量子力学では 状態は

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$: 内積つき複素ベクトル空間.

時間 t だけの発展 : ユニタリ行列.

$$|\psi\rangle \longmapsto \boxed{U(t)}\,|\psi\rangle$$

$U(t)\,U(t') = U(t+t')$ をみたす.

そのようなユニタリ行列は エルミート行列.

$U(t) = e^{-it\boxed{\underline{H}}}$ と書けることが知られている.

$\underline{H}$ は 単位 s^{-1} を持つ.

そもそも s^{-1} (ヘルツ) の定義は ^{133}Cs の $\underline{H}$ の固有値 (沢山ある) の特定の二つのものの差が

$2\pi \times 9192631770\ s^{-1}$

となる というもの.

定義値

プランク定数 $h = 6.6\ldots \times 10^{-34}$ J·s

$\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 1.0\ldots \times 10^{-34}$ J·s

を用いて $H = \hbar \underline{H}$ は 系のエネルギー演算子

だと知られている.

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{tH}{\hbar}}|\psi\rangle$$ より

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H\,|\psi(t)\rangle$$ ：シュレーディンガー方程式の一般形.

直線上を動く点粒子のばあい

状態 $\mathcal{H} \ni \psi$ は $\psi : \mathbb{R} \ni x \mapsto \psi(x) \in \mathbb{C}$ という関数.

$$H = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2m}p^2$$ ：古典的なエネルギー.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{古典的} \\ \text{運動量}}}{p} \rightsquigarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{量子化された運動量演算子}}}{-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}$$

シュレーディンガー方程式はこのばあいは:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi(t,x).$$

Hの固有ベクトルは

$$\begin{cases} \psi_k(x) = e^{ikx} \\ H\,\psi_k(x) = \frac{1}{2m}(\hbar k)^2 \cdot \psi_k(x) \end{cases}.$$

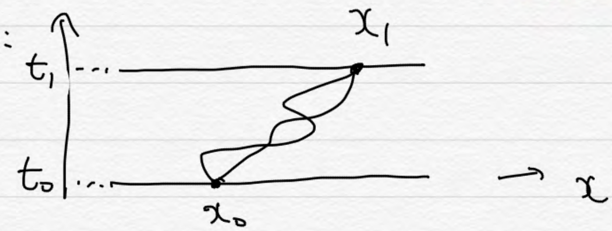
$$\psi(t,x) = e^{-i\frac{t}{\hbar}\cdot\frac{1}{2m}(\hbar k)^2 + ikx}$$

は シュレーディンガー方程式の解のひとつ.

作用 $S[x(t)] = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt$ との関係は？

古典力学： $S[x(t)+\delta x(t)]$
$= S[x(t)] + \int \cancel{\ \ } \, \delta x(t) dt + \cdots$
消えなさい。

量子力学：



勝手な道を $e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}$ に比例する

重みで通過する。

$$\psi(t_1, x_1) \propto \int e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]} \psi(t_0, x_0) \left[\mathcal{D}x(t)_{x(t_0)=x_0}^{x(t_1)=x_1}\right] dx_0$$

いま

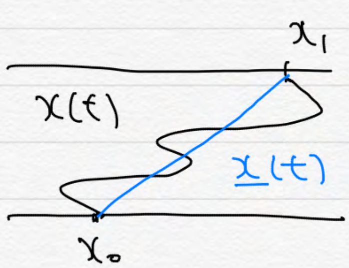
$$\psi(t_0=0,\ x) = e^{ipx/\hbar}$$

のとき

$$\psi(t_1=t,\ x) = e^{-\frac{it}{\hbar}p^2 + ipx/\hbar}$$

になることを確認しよう。

まず



直線。

$x(t) = \underline{x}(t) + \Delta x(t)$

と分割。

$$S[x(t)] = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{dx}{dt}\frac{d\Delta x}{dt} + \left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)^2 \right] dt .$$

v^2

(定数).

$$\int_{t=t_0}^{t=t_1} \overset{v}{\boxed{\frac{dx}{dt}}} \frac{d\Delta x}{dt} dt = v \left[\Delta x \right]_{t=t_0}^{t=t_1} = 0 .$$

より

$$S[x(t)] = \frac{1}{2} m v^2 (t_1 - t_0) + \int_{t=t_0}^{t=t_1} \frac{1}{2} m \left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)^2 dt .$$

だから

$$\psi(t_1, x_1) \propto \int e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2} m v^2 (t_1 - t_0)\right]} \psi(t_0, x_0) dx_0$$

$$\times \boxed{\int e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t=t_0}^{t=t_1} \frac{1}{2} m \left(\frac{d\Delta x}{dt}\right)^2 dt} \mathcal{D}\Delta x(t)} .$$

計算方法は わからないが どうせ 定数.

よって $T = t_1 - t_0$ として

$$\psi(T, x_1) \propto \int e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\left(\frac{x_1 - x_0}{T}\right)^2 T} \underbrace{\psi(0, x_0)}_{e^{ipx_0/\hbar}} dx_0 ,$$

$x_0 = x_1 + X$ で変数変換.

$$\psi(T, x_1) \propto e^{\frac{ipx_1}{\hbar}} \int \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{X^2}{T}} e^{ipX/\hbar}}_{e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{1}{T}\left(X + \frac{pT}{m}\right)^2 - \frac{p^2}{2m}T\right]}} dX .$$

前頁で参照.

$\underset{\sim}{X} = X + \frac{pT}{m}$ とさらに変換

$$\propto \underbrace{e^{\frac{ipx_1}{\hbar} - \frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}T}}_{\text{欲しかった結果}} \boxed{\int e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{1}{T}\underset{\sim}{X}^2} d\underset{\sim}{X}}$$

これも どうせ 定数.

磁場と電場と結合するばあい どうなるか？

$$\psi(t_1, x_1) = \int e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t=t_0}^{t=t_1}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + qA_t + qA_x\frac{dx}{dt}\right)dt} \times \psi(t_0, x_0)\, \mathcal{D}x(t)\, dx_0$$

$(A_t = -\varphi$ だった。$)$

簡単のため A_t, A_x は定数とする。前回の計算を見直すと の所に $e^{\frac{iq}{\hbar}(-\varphi - A_x \mathrm{X})}$ を挿入するのみ。

$$\psi(t_1, x_1) = e^{\frac{ipx_1}{\hbar} - \frac{i}{\hbar}T\left[\frac{(p-qA_x)^2}{2m} + q\varphi\right]}$$

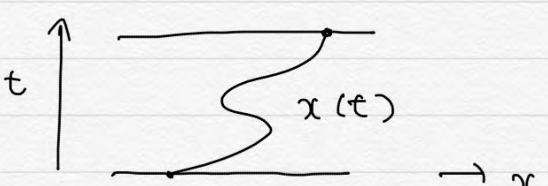
エネルギー。

演算子としてはエネルギーは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{iq}{\hbar}A_x\right)\right)^2 + q\varphi.$$

定数でない A_x, $\varphi = -A_t$ に対してもこうなることが…知られている。

磁場との結合についてもう少し考える。



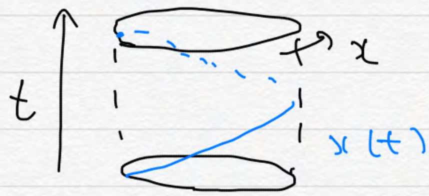
の寄与は

$$e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + q\,A_x\frac{dx}{dt}\right]dt}$$

だった。

基準のとり方に依存。いいのか？

例えば…



とると $e^{\frac{i}{\hbar}q\oint A_x dx}$

という寄与があるが、

$\oint A_x^{old} dx$ と $\oint A_x^{new} dx$ は $2\pi\times$(まきつき数)

だけズレるのだった。

$\Rightarrow$ $e^{\frac{i}{\hbar}q\cdot 2\pi(\text{まきつき数})} = 1$ が必要。

⇝ 電荷は $q = \hbar n$ でないといけない。

n ↑ 整数。

実際、すべての物体の電荷は

$e = 1.602\ldots\times 10^{-19}\,C$ の整数倍。

単位の違いは歴史的経緯によるもの。

$$q^{SI} A_x^{SI} = q^{\text{この講義}} A_x^{\text{この講義}}$$

だから
$$\begin{cases} q^{\text{この講義}} = q^{SI}\cdot\dfrac{\hbar}{e} \\ A^{\text{この講義}} = A^{SI}\cdot\dfrac{e}{\hbar} \end{cases}$$

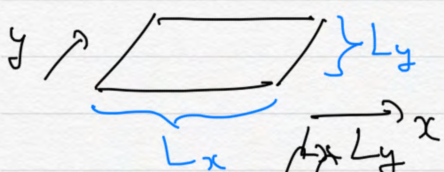
$$F^{\text{この}} = F^{SI}\cdot\frac{e}{\hbar}$$
$$B^{\text{この}} = B^{SI}\cdot\frac{e}{\hbar}$$

$$\int F_{\varphi\Theta}\, d\varphi\, d\Theta = 2\pi\,(\text{チャーン数})$$ だった.

$$\begin{cases} B_z = F_{xy} \\ B_x = F_{yz} \\ B_y = F_{zx} \end{cases}$$ をつかうと

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{\sigma} = 2\pi\,(\text{チャーン数})$$ となる.

同様に



$x \sim x + L_x,\ y \sim y + L_y$

と周期的境界条件を課すと

$$\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} F_{xy}\, dx\, dy = 2\pi\,(\text{チャーン数})$$

$$\parallel$$

$$\iint_{▨} B_z\, dx\, dy.$$

$B^{\text{この講義}} = B^{SI}\cdot\dfrac{e}{\hbar}$ だから

磁荷 $= \displaystyle\int \vec{B}^{SI}\cdot d\vec{\sigma} = \frac{2\pi\hbar}{e} \times$ 整数.

電荷 $= e \times$ 整数.

積は $2\pi\hbar \times$ 整数.

"Diracの量子化条件".

$$e \xleftrightarrow{\quad r \quad} -e \qquad 力:\ \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{2\pi\hbar}{e} \xleftrightarrow{\quad r \quad} -\frac{2\pi\hbar}{e} \qquad 力:\ \frac{1}{4\pi\mu_0}\left(\frac{2\pi\hbar}{e}\right)^2\cdot\frac{1}{r^2}.$$

$$\frac{単位電荷間の力}{単位磁荷間の力} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\frac{e^4}{h^2} \sim 0.0002\ldots$$

アルファ

α : 微細構造定数

$$= 4\times\left(\boxed{\frac{e^2}{2\varepsilon_0 hc}}\right)^2 \quad , \ \alpha \sim \frac{1}{137}$$

ここまで $\oint A_x^{old}dx = \oint A_x^{new}dx + 2\pi$(まきつき数)

である影響をみた。閉じた道についてはこれでよいが…

開いた道については

$$\int_{x_0}^{x_1} A_x^{old}dx = \int_{x_0}^{x_1} A_x^{new}dx + \Big[\chi(x)\Big]_{x_0}^{x_1}$$

だった。

$$\psi(t_1, x_1) = \int e^{\frac{i}{\hbar}\left[\ \cdots\ + q\int_{x_0}^{x_1} A_x dx\right]}\ \psi(t_0, x_0)\,\mathcal{D}x(t)\,dx_0$$

が意味を持つためには

$$\psi^{old}(x) = e^{i\frac{q}{\hbar}\chi(x)}\psi^{new}(x)$$ とすればよい.

新旧基準切断の差.

「ゲージ変換」と呼ぶ…

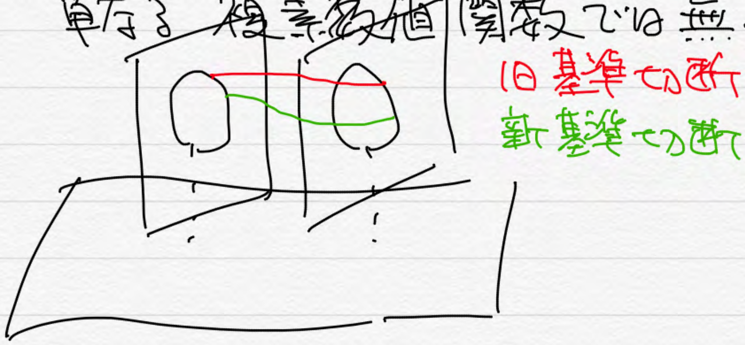
$q = \hbar$ (整数) だった.

簡単のため $q=\hbar$ のばあい

$$\psi^{old}(x) = e^{i\chi(x)}\psi^{new}(x).$$

これは 電荷 q の粒子の波動関数は

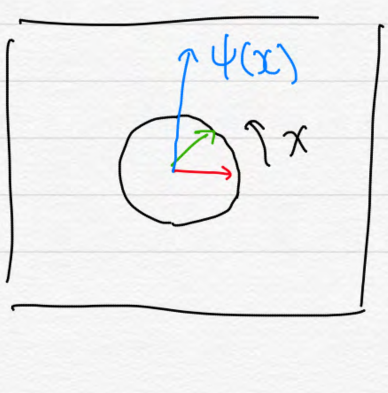
単なる複素数値関数では無く



電磁場がその接続であるような円周バンドルが

単位円周バンドルであるような平面バンドルの

切断であることを意味する.



$$\psi^{old}(x) = \psi^{new}(x)\cdot e^{i\chi(x)}.$$

磁場中の粒子のエネルギー演算子にあらわれた

$$\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{g}{\hbar}A_x$$ という組みあわせは

($g=\hbar$ のばあい)

$$\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial x} - iA_x^{old}\right)\psi^{old}(x)}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} - i\left(A_x^{new} + \frac{\partial \chi}{\partial x}\right)\right] e^{i\chi}\psi^{new}(x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{i\chi}\psi^{new}\right) - i\left(A_x^{new} + \cancel{\frac{\partial \chi}{\partial x}}\right)e^{i\chi}\psi^{new}(x)$$

$$\cancel{i\frac{\partial \chi}{\partial x}e^{i\chi}\psi^{new}} + e^{i\chi}\frac{\partial}{\partial x}\psi^{new}$$

$$= e^{i\chi}\boxed{\left(\frac{\partial}{\partial x} - iA_x^{new}\right)\psi^{new}(x)}$$

と $\left(\frac{\partial}{\partial x} - iA\right)\psi$ という組み合せ自身が

ψ と同じ平面バンドルの切断であるようになっている.

これを共変微分 (covariant derivative) という.

$\frac{\partial}{\partial x}\psi$ 単体ではいろいろつじつまが合わなくなる.

//