)

- 長らく知られていた計算ルールに従って計算してみたが、決まて見落された項があった.



と BH エンタロピー - エ「系B」 と可算か 悪い, とういことに 予めかきには なる.

Page time 後では



エンタロピー - 大 とうい雰囲気.

Almheiri - Hartman - Maldacena - Shaghoulian - Tajdini

<https://arxiv.org/abs/hep-th/2006.06872>

か 54 ページ.

BH information paradox 全般に 関しては

Polchinski

hep-th/1609.04036

か 手紙 2 ページ.