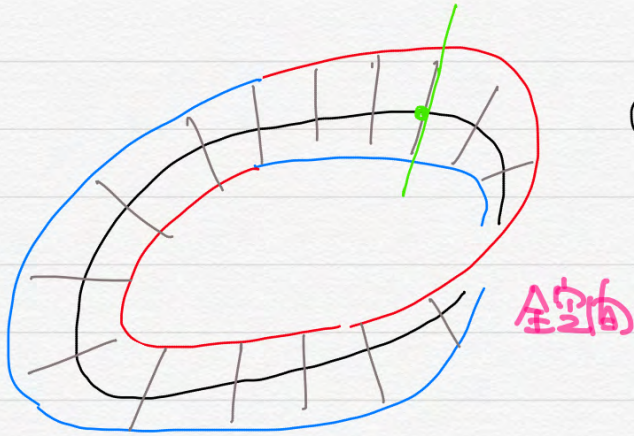


数学から始める:

メビウスの帯: 1回ひねって作る。



② 線分  $[-1, +1]$   
が生えている。ファイバー

“線分バンドル”

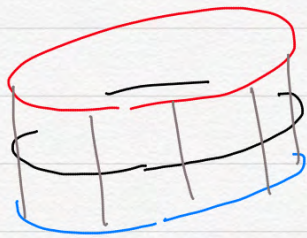


① 円周の各点の上に  
ベース

ファイバーバンドル

ファイバー  $\rightarrow$  全空間  $\rightarrow$  ベース

もっと単純なもの: 0回ひねり。



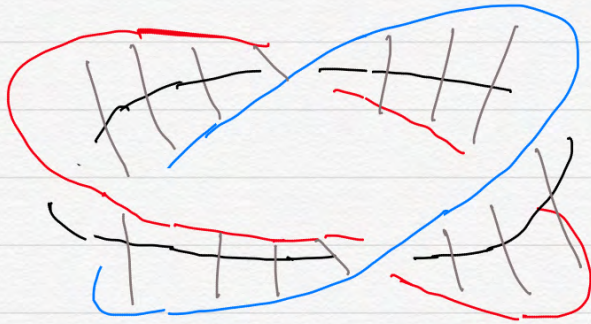
② 線分  $[-1, 1]$  が  
生えている。



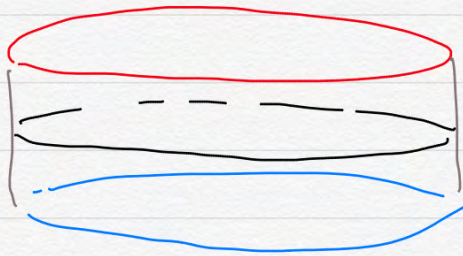
① 円周の各点の上に



2回ひねるとどうなるか？



3次元空間の埋め込み曲線は連続的に変形できるか。



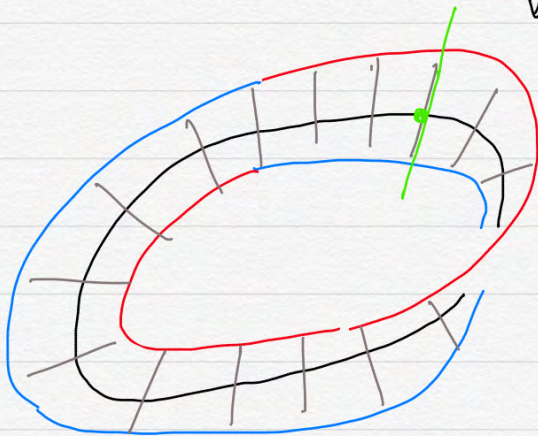
2次元曲線

$1:1$  の map がある。



2次元曲線も

$1:1$  の map が 無い。



ひねりの回数

mod 2

のみが重要。



円周上の 微分  $[-1, 1]$  バンドル

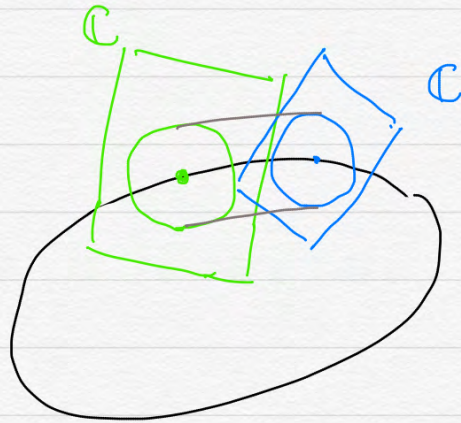
を考えた.

$\mathbb{R}$  バンドル

円周上の  $\mathbb{R}$  バンドル

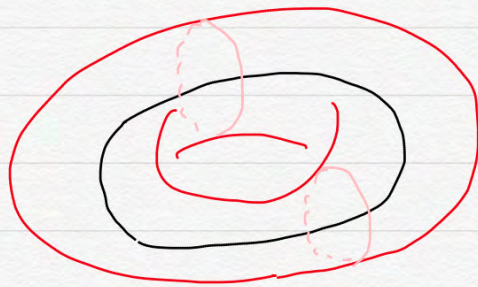
$\mathbb{C}$  バンドル

を考えた.



局所的には  
回転で  
つながり、  
仮定する.

勝手なようなバンドルは 単に トーラス (ドーナツの表面)  
である:



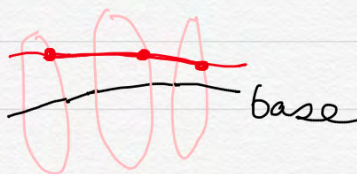
円周バンドルの 接続 である :  
connection

ベースの各点の上の  
円周に対し、

ベースの少し隣の点の上の  
円周に

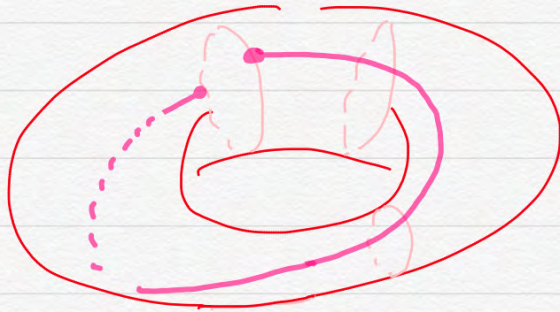
どうつながり、  
どうつながり、

を考えた.

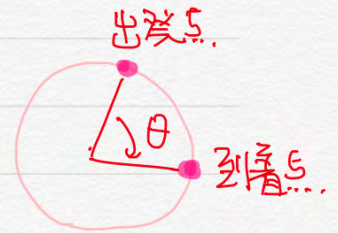
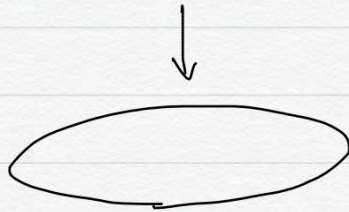




円周上の円周バンドル, 接続つき  
 のホムトポロジー分類されるか?



接続を消すと  
 一周まわるとして  
 一般には下し  
 てる。



$\theta \in [0, 2\pi)$  を接続の相対値と見る。

$\theta$  と  $\theta + 2\pi$  は区別しないことにする。

例として:



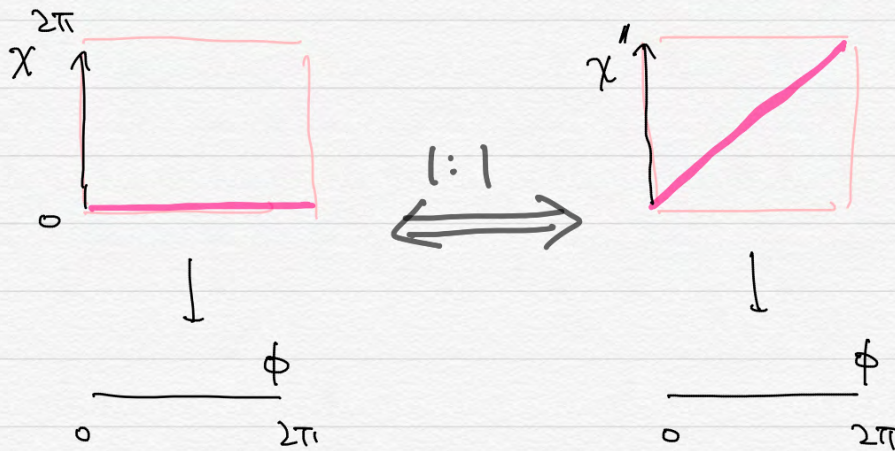
$\theta = 0$



$\theta = 2\pi$

は三次元空間上の埋込みとしては互いに連続変形できる。

しかし抽象的に二次元では:

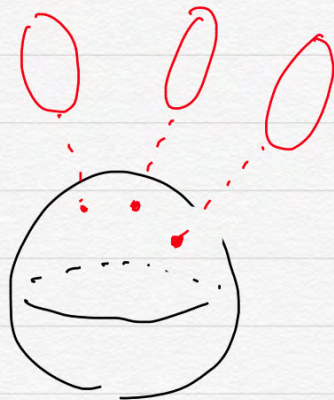


$$X + \phi = X'$$

$\mathbb{A}^1$  上の  $\mathbb{A}^1$  バンドル接続つき

は  $\lambda$  のために  $\theta \in [0, 2\pi)$  で特徴づけられる。

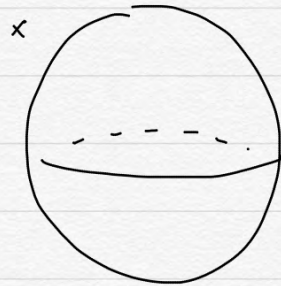
次に 球面上の  $\mathbb{A}^1$  バンドルを考察しよう。



思いつくのはむしろこれか...

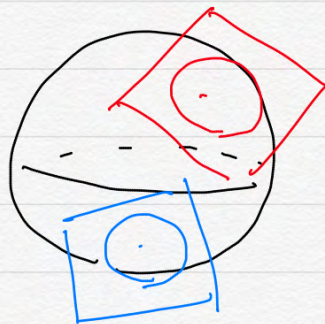


例0



各点 に 単に 円周が  
生じるところに1つ.

例2



各点 の 接平面の  
単位円を2つ作る.

例1

Hopf fibration

$$\text{一般に } S^n = \{ |x_1|^2 + \dots + |x_{n+1}|^2 = 1 \} \quad \varepsilon$$

$n$ 次元球面  $S^n$  である.

$$S^3 = \{ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = |z|^2 = 1 \}$$

$z, w$  である.

$$z = a + bi$$

$$w = c + di$$

222

$$S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varepsilon$$

$$(z, w) \mapsto (|z|^2 - |w|^2, 2\operatorname{Re} z\bar{w}, 2\operatorname{Im} z\bar{w})$$

$\pi$  である.

$$(|z|^2 - |w|^2)^2 + (2\operatorname{Re} z\bar{w})^2 + (2\operatorname{Im} z\bar{w})^2 = 1 \quad \forall z, w$$

$$f: S^3 \rightarrow S^2$$

特に  $(z', w') := (e^{it}z, e^{it}w)$

は  $(z, w)$  と同じ点になる。

$\leadsto S^2$  の 1 点になる、 $z \neq 0$  のは  $S^3$  中の円。

また、 $S^3$  は  $S^2$  の点  $S^1$  の積。

( $S^2$  上の点  $x$  になる  $z, w$  は  $\pm z, \pm w$  がある...) )

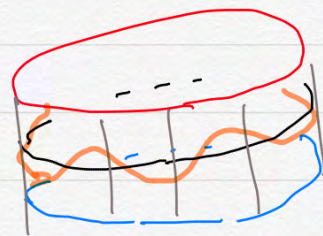
( $\leadsto$  Mathematica に  $f$  の図示。)

問 例 0, 例 2, 例 1 は本質的に異なるか?

答 一緒。

どうですか?

Möbius の帯 vs 別の帯 の比較



切断  $\hookrightarrow$  射影



切断  $\hookrightarrow$  射影



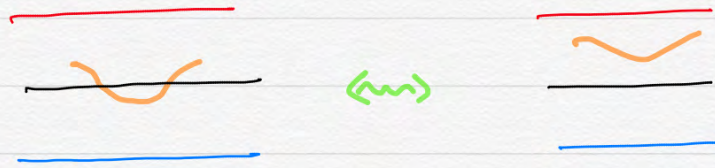
切断の黒線との交点:

奇数個

偶数個

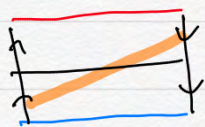


交点の数が偶数個か奇数個かの連続変形でかかるといふ:



∴ 交点の数は1つずつ増えたり減ったりする。

×の回数



1回

○の回数



0回

円周バンデルシンの場合:



各点に円周を添えて

平面が生じていると  
思うことができる。

(円周のそれぞれを平面に  
単位円として埋め込める  
こと。)

バンデルシンの

切断をとり。原点を何回まわりますか?

例2 の場合:

切断

各点で

接点を

とらえる。



原点を

接点を

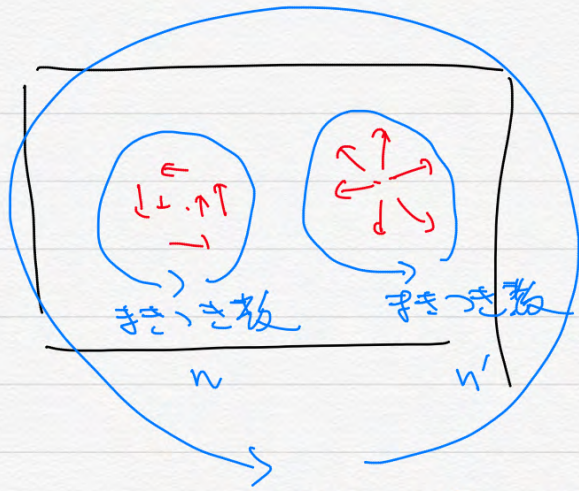
とらえる

とらえる。





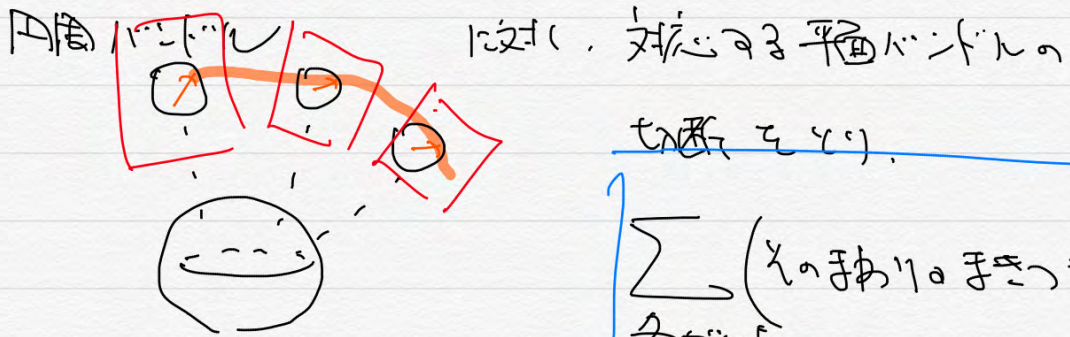




手きつき数  $n+n'$

連続変形での手きつき数はかわらない!

(こゝで Mathematica で図示.)



$$\sum_{各点} (各点の手きつき数)$$

を考へると、各点の手きつき数の和が一定になる。

(第1) チャーニ数  $chi_1$

例0



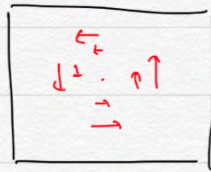
自明なポイント

$$チャーニ数 = 0$$

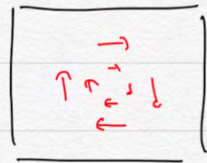


例2

向き付き数



+1



+1

(+)

4+1の数 = +2.

例1

Hopf fibration

$$S^3 = \{ |z|^2 + |w|^2 = 1 \} \rightarrow S^2$$

$$\begin{matrix} \cup \\ (z, w) \end{matrix} \mapsto (|z|^2 - |w|^2, 2\operatorname{Re}z\bar{w}, 2\operatorname{Im}z\bar{w})$$

同一点にうつる円周:

$$(z, w) \sim e^{it}(z, w)$$

Mathematica に与えられた  $z = a+bi, w = c+di$  かつ  $(a, b, c, d) \in (1, 0, 0, 0)$  ならば  $\mathbb{R}^3$  に投影.

$d=0, c>0$  かつ半平面  $\tau = \cos\theta$  かつ  $\mu = \sin\theta$

$$(c\cos\theta, \sin\theta, 0, 0) \xrightarrow{\text{投影}} \left( \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}, 0, 0 \right)$$

↓ Hopf map

$$(1, 0, 0)$$

の円周  $\underbrace{S^1}$  かつ  $\tau$

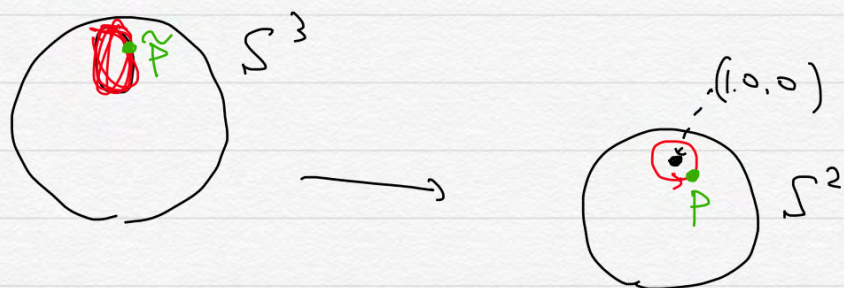
切断が取れる.



$\chi_{\text{diff}} < 2 \cdot 12$      $0 < \epsilon \ll 1$      $\text{etc}$

$$\left( \sqrt{1-\epsilon^2} \cos\theta, \sqrt{1-\epsilon^2} \sin\theta, \epsilon, 0 \right) \leftarrow \tilde{p}$$

$$\left( 1-2\epsilon^2, 2\sqrt{1-\epsilon^2} \cos\theta, 2\sqrt{1-\epsilon^2} \sin\theta \right) \leftarrow p$$



$p$  が 1 周する  $\tilde{p}$  も 1 周する.

$\leadsto$  巻き数は 1.

$\leadsto$  Hopf fibration の  
4-1 巻き数は 1.