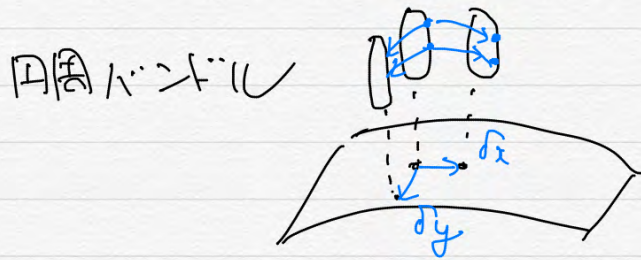


接続 (connection) について:



接続 = ベクトル
ポテンシャル

曲率 = 磁場

ϵ 散逸後にはたす。

で、ごく近くの隣の円周に

どう点をほこるのか、というルールのこと。

以下この色は
物理への解釈。

例 球面の接バンドルの中の単位円周バンドル

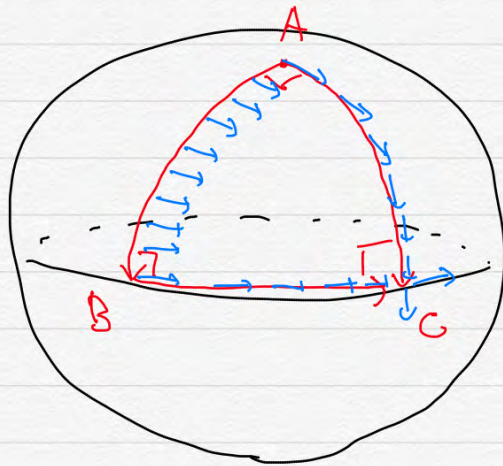
には

標準的な接続がある。

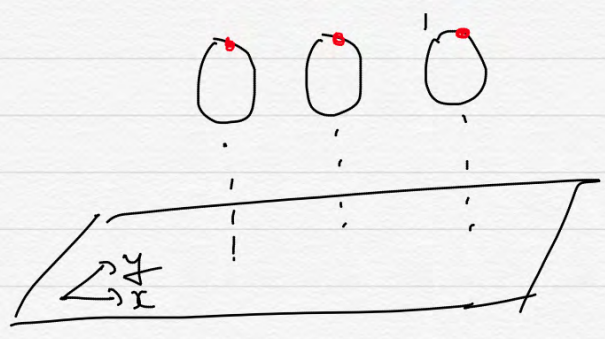


地球上の「軌道」が、平らに
円周をもったまま歩ける。

接続の結果は道に依存する。

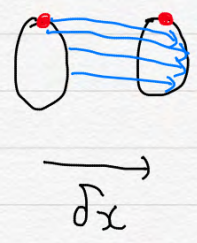


これをどう定量的に表現する?



円周中心に

切断を
取れる範囲で
1つ固定.



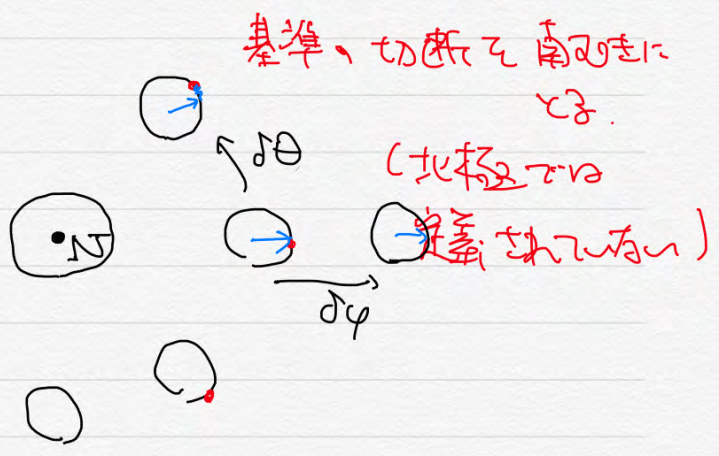
x方向に δx 動かした際
角度 $A_x(x, y) \delta x$ だけ回転



y方向に δy 動かした際
角度 $A_y(x, y) \delta y$ だけ回転

接線の方向

例. 球面の接中心に

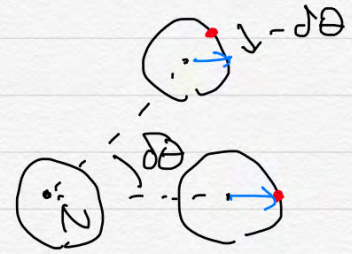


$$\begin{cases} A_\varphi(\varphi, \theta) = 0 \\ A_\theta(\varphi, \theta) = (-\cos \varphi) d\theta \end{cases}$$

← 7-2-a
接線
と一致する.

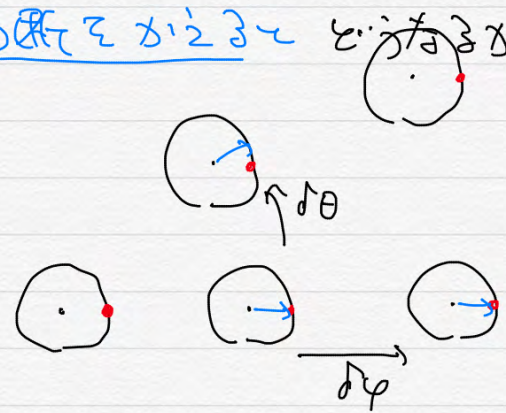
$\varphi = \frac{\pi}{2}$ での $A_\varphi = 0$: 基準の切斷 に対して Θ がある.

$\varphi \sim 0$ での $A_\theta = -\delta\theta$



北極近くの固定した座標系に対して Θ がある.

基準の切斷を 変えることができるか?



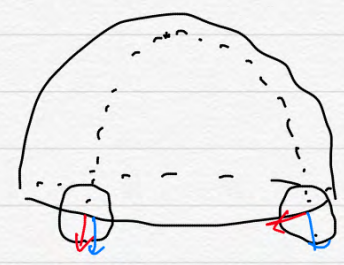
基準の切斷を 直接 に変える.

上と同じ接続 (向き) でも $A_{\theta, \varphi}(\theta, \varphi)$ は変わる.

$$\begin{cases} A_\varphi^{new}(\varphi, \theta) \delta\varphi = 0 \\ A_\theta^{new}(\varphi, \theta) \delta\theta = (1 - \cos\varphi) \delta\theta \end{cases}$$

$\varphi = 0$ での 基準の切斷 に対して 変える

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ での 基準の切斷 に対して 向き: $A_\theta^{new} = \delta\theta$



基準 運動はベクトル

一般に

ある基準の切断 に対し

別の切断 が 角度 $\chi(\theta, \varphi)$ の位相を取ったとすると

連続 $A_\varphi^{old} d\varphi + A_\theta^{old} d\theta$

連続 $A_\varphi^{new} d\varphi + A_\theta^{new} d\theta$

とすると

$$A_\varphi^{old} d\varphi + A_\theta^{old} d\theta = d\chi + A_\varphi^{new} d\varphi + A_\theta^{new} d\theta$$

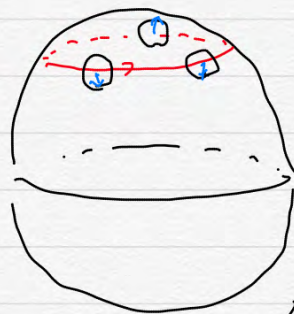
$$= \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} d\theta + A_\varphi^{new} d\varphi + A_\theta^{new} d\theta$$

↑が
ポテンシャル
の交換
のせい。

$$\Rightarrow A_\varphi^{new} = A_\varphi^{old} - \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} ; A_\theta^{new} = A_\theta^{old} - \frac{\partial \chi}{\partial \theta}$$

今回の $\chi = -\theta$ だと、上式を容易に証明してみよう!

次に



赤道に沿って一周を回ると、何度回転したかを考えよう。

たいてい一定緯度 (φ)

で経度 (θ) を一周する。

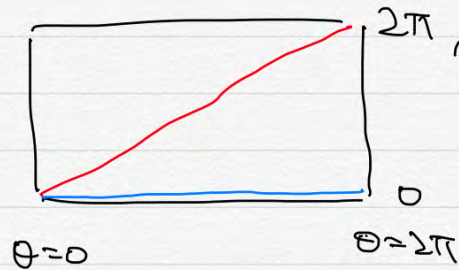
総回転角は $\int_0^{2\pi} A_\theta^{old} d\theta = 2\pi(1 - \cos\varphi)$

↑が
ポテンシャル
のせい。

つまり $\int_0^{2\pi} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} d\theta = [\chi]_0^{2\pi} = (\chi \text{ の 終点の値}) - (\chi \text{ の 起点の値})$

$\times 2\pi$

$$\varphi = 0 \sim 2\pi$$



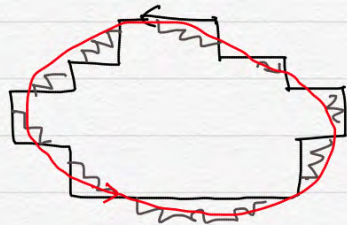
↑ 72/11-1 の
内容参照

青の矢印は時計回りの向き
赤の矢印は逆時計回りの向き

∫

とされたとき直線に沿って

$$\oint (A_x dx + A_y dy)$$



$$:= \lim_{\text{分割} \rightarrow \infty} \sum_{\text{微小}} A_x(x,y) dx + A_y(x,y) dy$$

は 与えられた経路に沿って総回転角を 0 とする

基準の方向が内部を向くように

7/17-
ポインティング

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \lim_{\text{分割} \rightarrow \infty} \sum_{\text{微小長方形}}$$

$$\left[\begin{array}{l} A_x(x,y) dx \\ + A_y(x+dx, y) dy \\ - A_x(x, y+dy) dx \\ - A_y(x, y) dy \end{array} \right]$$

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

ストークスの定理

!! F_{xy} F の曲率

封筒の接点の例では

$$A_{\varphi}^{\text{old}} = 0$$

$$A_{\theta}^{\text{old}} = -\cos\varphi$$

$$A_{\varphi}^{\text{new}} = 0$$

$$A_{\theta}^{\text{new}} = 1 - \cos\varphi$$

t_z, t_r

$$F_{\varphi\theta}^{\text{old}} = \frac{\partial A_{\theta}^{\text{old}}}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_{\varphi}^{\text{old}}}{\partial\theta} = \sin\varphi$$

$$F_{\varphi\theta}^{\text{new}} = \frac{\partial A_{\theta}^{\text{new}}}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_{\varphi}^{\text{new}}}{\partial\theta} = \sin\varphi$$

一致
一致

この差 - 積に正しく

$$F_{xy}^{\text{old}} - F_{xy}^{\text{new}} = \frac{\partial(A_y^{\text{old}} - A_y^{\text{new}})}{\partial x} - \frac{\partial(A_x^{\text{old}} - A_x^{\text{new}})}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \chi - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \chi = 0$$



$$\int F_{\varphi\theta} d\varphi d\theta = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$= 2\pi [-\cos\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0}$$

$$= 2\pi (1 - \cos\varphi_0)$$

基準となるのは

赤い点の位置

赤い点の位置

北極点の位置を定まる

$$\rightarrow A_{\varphi,\theta}^{\text{new}}$$

$$\rightarrow A_{\varphi,\theta}^{\text{old}}$$

に53度回転

に53度回転しては

つまり

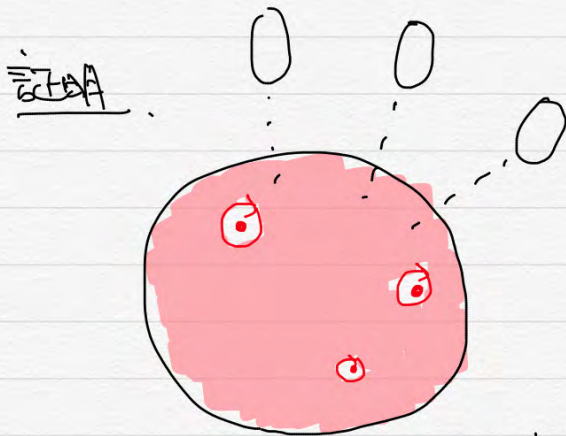
$$\int_{\text{全球面}} F_{\varphi\theta} d\varphi d\theta = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$= 4\pi$$

一致

曲面上の
一般に円周バリエーション γ
の接続 $A_{x,y}$ の曲率 F_{xy} に対し

$$\int_{\text{全曲面}} F_{xy} dx dy = 2\pi \cdot \left[\text{円周バリエーションの} \right. \\ \left. \text{4p-2数} \right] \text{である.}$$



円周バリエーションに対し

$n-2$ の有限個の点 p_i の存在

切断 が与えられる.

この切断を基準として

接続 A を考え 2π の定理を用いて

$$\int_{\text{全曲面}} F_{xy} dx dy = \sum_{\text{切断の成分から点 } p_i} \oint_{\text{微小な円周}} \boxed{A_\theta} d\theta$$

この基準切断が p_i の取りで連続な円周バリエーションに対し
角度 $\chi(\theta)$ に対応する.

$$\boxed{A_\theta} = \boxed{A_\theta^{\text{new}}} - \frac{\partial \chi}{\partial \theta}$$

$$\oint A_\theta d\theta = \oint A_\theta^{\text{new}} d\theta - \left[\chi \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(p_i \text{での} \right. \\ \left. \text{巻き回数} \right) \times 2\pi$$

連続な基準切断に
対しては微分を
巻きはバリエーションを同じにする.

これは Hopf fibration の表現に確認しよう!

この S^3 は Hopf fibration に連続して $U(1)$ を射影する。

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto (2\operatorname{Re} z\bar{w}, 2\operatorname{Im} z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2)$$

これは $SO(3)$ の $(\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)$ に対応する

$$a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi e^{i\theta} \\ \sin\varphi e^{-i\theta} & -\cos\varphi \end{pmatrix} \text{ である。}$$

$(a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z)^2 = 1$ より固有値は ± 1 。

$$\varphi=0 \text{ のとき } \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\chi \\ \sin\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\chi) \\ \sin(\varphi-\chi) \end{pmatrix}$$

$$\text{これは } \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix}$$

は固有ベクトル。同様に

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi e^{i\theta} \\ \sin\varphi e^{-i\theta} & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix}$$

± 固有値 ± 1 の固有ベクトルがある。

$\varphi=0$ (北極) を含む $U(1)$ の軌道は T_0 である。

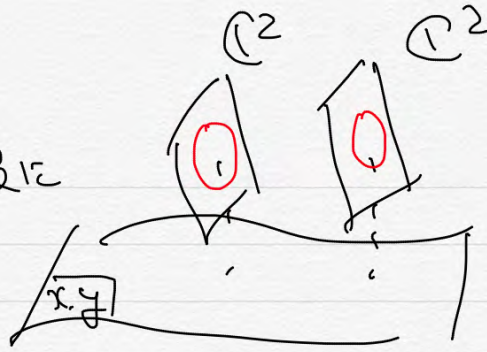
(これは a 成分のみの固有値 1 である。)

よって (a, b, c) は $SO(3)$ の元である

$$e^{i\varphi} \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix}$$

の形である。

通常一般に

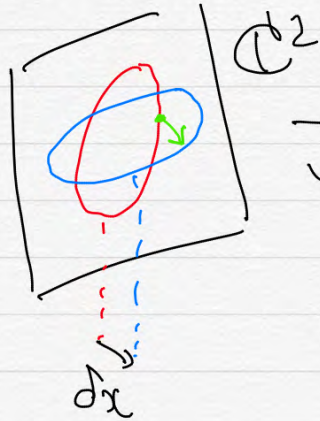


曲面に基底
2次元空間が1つだけ
あり、

その中のベクトル $|v(x, y)\rangle \in \mathbb{C}^2$ が与えられる
とき

$e^{i\phi} |v(x, y)\rangle$ という円周 $\in \mathbb{C}^2$ の

円周ベクトルとなる。この標準的基底の



一番近い点になる

ことができる。

この基底、円周に与える
基底。

(\mathbb{C} から AA 形式的に A_x, A_y を書くことは基底、円周である)

$$|v(x, y)\rangle = |v\rangle$$

$$|v(x+dx, y)\rangle = |w\rangle = |v\rangle + \delta |v\rangle$$

と略記する。

$$e^{i\phi} |w\rangle \quad (\phi = 0 \sim 2\pi) \text{ の中}$$

$|v\rangle$ と一番近いものは何か？

$$\| |v\rangle - e^{i\phi} |w\rangle \|^2 = \underbrace{(|v\rangle, |v\rangle)}_1 - \left(e^{-i\phi} (|w\rangle, |v\rangle) + e^{i\phi} (|v\rangle, |w\rangle) \right) + \underbrace{(|w\rangle, |w\rangle)}_1$$

$2 \operatorname{Re} e^{i\phi} (|v\rangle, |w\rangle)$

これを最大化。

$\operatorname{Re} e^{i\psi} (|w\rangle, |w\rangle)$ を最大化.

$a e^{i\theta}$ 実数形. a : 実

$\psi = -\theta$ を最大化.

かつ $|w\rangle$ は $|u\rangle$ に ~~近~~ 近 $|w\rangle = |u\rangle + \delta|u\rangle$.

$1 = (|w\rangle, |w\rangle) = \underbrace{(|u\rangle, |u\rangle)}_1 + (|u\rangle, \delta|u\rangle) + (\delta|u\rangle, |u\rangle) + \underbrace{(\delta|u\rangle, \delta|u\rangle)}_{\ll 1}$
← 補正項

5.2 $(|u\rangle, \delta|u\rangle)$ は純虚.

$\therefore (|u\rangle, |w\rangle) = \underbrace{(|u\rangle, |u\rangle)}_{=1} + \underbrace{(|u\rangle, \delta|u\rangle)}_{i\theta}$

$\Rightarrow \psi = i(|u\rangle, \delta|u\rangle)$.

結論 状態 $e^{i\theta}|u\rangle \rightarrow$ 状態 $e^{i\theta}|w\rangle$

$\Rightarrow |u\rangle \mapsto e^{i(i(|u\rangle, \delta|u\rangle))} |w\rangle$

\therefore 一般に \dots

$A_x = i(|u\rangle, \frac{\partial}{\partial x} |u\rangle)$
 $A_y = i(|u\rangle, \frac{\partial}{\partial y} |u\rangle)$

実数形.

Berry
位相

\therefore Hopf f の $|u(\varphi, \theta)\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix}$

実数.

$$A_\varphi = i \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} e^{i\theta} \sin \varphi/2 \\ \frac{1}{2} \cos \varphi/2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$A_\theta = i \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos \varphi/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^2$$

$$\text{23c} \quad F_{\varphi\theta} = \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} = \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sin \varphi.$$

$$\begin{aligned} \text{23c} \quad \int_{\text{Hopf}} F_{\varphi\theta} d\varphi d\theta &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} (-\cos \varphi) \right]_0^\pi = 2\pi. \end{aligned}$$

$$= 2\pi \times 1$$

Hopf f. の $\int_{\text{Hopf}} F_{\varphi\theta} d\varphi d\theta = 2\pi$!