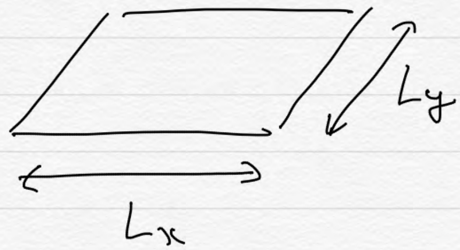
二次元平面を動く(荷電)粒子を考える。 まず (磁場 / 電場) なし。



簡単のため
周期的境界条件

$$\boxed{\begin{cases} \psi(x,y) = \psi(x+L_x, y) \\ \psi(x,y) = \psi(x, y+L_y) \end{cases}}$$

を課す。

エネルギー演算子は

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x{}^2 + \hat{p}_y{}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2m}\left[\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2\right].$$

固有ベクトルは

$$\psi(x,y) = e^{(ip_x x + ip_y y)/\hbar}$$

$$\hat{H}\psi = \frac{1}{2m}\left(p_x{}^2 + p_y{}^2\right)$$ だが

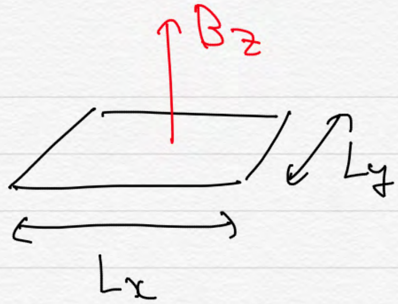
上記 $\boxed{}$ より $e^{ip_xL_x/\hbar} = e^{ip_yL_y/\hbar} = 1$

よって $p_x = 2\pi\hbar n_x / L_x$, $p_y = 2\pi\hbar n_y / L_y$

整数。

エネルギー固有値は $\dfrac{(2\pi\hbar)^2}{2m}\left[\left(\dfrac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\dfrac{n_y}{L_y}\right)^2\right]$.

L_x, L_y を大きくすると 稠密になる。



磁場をいれてみる.

$$\begin{cases}\int B_z\,dx\,dy = \int F_{xy}\,dx\,dy = 2\pi N \\ \int B_z^{SI}\,dx\,dy = \dfrac{2\pi N \hbar}{e}\end{cases}$$

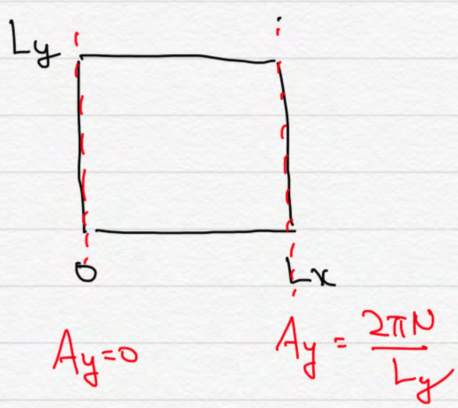
となる.

エネルギー演算子は

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{q}{\hbar}A_x\right)\right]^2 + \left[-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{q}{\hbar}A_y\right)\right]^2 .$$

$B_z = F_{xy} = \dfrac{2\pi N}{L_x L_y}$, $F_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial x}A_y - \dfrac{\partial}{\partial y}A_x$ だから

$A_x = 0$, $A_y = \dfrac{2\pi N}{L_x L_y}\cdot x$ ととってよい.



円周バンドルは y を $0 \sim L_y$ まで動かしても動かない.

円周バンドルは y を $0 \sim L_y$ まで動かすと $2\pi N$ まわる.

$x=0$ と $x=L_x$ は同一視されるが基準の軸がまきつき数 N だけずれている.

$$A_y^{x=0} = A_y^{x=L_x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}$$ なので

$$\chi = -\frac{2\pi N}{L_y} y .$$

前回のノートの最終頁を参照すると　(以下 $q=\hbar$ として)

$$\begin{cases} \psi(x, y) = e^{-i\frac{2\pi N}{L_y} y} \cdot \psi(x+L_x, y) & \cdots (※) \\ \psi(x, y) = \psi(x, y+L_y) . & \cdots ★ \end{cases}$$

エネルギー演算子は

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left[-i\left(\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{2\pi N}{L_x L_y}x\right)\right]^2\right] .$$

$$\psi(x, y) = \sum_n f_n(x)\, e^{i2\pi n/L_y}$$ と仮定.

上記★をみたすようにとった.

※は.

$$= \sum f_n(x+L_x)\, e^{i\cdot 2\pi(n-N)y/L_y}$$

すなわち

$$f_n(x) = f_{n+N}(x+L_x) .$$

⇨ $f_0 \dots f_{N-1}$ をきめると 外は全部 きまってしまう.

$$\hat{H}\psi(x.y) = E\psi(x.y)$$ は

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(-i\frac{d}{dx}\right)^2 + \left[\frac{2\pi n}{L_y} - \frac{2\pi N}{L_x L_y}x\right]^2\right] f(x) = E f(x)$$

という ビブン方程式.

$$\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + (bx-c)^2\right] f(x) = Ef(x)$$

は 物理ではとても重要… $x = \tilde{x} + \frac{c}{b}$ とかきかえ

$\tilde{x} \to x$ とおきかえると

$$\underbrace{\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + (bx)^2\right]}_{=:\hat{C}} f(x) = Ef(x).$$

$$\hat{A} := \frac{\partial}{\partial x} + bx$$

$$\hat{B} := -\frac{\partial}{\partial x} + bx$$ とおくと

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{B}f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + bx\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x} + bx\right) f \\ &= \left[-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + (bx)^2\right] f + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}(bxf) - bx\frac{\partial}{\partial x} f}^{bf} \\ &= (\hat{C} + b) f\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{B}\hat{A}f &= \left(-\frac{\partial}{\partial x} + bx\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + bx\right) f \\ &= \left[-\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + (bx)^2\right] f \overbrace{- \frac{\partial}{\partial x}(bxf) + bx\frac{\partial}{\partial x} f}^{-bf} \\ &= (\hat{C} - b) f.\end{aligned}$$

すると

$$\hat{C}f = Ef$$

なら $$\begin{aligned}\hat{C}\hat{A}f &= (\hat{A}\hat{B} - b)\hat{A}f = (\hat{A}\hat{B}\hat{A} - b\hat{A})f \\ &= (\hat{A}(\hat{C}-b) - b\hat{A})f = (E-2b)\hat{A}f\end{aligned}$$

また $$\begin{aligned}\hat{C}\hat{B}f &= (\hat{B}\hat{A} + b)\hat{B}f = (\hat{B}\hat{A}\hat{B} + b\hat{B})f \\ &= (\hat{B}(\hat{C}+b) + b\hat{B})f = (E+2b)\hat{B}f.\end{aligned}$$

次のように $\hat{C}$ の固有ベクトルと固有値が求まる。

まず $\hat{A}v(x)=0$ は $v(x)=e^{-\frac{b}{2}x^2}$ が解。

これは $\hat{C}v(x)=(\hat{B}\hat{A}+b)v(x)=bv(x)$.

次に $\hat{C}(\hat{B}v(x))=3b\cdot\hat{B}v(x)$

$\hat{C}(\hat{B}^2v(x))=5b\cdot\hat{B}^2v(x)$

$\vdots$

$\hat{C}(\hat{B}^{l}v(x))=(2n+1)b\,\hat{B}\,v(x)$

$\vdots$

これで尽きていることが知られている。

$$\phi_l(x):=\hat{B}^l v(x)=\left(-\frac{\partial}{\partial x}+bx\right)^l e^{-\frac{b}{2}x^2}$$

$$=:\underbrace{P_l(bx)}_{\text{エルミート多項式}}e^{-\frac{b}{2}x^2}$$

$\hat{A}$：消滅演算子

$\hat{B}$：生成演算子　という。

$\hat{B}^l v(x)$ は l が偶 → 偶関数

奇 → 奇関数

話を戻すと

$$\psi(x,y)=\sum_n f_n(x)e^{i2\pi n/L_y}$$

但し $f_n(x)=f_{n+N}(x+L_x)$ のため

$f_0\cdots f_{N-1}$ をきめると外は全部きまる。

で

$\hat{H}\psi(x,y) = E\psi(x,y)$ は

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left[\frac{2\pi n}{L_y} - \frac{2\pi N}{L_x L_y}x\right]^2\right] f(x) = Ef(x)$$

だった。

∴ $\hat{H}$ の固有値は $(2l+1)\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{2\pi N}{L_x L_y}$ で

固有関数は

$$\psi_{l,n_0}(x,y) := \sum_{\substack{n \bmod N \\ = n_0}} \phi_l\left(x - \frac{n}{N}L_x\right) e^{\frac{2\pi i n}{L_y}y}$$

$(n_0 = 0, 1, \cdots, N-1)$

$\frac{2\pi N}{L_x L_y} = B_z = B_z^{SI}\cdot\frac{e}{\hbar}$ なので

固有値は $\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m}eB_z^{SI}$ ← ランダウ準位

l を固定する毎に $N = \frac{B_z^{SI}L_x L_y}{2\pi\hbar/e}$ だけ状態がある。

さらに電場をかけるとどうなるか？

$\hat{H}$ に eEx というポテンシャル項を加える。

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left[\frac{2\pi n}{L_y}-\frac{2\pi N}{L_xL_y}x\right]^2\right]+eEx$$

$\frac{eB}{\hbar}$

$$\simeq\frac{\hbar^2}{2m}\left[\left(-i\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\right)^2+\left[\frac{2\pi n}{L_y}-\frac{2\pi N}{L_xL_y}\tilde{x}\right]^2\right]+O(E^2)$$

ただし $\boxed{\tilde{x}=x+\frac{2m}{\hbar^2}eE\Big/\left(\frac{2\pi N}{L_xL_y}\right)^2=x+m\frac{E}{eB^2}}$

1つの粒子のはこぶ電流は $\hat{v}_x=\frac{1}{m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$

$\hat{v}_y=\frac{1}{m}\left(-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial y}-i\frac{2\pi N}{L_xL_y}x\right)\right)$ からわかる。

$E=0$ なら $\langle\hat{v}_x\rangle=\langle\hat{v}_y\rangle=0$ と思われる。

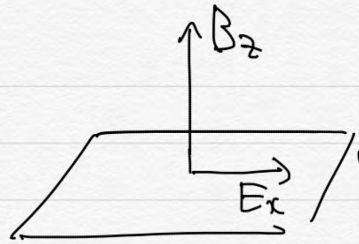
$E\neq0$ による影響は $\boxed{}$ のみ。 $eB/\hbar$

$\rightsquigarrow$ $\hat{v}_y$ が $-\frac{1}{m}\cdot\hbar\cdot\frac{2\pi N}{L_xL_y}\cdot m\frac{E}{eB^2}=-\frac{E}{B}$ シフト。

Pauli の排他律より、下から l コのランダウ準位が全部埋まっているとき、全電流は y 方向に

$$l\cdot\underbrace{N}_{=\frac{eB}{h}L_xL_y}\cdot\frac{e\langle\hat{v}_y\rangle}{L_y}=-l\cdot\underbrace{\frac{e^2}{\cancel{\hbar}\,h}}_{\text{量子ホール伝導度!}}\cdot V$$

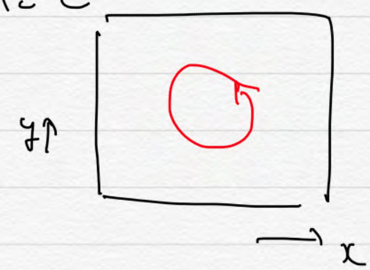
計算途中には量子が入って使ったが答えには $\hbar$ はない。



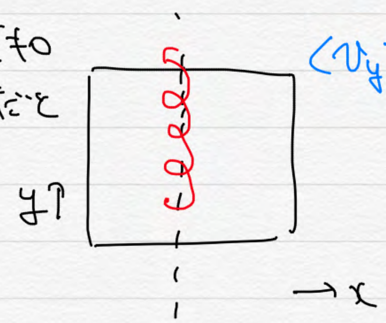
$$\begin{cases} m\dfrac{d^2}{dt^2}x = eB\dfrac{d}{dt}y + eE \\ m\dfrac{d^2}{dt^2}y = -eB\dfrac{d}{dt}x \end{cases}$$

平均速度は $\langle v_y \rangle = -\dfrac{E}{B}$.

E=0だと



E≠0だと



これにランダウ準位 l コ分の状態数を掛けただけ.

解決の第一歩ではあるが，まだまだ遠い.

① 非常に理想化・単純化している.

実際の実験では非一様，周期的でなく，いろいろ結晶に欠陥もあり. ...

それでも測定されたホール伝導度は非常に整数に近い.

② なぜランダウ準位が丁度 l コ埋まっていると考えるのが適切なのか？