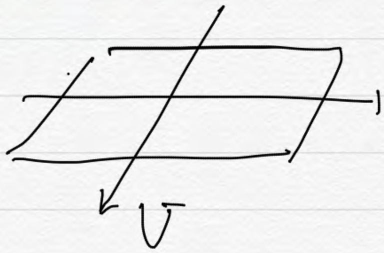
整数量子ホール効果の特殊な例によらない説明.



$$I = i \cdot \frac{e^2}{h} \cdot V$$

一般には勝手な値.

状況によっては安定に $\boxed{\text{整数}}$ だったり

$\boxed{\text{分数}}$ だったりする.

空間方向を周期的条件にしたときに

効いてくる全系の量子状態が

自明な

非自明な

ギャップのある状態という

- $\boxed{\text{唯ひとつの場合}}$
- $\boxed{\text{有限個の場合}}$

相互作用のない多電子系のばあい

一電子のエネルギー演算子の

固有値: E_i

固有状態: $|\psi_i\rangle$ だとすると

$i=1,2,3,\cdots$

N電子系のエネルギー演算子の固有値は

$$E_{i_1} + E_{i_2} + \cdots + E_{i_N}$$

$$(i_1 < i_2 < \cdots < i_N)$$

という形 (パウリの排他律)

量子力学的粒子にはボソンとフェルミオンがある.

定義

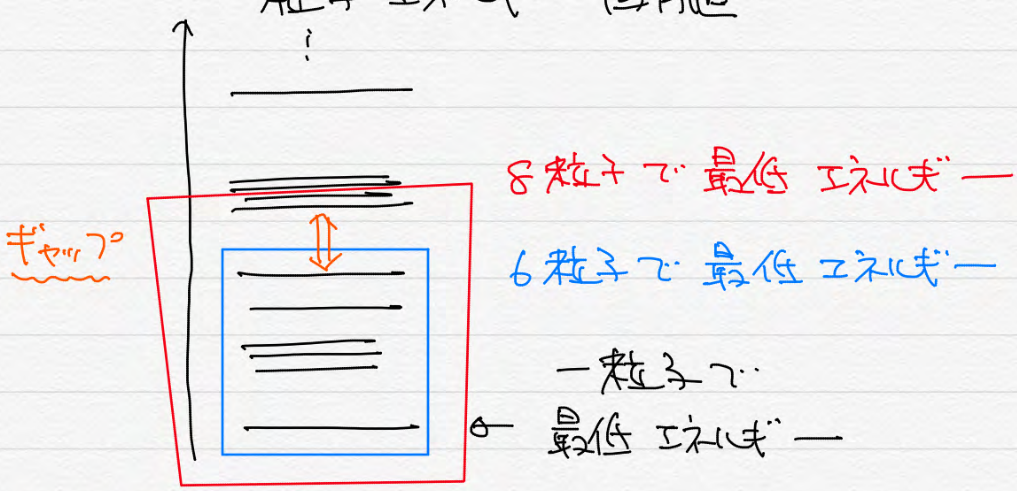
フェルミオン = パウリの排他律をみたす
= 720° まわってはじめてもとにもどる

ボソン = パウリの排他律をみたさない
= 360° でもとにもどる

スピン-統計性定理

という相対論的場の量子論から従う定理.

一粒子エネルギー固有値



6粒子だと

$E_1 + \cdots + E_5 + E_6$ 最低
$E_1 + \cdots + E_5 + E_7$ その次
差は $E_7 - E_6$

8粒子だと

$E_1 + \cdots + E_7 + E_8$
$E_1 + \cdots + E_7 + E_9$
差は $E_9 - E_8$

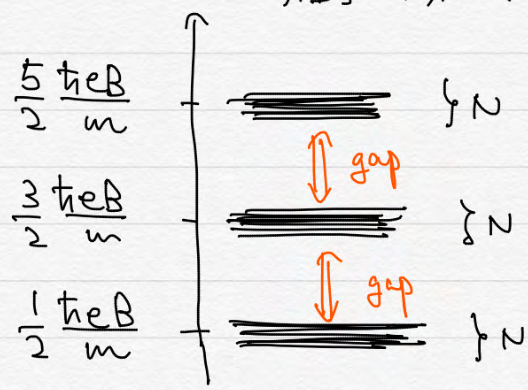
自明なギャップがある ⇒ 整数量子ホール

という一般論がある。

前回扱った理想化された系、すなわち

独立に平面上を動く自由荷電粒子に磁場がかかっているばあい

一粒子エネルギー固有値



固有値は $\left(l+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar}{m}eB_z^{SI}$ ← ランダウ準位

lを固定する毎に $N=\dfrac{B_z^{SI}L_xL_y}{2\pi\hbar/e}$ だけ状態がある

粒子数が丁度 N の整数倍のときのみ自明なギャップがある

→ 整数量子ホール効果

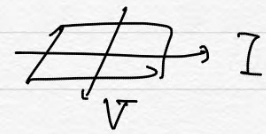
実験的にはもっと荒い条件で自明なギャップがあき

整数量子ホール効果を示す。

自明なギャップがある

① ⇨ 量子作用が定義でき、意味がある

② ⇨ ホール効果 $I \propto \sigma V$



があると量子作用には

$$S \propto \sigma \int \left(A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx}\right) dt\,dx\,dy$$

という項がある

③ ⇨ σ は特定の値の整数倍である

という議論をする。

① 荷電粒子の古典作用には $q\int \left(A_t + A_x \frac{dx}{dt} + A_y \frac{dy}{dt}\right) dt$

という項があった。沢山の粒子があると

$$\cdots + \sum_i A_x\left(x_i(t), y_i(t), z_i(t)\right) \underbrace{q_i \frac{dx_i}{dt}}_{} + \cdots$$

という項がある。

沢山の粒子のはこぶ電流。

連続的に書くと

二次元面内の電流密度

$$\int \left(A_t \rho + A_x j_x + A_y j_y\right) dx\,dy\,dt$$

電荷密度

となる。

すると

$$☆\quad S[A+\delta A] = S[A] + \iint \left[(\delta A_t)\rho + (\delta A_x) j_x + (\delta A_y) j_y \right] dt\,dx\,dy$$

である.

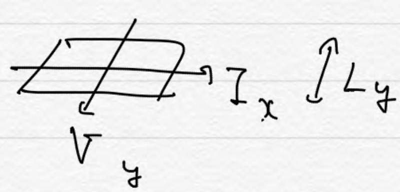
量子ホール系など物性系はとても複雑だが.

自明なギャップのある系のばあいは一般に
計算の最終結果の ρ, j_x, j_y に対して
上式 ☆ をみたすような 有効作用 S がある.

重要な点だが量子多体系の一般論をきちんと学ばずに
説明はむずかしい. 今回は認めてもらう.

②

いま $I_x = \sigma V_y$ とする.



$$j_x = \frac{I_x}{L_y}, \quad E_y = \frac{V_y}{L_y}$$

より

$$\begin{cases} j_x = +\sigma E_y \\ j_y = -\sigma E_x \end{cases}$$

同様に

である.

☆ をみると　　　$E_x = F_{yt}$, $E_y = F_{xt}$ だから

$$S[A] = \cdots\cdots + \sigma\int\left(A_x F_{yt} + A_y F_{tx}\right) dt\,dx\,dy$$

とすればよさそうだが、正しい組みあわせは

$$+ \frac{\sigma}{2}\int\left(A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx}\right) dt\,dx\,dy$$

である。

まず $\int\left(A_x F_{yt} + A_y F_{tx}\right) dt\,dx\,dy$ という項を考える。

いま基準の切断を取りかえると

$$\begin{cases} A_x^{new} = A_x^{old} - \dfrac{\partial}{\partial x}\chi \\ A_y^{new} = A_y^{old} - \dfrac{\partial}{\partial y}\chi \end{cases}$$ だった。

$F_{\square\square}$ は変化しない。すると

$$\int\left[\left(A_x F_{yt} + A_y F_{tx}\right)^{old} - \left(A_x F_{yt} + A_y F_{tx}\right)^{new}\right] dt\,dx\,dy$$

$$= \int\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\chi\right) F_{yt} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\chi\right) F_{tx}\right] dt\,dx\,dy \quad \cdots ☆$$

となって $S[A]$ が χ に依存してしまう。

いま $\int A_t F_{xy}\, dt\,dx\,dy$ という項もあるとする.

$$\int \left[(A_t F_{xy})^{old} - (A_t F_{xy})^{new} \right] dt\,dx\,dy$$

$$= \int \frac{\partial \chi}{\partial t} F_{xy}\, dt\,dx\,dy.$$

$$\int \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \chi \right) F_{yt} \right] dx = \Big[\chi F_{yt} \Big]_{x=0}^{x=L_x} - \int \chi \frac{\partial F_{yt}}{\partial x}\, dx$$

$\uparrow$

周期的境界条件 だし まきつき数ゼロなら ゼロ.

を使って

$$\int \left[(A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx})^{old} - (A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx})^{new} \right] dx\,dy\,dt$$

$$= -\int \chi \left[\frac{\partial F_{xy}}{\partial t} + \frac{\partial F_{yt}}{\partial x} + \frac{\partial F_{tx}}{\partial y} \right] dx\,dy\,dt.$$

Maxwell 方程式 $\frac{\partial}{\partial t} B_z + \frac{\partial}{\partial x} E_y - \frac{\partial}{\partial y} E_x = 0$

よりゼロ.

従って $\int (A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx})\, dt\,dx\,dy$

は 基準切断 の χ だけの取りかえに依存しない.

(χ のまきつき数がゼロなら)

これを Chern-Simons 項という.

いま

$$\delta \int \left(A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx} \right) dt dx dy \qquad \cdots (\#)$$

$$\begin{aligned}
= \int \Big[& \delta A_t \, F_{xy} + \delta A_x F_{yt} + \delta A_y \, F_{tx} \\
& + \underline{A_t \, \delta \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y \right.} - \left. \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \\
& + \underline{A_x} \, \delta \left(\frac{\partial}{\partial y} A_t - \underline{\frac{\partial}{\partial t} A_y} \right) \\
& + A_z \, \delta \left(\frac{\partial}{\partial t} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_t \right) \Big] dt dx dy
\end{aligned}$$

ただし

$$\underline{\qquad} = \int A_t \frac{\partial}{\partial x} \delta A_y \; dt dx dy$$

$$= \int \left[A_t \, \delta A_y \right]_{x=0}^{x=L_x} dx dy - \int \left(\frac{\partial}{\partial x} A_t \right) \delta A_y \, dt dx dy$$

周期的境界条件ではゼロ.

$$\underline{\qquad} = \qquad = + \int \frac{\partial}{\partial t} A_x \, \delta A_y \, dt dx dy.$$

より

$$\underline{\qquad} + \underline{\qquad} = \int \delta A_y \, F_{tx} \; dt dx dy.$$

よって

$$(\#) = 2 \int \left(\delta A_t \; F_{xy} + \delta A_x F_{yt} + \delta A_y \; F_{tx} \right) dt dx dy.$$

すると

$$S[A] = \frac{\sigma}{2} \int \left(A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx} \right) dt dx dy$$

に対し

$$\delta S[A] = \sigma \int \left(\delta A_t \; \underbrace{F_{xy}}_{\rho} + \delta A_x \underbrace{F_{yt}}_{j_x} + \delta A_y \; \underbrace{F_{tx}}_{j_y} \right) dt dx dy.$$

は
$$\begin{cases} j_x = \sigma F_{yt} = \sigma E_y \\ j_y = \sigma F_{tx} = -\sigma E_x \end{cases}$$

となり ホール効果を再現. しかしおまけに

$$\rho = \sigma F_{xy} = \sigma B_z$$

をついてくることがわかった.

3.
$$q^{SI} = \int \rho^{SI} dxdy = \sigma^{SI} \int F_{xy}^{SI} dxdy$$
$$= \sigma^{SI} \cdot \frac{h}{e} \cdot 整数.$$

e の整数倍 でないといけない.

⇒ σ^{SI} は $\frac{e^2}{h}$ の整数倍!

$$q^{JJ} = \sigma^{JJ} \int F_{xy}^{JJ} dxdy = \sigma^{JJ} \cdot 2\pi \cdot 整数.$$

$\hbar$ の整数倍.

⇒ σ^{JJ} は $\frac{\hbar}{2\pi} n$.

有効作用は
$$e^{iS/\hbar} = e^{2\pi i \cdot n \cdot \boxed{\frac{1}{2}} \underline{\frac{1}{(2\pi)^2} \int (A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx}) dt dx dy}}$$

Chern-Simons 項.

Chern-Simons項は数学でもでてくるが
通常 $\boxed{\frac{1}{2}}$ のない $\frac{1}{(2\pi)^2}\int (A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{xy}) dt dx dy$

の形で出てくる。

微分形式 $A = A_t dt + A_x dx + A_y dy$

$F = dA = F_{xy} dx dy + F_{yt} dy dt + F_{tx} dt dx$

を用いると $\frac{1}{(2\pi)^2}\int AF = \int \frac{A}{2\pi}\frac{F}{2\pi}$ で

$$d\left(\frac{A}{2\pi}\frac{F}{2\pi}\right) = \frac{F}{2\pi}\cdot\frac{F}{2\pi} = (\text{第1チャーン類})^2$$

という性質をみたす。これを用いると

$$e^{2\pi i \cdot \frac{1}{(2\pi)^2}\int A\cdot F}$$

は勝手な三次元空間で定義できる。

$$e^{2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2}\int A\cdot F}$$

は勝手な三次元空間では定義できない。

数学でいうところのスピン構造が必要。

360°まわったのか
720°まわったのかを
三次元多様体をはりあわせて
つくる際にきちんと指定したもの。

～) 整数量子ホール効果で

$\sigma = \frac{e^2}{h}\cdot$奇数 が許される背景には 360° vs 720° 問題が隠れている。