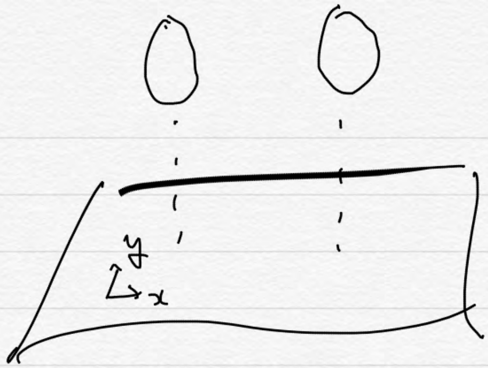
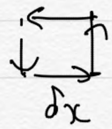
前回



面上の円周バンドルに対し接続を考えた.

基準の切断をとって，そこから角度をはかり，

$(\delta x, \delta y)$ だけ動くと $A_x \delta x + A_y \delta y$ だけ回る.



とすると $F_{xy}\,\delta x\,\delta y$ だけ回る.

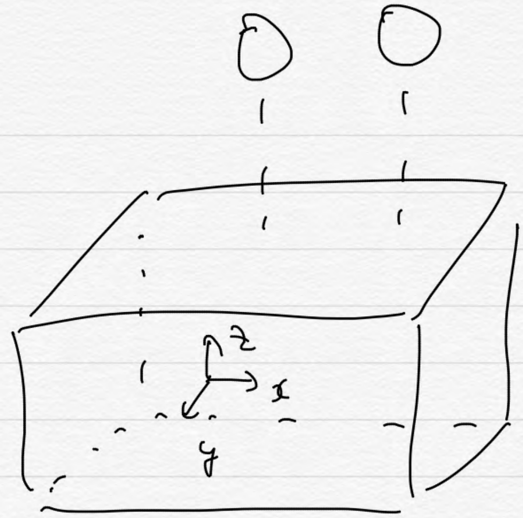
但し $F_{xy} := \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x$

別の基準の切断を基準の切断に対し $\chi(x,y)$ の所に

とると $A_x^{old}\delta x + A_y^{old}\delta y = A_x^{new}\delta x + A_y^{new}\delta y + \delta\chi$

よって $\begin{cases} A_x^{new} = A_x^{old} - \dfrac{\partial \chi}{\partial x} \\ A_y^{new} = A_y^{old} - \dfrac{\partial \chi}{\partial y} \end{cases}$.

$F_{xy}^{new} = F_{xy}^{old}$ であった.



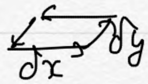
三次元空間上の円周バンドルの場合

接続は

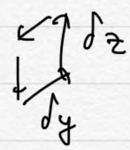
基準の切断 と

$A_x\,\partial x + A_y\,\partial y + A_z\,\partial z$

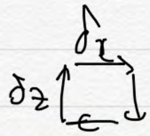
で表わされる.



すると $F_{xy}\,\partial x\,\partial y$ まわる.



すると $F_{yz}\,\partial y\,\partial z$ まわる.



すると $F_{zx}\,\partial z\,\partial x$ まわる.

但し

$$\boxed{\begin{cases} F_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial x} A_y - \dfrac{\partial}{\partial y} A_x \\ F_{yz} = \dfrac{\partial}{\partial y} A_z - \dfrac{\partial}{\partial z} A_y \\ F_{zx} = \dfrac{\partial}{\partial z} A_x - \dfrac{\partial}{\partial x} A_z \end{cases}}$$

まとめて

$$F_{\bullet\blacksquare} = + \frac{\partial}{\partial \bullet} A_{\blacksquare} - \frac{\partial}{\partial \blacksquare} A_{\bullet}.$$

基準切断を取りかえると

$$A^{new}_{\bullet} = A^{old}_{\bullet} - \frac{\partial \chi}{\partial \bullet}.$$

このとき

$$F^{new}_{\bullet\blacksquare} = F^{old}_{\bullet\blacksquare}.$$

以下めんどうなので $\dfrac{\partial}{\partial \bullet}$ を $\partial_{\bullet}$ と書く.

います $\partial_{\bullet} F_{\blacksquare\blacktriangle} + \partial_{\blacksquare} F_{\blacktriangle\bullet} + \partial_{\blacktriangle} F_{\bullet\blacksquare}$

$$= \frac{\partial}{\partial \bullet}\left(\frac{\partial}{\partial \blacksquare} A_{\blacktriangle} - \frac{\partial}{\partial \blacktriangle} A_{\blacksquare}\right) + \frac{\partial}{\partial \blacksquare}\left(\frac{\partial}{\partial \blacktriangle} A_{\bullet} - \frac{\partial}{\partial \bullet} A_{\blacktriangle}\right) + \frac{\partial}{\partial \blacktriangle}\left(\frac{\partial}{\partial \bullet} A_{\blacksquare} - \frac{\partial}{\partial \blacksquare} A_{\bullet}\right) = 0$$

である.

ここで　$B_x := F_{yz}$, $B_y := F_{zx}$, $B_z := F_{xy}$

とおくと前ページの $\boxed{\quad\quad}$ は

磁束密度 $\vec{B}$ を ベクトルポテンシャル $\vec{A}$ で書く式であり

上記 $\boxed{\quad\quad}$ は $\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$

という Maxwell 方程式の一部である.

四次元空間の上の円周バンドルの接続のばあい

t, x, y, z

基準切断と $A_x dx + A_y dy + A_z dz + A_t dt$ がデータ.

$F_{\bullet\blacksquare}$ には前ページの F_{xy}, F_{yz}, F_{zx} に加え

$$\begin{cases} F_{xt} = \frac{\partial}{\partial x} A_t - \frac{\partial}{\partial t} A_x \\ F_{yt} = \frac{\partial}{\partial y} A_t - \frac{\partial}{\partial t} A_y \\ F_{zt} = \frac{\partial}{\partial z} A_t - \frac{\partial}{\partial t} A_z \end{cases}$$

がある.

ここで

$E_x := F_{xt}$,　$E_y := F_{yt}$,　$E_z := F_{zt}$

とすると 前ページの $\boxed{}$ は $A_t = -\varphi$ のもとで

電場を スカラーポテンシャル φ

と ベクトルポテンシャル $A_{x,y,z}$

で書く式である.

前ページ $\boxed{}$ で ◍$=t$, ▲,▨ $\in \{x,y,z\}$

とすると 例えば

$$\partial_t \underbrace{F_{xy}}_{=B_z} + \partial_x \underbrace{F_{yt}}_{=E_y} + \partial_y \underbrace{F_{tx}}_{=-E_x} = 0$$

すなわち
$$\begin{cases} -\partial_t B_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x \\ -\partial_t B_x = \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ -\partial_t B_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z \end{cases}$$

これも Maxwell 方程式の一部.

まとめると 四次元空間に円周バンドルがあり

接続 $A_x dx + A_y dy + A_z dz + A_t dt$

があると思うと, その曲率 $F_{◍▨}$ は

前々頁の $\boxed{}$ 及び 前頁の $\boxed{}$ で

磁束密度 $\vec{B}$ と電場 $\vec{E}$ を

ベクトルポテンシャル (A_x, A_y, A_z) と

スカラーポテンシャル $\varphi = -A_t$ で書く式.

かつ, Maxwell 方程式のうち半分が自動的に満たされる.

ニュートン力学

$\vec{x}=(x,y,z)=(x_1,x_2,x_3)$

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x_i}V(x_1,x_2,x_3)$$

より基本的な定式化

解析力学 $\begin{cases} \text{ラグランジュ形式} \\ \text{ハミルトン形式} \end{cases}$

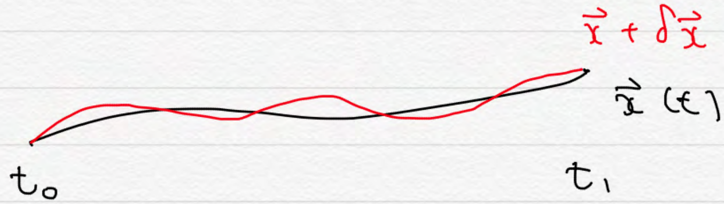
いま積分

$$S[\vec{x}(t)]=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 - V(\vec{x})\right]dt$$

を考える. $S[\vec{x}(t)]$ が $\vec{x}(t)$ の微小変化

$\vec{x}(t)+\delta\vec{x}(t)$ のもとで

一次の変化量がゼロであるのを要求してみる.



但し 端点ではゼロとする.

$$\delta\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2\right] = m\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\delta\vec{x}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} m\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\delta\vec{x}\,dt = \left[m\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\delta\vec{x}\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}\cdot\delta\vec{x}\,dt$$

であり

$$\delta V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{3} \delta x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} V$$

だから

$$\delta S = -\int_{t_0}^{t_1} \left(m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} \cdot \delta \vec{x} + \sum_{i=1}^{3} \delta x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} V \right) dt.$$

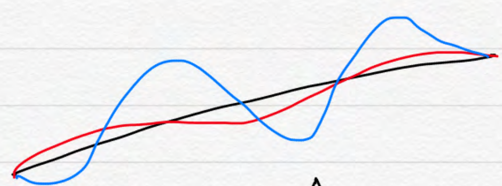
$\delta \vec{x}$ の係数 をまとめて ゼロと置くと

$$m \frac{d^2}{dt^2} x_i + \frac{\partial}{\partial x_i} V = 0.$$

n ← 粒子が n コなら

ご利益？

- 方程式 三本 が…
  ひとつの 汎関数 $S[\vec{x}(t)]$ にまとまった.
- 量子力学 への 移行が かんたん.



全ての

スカラーポテンシャル

電荷 q のばあいは $V = q\varphi$ とすると

$$m \frac{d^2}{dt^2} x_i = q E_i$$ が出る.

磁場との結合は 解析力学では どうすれば よいか？

$$S[\vec{x}(t)] = \int \left[\frac{1}{2} m \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|^2 - V(\vec{x}) \right] dt$$

$$V(\vec{x}) = -q\varphi(\vec{x})$$ ← 電気ポテンシャルのばあい

$\varphi = -A_t$ だったから

電磁場中の粒子の作用は

$$S[\vec{x}(t)] = \int \boxed{\left[\frac{1}{2} m \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|^2 \right] dt}$$

$$+ \int \boxed{q \Big(A_t\, dt} + A_x dx + A_y dy + A_z dz \Big)$$

では無かろうか? 変分して確かめてみよう.

簡単のため $A_{t,x,y,z}$ は x, y, z にのみ依存. t によらないとする.

$\boxed{}$ と $\boxed{}$ の変分はすでにやった.

$$\int A_x dx = \int A_x \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

において
$x(t) \to x(t) + \delta x(t)$ とおきかえると
$y(t) \to y(t) + \delta y(t)$
$z(t) \to z(t) + \delta z(t)$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} A_x \frac{dx}{dt} dt = \underbrace{\int (\delta A_x) \frac{dx}{dt} dt}_{} + \boxed{\int A_x \frac{d\delta x}{dt} dt}.$$

$$\int \left(\cancel{\frac{\partial A_x}{\partial x} \delta x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial A_x}{\partial z} \delta z \right) \frac{dx}{dt} dt.$$

部分積分で…

$$\left[A_x \delta x \right]_{t_0}^{t_1} + \int \Big(\underbrace{-\frac{d}{dt} A_x}_{} \Big) \cdot \delta x\, dt$$

$$-\cancel{\frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{dt}} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

まとめると

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} A_x\,dx = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\delta y + \frac{\partial A_x}{\partial z}\delta z\right)\frac{dx}{dt}\,dt - \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)\delta x\,dt.$$

$A_y dy$, $A_z dz$ もあわせると

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(A_x dx + A_y dy + A_z dz\right) = \sum_{\bullet\neq\blacktriangle}\int_{t_0}^{t_1}\underbrace{\left(\frac{\partial A_\blacktriangle}{\partial \bullet} - \frac{\partial A_\bullet}{\partial \blacktriangle}\right)}_{=F_{\bullet\blacktriangle}}\frac{d\blacktriangle}{dt}\,\delta\bullet\,dt$$

すると

$$\delta S[\vec{x}(t)] = \int\left[\ \cdots\ \right]\delta x\,dt + \int\left[\ \cdots\ \right]\delta y\,dt + \int\left[\ \cdots\ \right]\delta z\,dt,$$

ただし

$$= -m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + q\left(\underbrace{\frac{\partial A_t}{\partial x}}_{=E_x} + \underbrace{F_{xy}}_{=B_z}\frac{dy}{dt} + \underbrace{F_{xz}}_{=-B_y}\frac{dz}{dt}\right)$$

よって運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = q\left(E_x + \frac{dy}{dt}B_z - \frac{dz}{dt}B_y\right),$$

同様に

$$m\frac{d^2}{dt^2}y(t) = q\left(E_y + \frac{dz}{dt}B_x - \frac{dx}{dt}B_z\right),$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}z(t) = q\left(E_z + \frac{dx}{dt}B_y - \frac{dy}{dt}B_x\right).$$

ローレンツ力がきちんと出た!