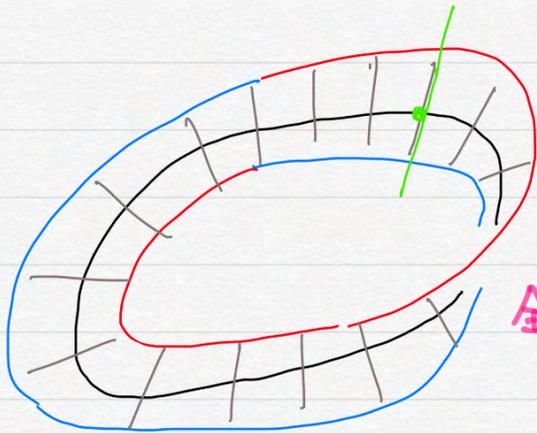


数学から始める:

メビウスの帯: 1回ひねって作る。



全空間

② 線分 $[-1, +1]$
が生えている。ファイバー

“線分バンドル”

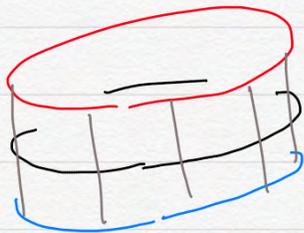


① 円周の各点の上に
ベース

ファイバーバンドル

ファイバー \rightarrow 全空間 \rightarrow ベース

もっと単純なもの: 0回ひねり。

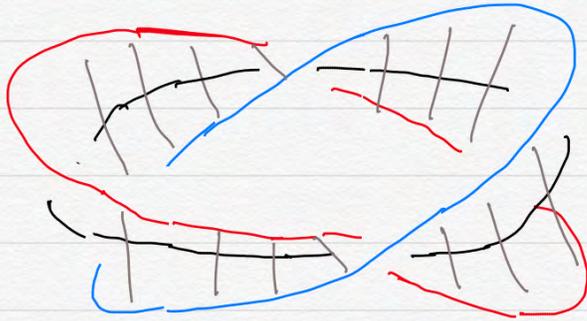


② 線分 $[-1, 1]$ が
生えている。

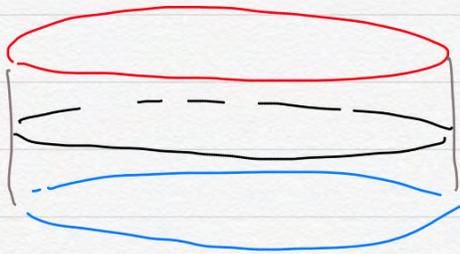


① 円周の各点の上に

2回ひねるとどうなるか？



3次元空間の埋め込み曲線は連続的に変形できるか。



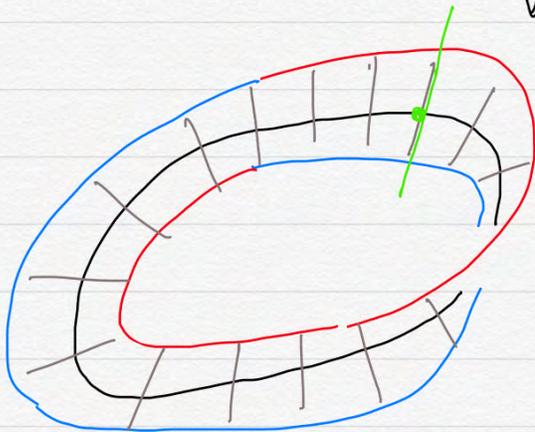
2次元曲線

$1:1$ の map がある。



2次元曲線も

$1:1$ の map が 無い。



ひねりの回数
mod 2
のみが重要。

円周上の 部分 $[-1, 1]$ バンドル

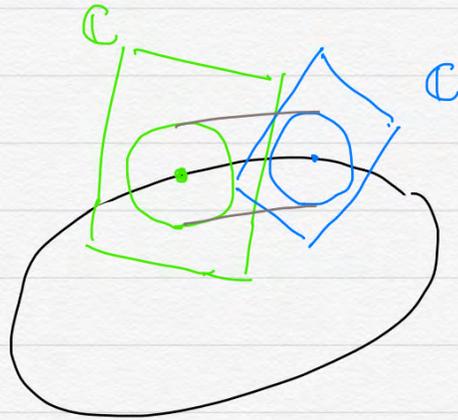
を考えた.

\mathbb{R} バンドル

円周上の \mathbb{R} バンドル

\mathbb{C} バンドル

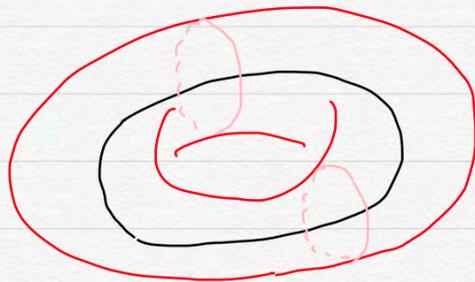
を考えた.



局所的には
回転で
つながり、同じ
仮定する.

勝手なようなバンドルは 単に トーラス (ドーナツの表面)

である:



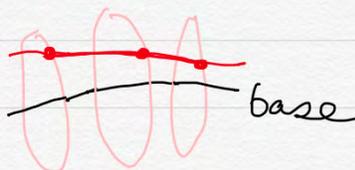
円周バンドルの 接続 である :
connection

ベースの各点の上の
円周に対し,

ベースの少し隣の点の上の
円周に

どうつながり、同じか

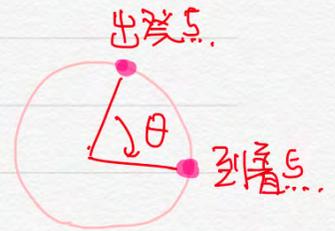
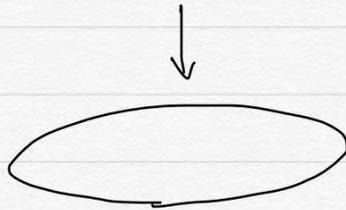
を考えた.



円周上の円周バンドル, 接続つき
 のホムトポロジー分類されるか?



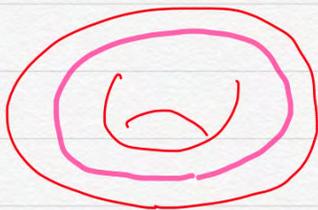
接続をついて
 一周まわるとして
 一般には戻して
 くる。



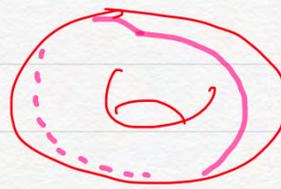
$\theta \in [0, 2\pi)$ を接続の相対値と見る。

θ と $\theta + 2\pi$ は区別しないことにする。

例として:



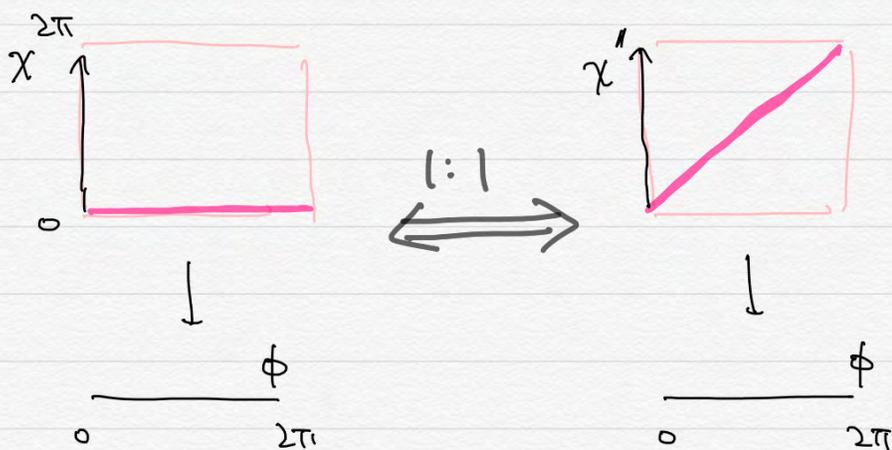
$\theta = 0$



$\theta = 2\pi$

は三次元空間上の埋め込みとしては互いに連続変形できる。

しかし抽象的に二次元では:



$$X + \phi = X'$$

\mathbb{A}^1 上の \mathbb{A}^1 バンドル 接続つき

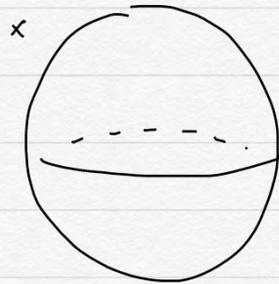
は λ のために $\theta \in [0, 2\pi)$ で特徴づけられる.

次に 球面上の \mathbb{A}^1 バンドルを考察しよう.



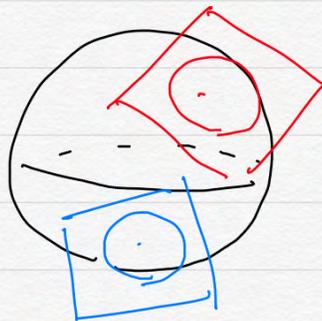
思いつくのはむしろこれか...

例0



各点 に 単に 円周が
生じるところに1つ.

例2



各点 の 接平面の
単位円を2つ作る.

例1

Hopf fibration

$$\text{一般に } S^n = \{ |x_1|^2 + \dots + |x_{n+1}|^2 = 1 \} \quad \varepsilon$$

n 次元球面 S^n である.

$$S^3 = \{ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = |z|^2 = 1 \}$$

z, w である.

$$z = a + bi$$

$$w = c + di$$

2-2-2

$$S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varepsilon$$

$$(z, w) \mapsto (|z|^2 - |w|^2, 2\operatorname{Re} z\bar{w}, 2\operatorname{Im} z\bar{w})$$

τ である.

$$(|z|^2 - |w|^2)^2 + (2\operatorname{Re} z\bar{w})^2 + (2\operatorname{Im} z\bar{w})^2 = 1 \quad \forall z, w$$

$$f: S^3 \rightarrow S^2$$

特 $(z', w') := (e^{it} z, e^{it} w)$

は (z, w) と同じ点になる。

$\leadsto S^2$ の 1 点になる $z \subset S^3$ の S^3 中の円。

また S^3 は S^2 の点 S^1 への束。

(S^2 上の点 v になる $z \subset S^3$ ではないか...)

($z \subset S^3$ Mathematica に f の図示。)

問 例 0, 例 2, 例 1 は本質的に異なるか?

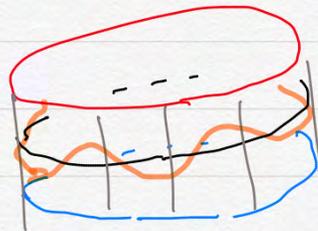
答 一緒。

どうですか?

Möbius の帯 vs 別の帯 の違い



切断 \downarrow 射影



切断 \downarrow 射影



切断の黒線との交点:

奇数個

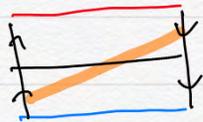
偶数個

交点の数が偶数個か奇数個かの連続変形でかかるといふ:



∴ 交点の数は1つずつ増えたり減ったりする。

×の回数



1回

○の回数



0回

円周バンデルシウの場合:



各点に円周を添えて

平面が生じていると
思うことができる。

(円周のそれぞれを平面に
単位円として埋め込める
こと。)

バンデルシウ

切断を繰り返す。原点を何回まわりますか?

例2 の場合:

切断

各点で

接点を

とらえる。

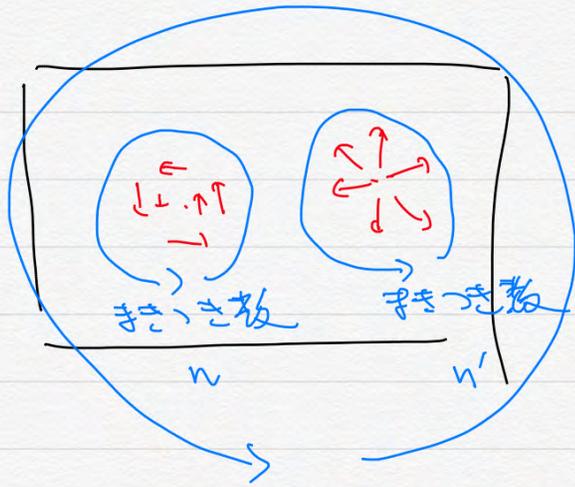


各点で

接点を

とらえる。

とらえる。



まきつき数 $n+n'$

連続変形での まきつき数 はかわらぬ!

(2.2.2. Mathematica 2. 図7.)



これ、対応する平面バンドルの

切断 σ_i である。

$$\sum_{\text{各点 } \sigma_i} (\text{その点でのまきつき数})$$

を考へると、この切断の2次元積分が与えられる。

(第1) チャーニ数 c_1 。

例0

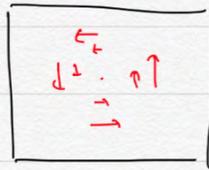
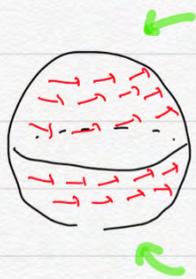


自明バンドル

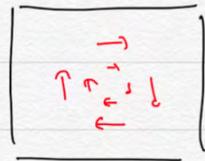
$$c_1 = 0$$

例2

向き付き数



+1



+1

(+)

4π-数 = +2.

例1

Hopf fibration

$$S^3 = \{ |z|^2 + |w|^2 = 1 \} \rightarrow S^2$$

$$\underbrace{(z, w)} \mapsto (|z|^2 - |w|^2, 2\operatorname{Re} z\bar{w}, 2\operatorname{Im} z\bar{w})$$

同一点にうつる円周:

$$(z, w) \sim e^{it}(z, w)$$

Mathematica に与えられた $z = a+bi, w = c+di$ かつ $(a, b, c, d) \in (1, 0, 0, 0)$ ならば \mathbb{R}^3 に投影.

$d=0, c>0$ ならば半平面 $\tau = \theta/\mu$

$$(c \cos \theta, \sin \theta, 0, 0) \xrightarrow{\text{投影}} \left(\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}, 0, 0 \right)$$

↓ Hopf map

$$(1, 0, 0)$$

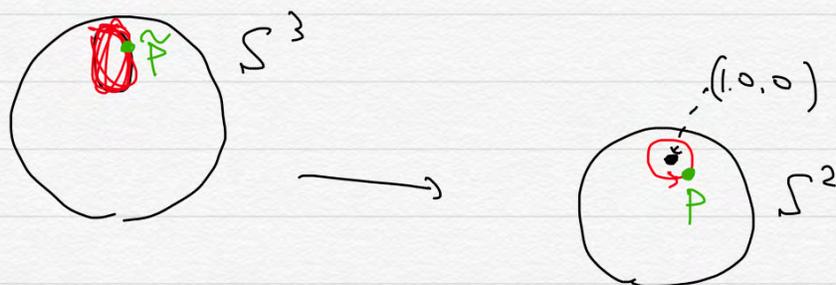
の円周 $\underbrace{S^1}$ かつ τ

切断が取れる.

$\chi_{\text{diff}} < 2 \cdot 12$ $0 < \epsilon \ll 1$ etc

$$\left(\sqrt{1-\epsilon^2} \cos\theta, \sqrt{1-\epsilon^2} \sin\theta, \epsilon, 0 \right) \leftarrow \tilde{p}$$

$$\left(1-2\epsilon^2, 2\sqrt{1-\epsilon^2} \cos\theta, 2\sqrt{1-\epsilon^2} \sin\theta \right) \leftarrow p$$



p が 1 周する \tilde{p} も 1 周する.

\leadsto 巻き数は 1.

\leadsto Hopf fibration の
4-1 巻き数は 1.

駒場現代物理学(2023)第3,4回講義ノート

1 複素線形代数と量子力学

1.1 基本法則

I 系の状態は状態空間 \mathcal{H} のノンゼロのベクトル $|\psi\rangle$ であらわされる。状態空間はエルミート内積付き複素線形空間である。

II 観測以外の操作(時間発展、回転等)はユニタリ演算子 U であらわされる。

III 観測量は \mathcal{H} のエルミート演算子 A であらわされる。

IV 観測量 A の固有ベクトルを $|i\rangle$, $A|i\rangle = a_i|i\rangle$ とすると、状態 $|\psi\rangle$ において A を観測した際の結果は a_i のうちどれかであり、 a_i が得られる確率は $|c_i|^2$ に比例する、ただし c_i は $|\psi\rangle = \sum_i c_i|i\rangle$ と展開したときの係数。

V 全系が部分系 A と部分系 B からなり、部分系がそれぞれ状態空間 $\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B$ を持つとき、全系の状態空間はテンソル積 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ である。

ニュートンの運動の三法則のように法則の名前、順番等が決まっていればよいのだが、決まっていないようである。ここでは僕の趣味で I から V にした¹。

1.2 法則 I について: 複素線形代数の基本

状態空間 \mathcal{H} は複素線形空間である。すなわち

$$|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H} \quad (1.2.1)$$

に対し

$$|\psi\rangle + |\phi\rangle \in \mathcal{H} \quad (1.2.2)$$

がさだまり、

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad (1.2.3)$$

と複素数 $a \in \mathbb{C}$ に対して

$$a|\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad (1.2.4)$$

が定まっている²。

さらに状態空間にはエルミート内積が定まっている:

$$|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H} \quad (1.2.5)$$

に対し

$$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) \in \mathbb{C} \quad (1.2.6)$$

が定まっています、二つ目の引数に対して複素線形

$$(|\psi\rangle, a|\phi\rangle) = a(|\psi\rangle, |\phi\rangle), \quad (|\psi\rangle, |\phi\rangle + |\phi'\rangle) = (|\psi\rangle, |\phi\rangle) + (|\psi\rangle, |\phi'\rangle) \quad (1.2.7)$$

¹この枠組みが論理的必然かどうかについてはいろいろ研究がある。Kapustin さんの講演 http://www.theory.caltech.edu/~kapustin/QM_colloq.pdf 等参照。

²量子力学では慣習的に状態ベクトルを $|\psi\rangle$ などと書く。これを ket とよぶ。

さらに

$$\overline{(|\psi\rangle, |\phi\rangle)} = (|\phi\rangle, |\psi\rangle). \quad (1.2.8)$$

すると $(a|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \bar{a}(|\psi\rangle, |\phi\rangle)$ も従う。

すると $(|\psi\rangle, |\psi\rangle)$ は実であるが、さらに

$$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) \geq 0 \quad (1.2.9)$$

がいつもなりたち、これを $|\psi\rangle$ の長さの二乗と呼ぶことにする。さらに

$$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = 0 \quad (1.2.10)$$

が成り立つとする。³

しばらくは簡単のため有限次元の \mathcal{H} を考えよう。 n 次元とすると

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H} \longleftrightarrow (\psi_1, \dots, \psi_n)^T \quad (1.2.11)$$

という縦ベクトルだと思える。こういうものを $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$ と書く。内積は

$$(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = \bar{\psi}_1\phi_1 + \bar{\psi}_2\phi_2 + \bar{\psi}_3\phi_3 + \dots + \bar{\psi}_n\phi_n. \quad (1.2.12)$$

これらが上記関係式をみたすのは確認できる。

1.3 線形変換、演算子、作用素

変換 $|\psi\rangle \mapsto A|\psi\rangle$ が線形であるとは

$$A(|\psi\rangle + |\psi'\rangle) = A|\psi\rangle + A|\psi'\rangle, \quad A(a|\psi\rangle) = aA(|\psi\rangle) \quad (1.3.1)$$

を満たすこと。

複素線形変換は行列の掛け算である: $|\psi\rangle \mapsto |\phi\rangle = A|\psi\rangle$ は

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n (A_{ij})\psi_j \quad (1.3.2)$$

ということ。

線形変換 A に対してそのエルミート共役 A^\dagger は

$$(A|\psi\rangle, |\phi\rangle) = (|\psi\rangle, A^\dagger|\phi\rangle) \quad (1.3.3)$$

で定める。成分でかけば

$$(A^\dagger)_{ij} = \overline{A_{ji}}. \quad (1.3.4)$$

これより

$$\overline{(|\psi\rangle, A|\phi\rangle)} = (|\phi\rangle, A^\dagger|\psi\rangle) \quad (1.3.5)$$

となる。勝手な ψ に対して

$$\overline{(|\psi\rangle, A|\psi\rangle)} = (|\psi\rangle, B|\psi\rangle) \quad (1.3.6)$$

を満たすような B は A^\dagger に限るので、これで定義してもよい。

線形変換のことを operator という。日本語訳は理論物理では演算子、数学では作用素ということが多い。

³量子力学では $(|\psi\rangle, |\phi\rangle)$ のことをしばしば $\langle\psi|\phi\rangle$ と書き、 $\langle\psi|$ の部分を bra という。 $\langle\psi|\phi\rangle$ とあわせて bra(c)ket となるという Dirac による駄洒落らしい。複素線形代数に慣れてしまえばこの記法は便利だが、複素線形代数も知らない時点だとかえってややこしいと思うので、今回の講義では bra は使わないことにする。また物理では複素共役は \bar{z} のかわりに z^* と書くことがしばしばあるが今回の講義では \bar{z} を使うことにする。

1.4 法則 II について: ユニタリ変換

\mathcal{H} の複素線形変換 $|\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle$ で長さを保つ、すなわち

$$(U|\psi\rangle, U|\psi\rangle) = (\psi, \psi) \quad (1.4.1)$$

をみたすものをユニタリ変換という。

量子力学において観測以外の操作(t だけ時間をすすめる、空間を z 軸回り θ だけ回転させる、時間反転させる、など)はユニタリである。

1.5 法則 III について: エルミート行列

量子力学において観測量 (observable) とは状態空間 \mathcal{H} のエルミート演算子 A のこと。観測量というのは、エネルギーだとか角運動量などのこと。無限次元だとエルミートという概念は自己共役、対称、エルミートという三つの微妙に異なる概念にわかれる。有限次元だとそういう問題はない。 A がエルミートとは $A = A^\dagger$ であること。

1.6 法則 IV について: エルミート行列の固有値分解

エルミート演算子 A であらわされる観測量を、状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ で観測したときにどうなるかというルール。

$A|i\rangle = a_i|i\rangle$ となり $|i\rangle \neq 0$ であるようなとき、 a_i を固有値、 $|i\rangle$ を固有ベクトルもしくは固有状態という。

事実/定理 1.6.1 $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^n$ に作用するエルミート行列 A は n 個の固有ベクトル $|1\rangle, \dots, |n\rangle$ で互いに直交し長さが 1 のものが取れる。その固有値はすべて実数である。

証明も勉強になるが、線型代数の講義ではないので信じることにする。

さて、観測量 A を状態 $|\psi\rangle$ で測ったときどうなるか。 A の固有状態、固有値を $|i\rangle, a_i$ と書く。 $|i\rangle$ は長さ 1 で互いに直交するように取っておく。すると $|\psi\rangle$ は

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |i\rangle \quad (1.6.1)$$

と展開できる。 c_i を求めるには

$$(|i\rangle, \psi) = (|i\rangle, \sum_j c_j |j\rangle) = \sum_j c_j (|i\rangle, |j\rangle) = c_i \quad (1.6.2)$$

を使えば良い。また同様に展開すれば

$$(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = \sum |c_i|^2 \quad (1.6.3)$$

である。簡単のため a_i は全て異なるとする。

- 観測で得られる値は a_i のうちのどれかである。
- a_i が得られる確率は $|c_i|^2$ に比例する。

特に、固有状態 $|i\rangle$ で A を観測すると 100% の確率で a_i が測定される。もっと一般には、 a_i が得られる確率は

$$\frac{|c_i|^2}{\sum_j |c_j|^2} = \frac{|(|i\rangle, |\psi\rangle)|^2}{(|\psi\rangle, |\psi\rangle)|^2} \quad (1.6.4)$$

で与えられる。

勝手なノンゼロの複素数 z に対して、 $|\psi\rangle$ と $z|\psi\rangle$ は上式の分子分母に同じ係数 $|z|^2$ が掛かるだけで同じ観測確率をあたえる。これは勝手な観測量 A について正しい。そこで、互いに複素数倍の状態ベクトルは「物理的に同じ」であるとよくいわれる。(しかし、勿論 $|\phi\rangle + |\psi\rangle$ と $|\phi\rangle + z|\psi\rangle$ は異なることに注意。)

また、上式の分母は面倒くさいので、しばしば状態 $|\psi\rangle$ の長さは 1 であるように取っておく。それでも絶対値 1 の複素数 c に対し $|\psi\rangle$ と $c|\psi\rangle$ は両方とも長さ 1 でしかも物理的に同等である。

また、上のルールから観測量 A の長さ 1 の状態 $|\psi\rangle$ における期待値は

$$\sum_i a_i |c_i|^2 = \sum_i a_i (|i\rangle, |\psi\rangle)|^2 \quad (1.6.5)$$

であるが、これは $(|\psi\rangle, A|\psi\rangle)$ と等しい、なぜなら

$$(|\psi\rangle, A|\psi\rangle) = \left(\sum_i c_i |i\rangle, A \sum_j c_j |j\rangle \right) = \sum_{i,j} \bar{c}_i a_j c_j (|i\rangle, |j\rangle) = \sum_i a_i |c_i|^2. \quad (1.6.6)$$

だから上記の補題で最小化していたものは観測量 A の期待値だった。期待値の最小値は最小の固有値であるということ。

エルミート行列の固有ベクトルの性質というのと量子力学の確率解釈が密接に関係しているというのに注意。

1.7 法則 V

この法則は複合系をつくる際の法則。次回以降に扱う。

2 一番簡単な量子力学系

一番簡単な状態空間は $\mathcal{H} = \mathbb{C}^1$ である。しかし二つの状態ベクトル $|\psi\rangle, |\psi'\rangle$ が互いに複素数倍

$$|\psi'\rangle = z|\psi\rangle \quad (2.0.1)$$

のときは物理的に同等であった。勝手な \mathbb{C}^1 のベクトルは (1) の複素数倍なので、ほんとうに一コしか状態がない。勝手な 1×1 のユニタリ変換は複素数倍なので実質なものもない。勝手な 1×1 のエルミート行列は単に実数 a で、ベクトル (1) はその固有値で、測定するとかならず a が得られる。だから面白いことはなにも起きない。

3 二番めに簡単な量子力学系

次に二番めに簡単な状態空間として $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2$ という二次元の複素ベクトル空間の場合を考える。量子力学の講義で歴史的に進む場合は一粒子の運動を扱うことが多いが、その場合は状態空間は無限次元になって、出てくる演算子は微分演算子等になって難しい。でも二

次元の複素ベクトル空間だと行列ですむので比較的簡単。量子力学の本当に面白い所は無
 限次元の状態空間が出てくるからだという人も(お年の人には)多いけれども、二次元(や
 有限次元)の複素ベクトル空間でも十分面白いことが沢山おこる。歴史的には量子力学は
 古典力学を量子化して得られ、その場合は無限次元の状態空間が出がちであったので、こ
 ういう有限次元の状態空間は驚きであった。はじめてこれが出て来たのは電子のスピン自
 由度に関してだが、それ以外にもいろんな系で出てくる。現在では量子情報で qubit と呼
 ばれてとても重要。

3.1 観測量

どのような観測量があるか考える。観測量は 2×2 のエルミート行列 A_{ij} である。条件は
 $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ だから、行列としてあからさまに書くと

$$A = \begin{pmatrix} a & z \\ \bar{z} & b \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

ただし a, b は実数、 z は複素数、という形である。これの固有ベクトルは何か、固有値は
 なにかを計算すると、 A を観測したときにどの値がどの確率で得られるかがわかる。 A
 はまた p, a, b, c を実数として

$$A = pid + a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z \quad (3.1.2)$$

とも展開できる、ただし

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

は単位行列で、

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.1.4)$$

ととる。 $\sigma_{X,Y,Z}$ はパウリ行列と呼ばれる⁴。

σ_Z の固有ベクトルは明らかに

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

で、それぞれ固有値は $+1, -1$ である。

σ_X の固有値も ± 1 で、固有ベクトルはそれぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.1.6)$$

である。

⁴ 2×2 のエルミート行列で単位行列でないものを書き下しただけで物理の歴史に名前が残るのだから昔は
 物理は簡単だった。また、通常は $\sigma_y := -\sigma_Y$ を使うが、以下にあらわれる計算で負号がなるべくあらわれな
 いように通常と異なる定義をつかった。

練習問題 3.1.1 σ_Y の固有値と固有ベクトルをもとめよ。

この二状態系を電子のスピン角運動量を記述していると思う場合は、角運動量演算子の X, Y, Z 成分はそれぞれ

$$\frac{\hbar}{2}\sigma_X, \frac{\hbar}{2}\sigma_Y, \frac{\hbar}{2}\sigma_Z, \quad (3.1.7)$$

であることが知られている。 $\hbar = h/(2\pi)$ は reduced Planck 定数という、角運動量の次元をもった定数:

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}. \quad (3.1.8)$$

さて状態

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \quad (3.1.9)$$

ただし $|z|^2 + |w|^2 = 1$ で σ_Z を測定すると、確率 $|z|^2$ で $+1$ が得られ、確率 $|w|^2$ で -1 が得られ、期待値は $(|\psi\rangle, \sigma_Z |\psi\rangle) = |z|^2 - |w|^2$ である。

練習問題 3.1.2 σ_Y や σ_X を測定したばあいにはどの値が得られる確率がいくつ、期待値はいくつ、計算せよ。

同様にして

$$((|\psi\rangle, \sigma_X |\psi\rangle), (|\psi\rangle, \sigma_Y |\psi\rangle), (|\psi\rangle, \sigma_Z |\psi\rangle)) = (2 \operatorname{Re} z\bar{w}, 2 \operatorname{Im} z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2) \quad (3.1.10)$$

である。これは実質前回の講義でやった Hopf ファイブレーションで、単位球面上にあるのだった。

3.2 「物理的に同等」な状態の分類; Bloch 球; Hopf fibration

反省しよう。 $\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{H}$ において物理的に同等な波動関数をどう分類するかを考えた。一般に $|\psi\rangle, |\psi'\rangle \in \mathcal{H}$ が非ゼロの複素数 c に対して

$$|\psi'\rangle = c|\psi\rangle \quad (3.2.1)$$

ならば物理的に同等というのだった。確率解釈のためには長さ 1, $(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = 1$ にしておくのは自然である。それでも (3.2.1) で $|c| = 1$ な場合は長さ 1 なままベクトルを変化させる。この場合「物理的に同等」である。操作 (3.2.1) をしても (3.1.10) での行き先はかわらない。すなわち、

事実/定理 3.2.1 Qubit の状態空間 \mathcal{H} で長さ 1 に正規化した状態 $|\psi\rangle$ たちは三次元球面 S^3 をなす。それらの間で絶対値 1 の複素数 c で関連付く物理的に同等な状態たちを (3.2.1) で同一視したものは、角運動量演算子の期待値 (3.1.10) のなす二次元球面 S^2 になる。

ということである。この S^2 は物理では Bloch 球とよばれる。

S^2 の一点 p を固定して、そこにうつる S^3 の点全体をかんがえると、それは $|\psi\rangle \in S^3$ をひとつ固定すれば $|c| = 1$ として $c|\psi\rangle$ たちのなす S^1 である。この状況を、 S^3 は S^2 の各点に S^1 がファイバーしている、といい、

$$S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2 \quad (3.2.2)$$

と書くのだった。

4 回転の二状態系への作用について

4.1 Z 軸周りの回転

Z 軸まわりの θ だけの回転は二状態系にどう作用させればよいだろうか。状態 $|\psi\rangle = (z, w)^T$ に対して X, Y, Z 方向の角運動量の期待値は (3.1.10) で与えられたので、これを適切に回転させたい。天下りではあるが

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto R_Z(\theta) \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2}z \\ e^{-i\theta/2}w \end{pmatrix} \quad (4.1.1)$$

を考えると

$$(2 \operatorname{Re} z\bar{w}, 2 \operatorname{Im} z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2) \mapsto (2 \operatorname{Re} e^{i\theta}z\bar{w}, 2 \operatorname{Im} e^{i\theta}z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2) \quad (4.1.2)$$

となるので、XY 平面内で θ 回転させたことになる。

ここで不思議なことがおこる: $\theta = 2\pi$ だけ回転させると、勿論 (3.1.10) はもとにもどる。しかし、 $|\psi\rangle$ 自体は

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto - \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \quad (4.1.3)$$

となって元に戻らない。(一粒子系だと $|\psi\rangle \sim -|\psi\rangle$ は「物理的に同じ」だから戻っていると言えなくもないが、二粒子系で片方の粒子だけ 2π まわすとこの -1 倍は観測にかかりうる。) 4π 回転させてはじめてもとにもどる。

4.2 一般のばあい

これまで Z 軸まわりの回転を考えたが、一般には三次元の極座標で単位球の (ϕ, ψ) の方向を軸として θ だけ回す作用がある。これは二状態系にはどう作用するだろうか?

天下りであるが、 \mathbb{C}^2 に作用するユニタリ行列

$$U = \begin{pmatrix} u & u' \\ v & v' \end{pmatrix}, \quad UU^\dagger = \operatorname{id} \quad (4.2.1)$$

を考える。条件 (4.2.1) は

$$|u|^2 + |v|^2 = |u'|^2 + |v'|^2 = 1, \quad u\bar{u}' + v\bar{v}' = 0 \quad (4.2.2)$$

だから u, v, u', v' に 8 パラメタあるところに 4 条件を課し、残り 4 パラメタある。この時点で $(\det U)\overline{\det U} = \det U \det U' = \det UU' = 1$ であるので $\det U = e^{it}$ である。さらに

$$\det U = uv' - u'v = 1 \quad (4.2.3)$$

を要求すると残り 3 パラメタある。 $|u|^2 + |v|^2 = 1$ の解は実 3 パラメタだから u', v' はほとんど決まっているはずで、実際

$$U = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix} \quad (4.2.4)$$

と取れる。

さて、この U によって状態 $|\psi\rangle = (z, w)^T$ を

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \quad (4.2.5)$$

にうつすことを考える。これによって $\sigma_{X,Y,Z}$ の期待値はどうかわるか? そこで一般に行列

$$W := a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z = \begin{pmatrix} c & a+ib \\ a-ib & -c \end{pmatrix} \quad (4.2.6)$$

を考える。これは 2×2 エルミート行列でトレースがゼロなもの的一般形である。すると

$$(|\psi'\rangle, W|\psi'\rangle) = (U|\psi\rangle, WU|\psi\rangle) = (|\psi\rangle, (U^\dagger W U)|\psi\rangle) \quad (4.2.7)$$

であるので

$$|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle := U|\psi\rangle \quad (4.2.8)$$

は

$$W \mapsto W' := U^\dagger W U \quad (4.2.9)$$

を引き起こす。 W' もエルミートでトレースがゼロであるから、

$$W' = a'\sigma_X + b'\sigma_Y + c'\sigma_Z \quad (4.2.10)$$

と展開でき、

$$(a, b, c)^T \mapsto (a', b', c')^T \quad (4.2.11)$$

は線形変換である。

練習問題 4.2.1 この線形変換を 3×3 行列としてあからさまに u, v を用いて書け。

また、

$$\det W = -a^2 - b^2 - c^2 \quad (4.2.12)$$

は長さの二乗にマイナスをつけたものであることに注意すると

$$\det W' = \det U^\dagger W U = \det U^\dagger \det W \det U = \det W \quad (4.2.13)$$

なので

$$-a^2 - b^2 - c^2 = -(a')^2 - (b')^2 - (c')^2 \quad (4.2.14)$$

となって、三次元ベクトルの長さをたもつ。

これにより、(4.2.4) による (4.2.5) が三次元の回転を引き起こすことがわかった。(4.2.4) には実三パラメタ含まれており、三次元の回転も軸を指定するのに二パラメタ、回転角を指定するのに一パラメタ必要だから、「ほぼ」 1:1 の対応であろうと期待できる。

しかし、 U がひきおこす変換と $-U$ が引き起こす変換はおなじである:

$$(-U)^\dagger W (-U) = U^\dagger W U. \quad (4.2.15)$$

これより

$$\text{三次元の回転操作全体} \simeq \frac{\text{(4.2.4) の形のユニタリ行列}}{U \sim -U} \simeq \frac{S^3}{\text{対蹠点の同一視}} \quad (4.2.16)$$

ということがわかった。ここで (4.2.4) において $|u|^2 + |v|^2 = 1$ は S^3 を定めることを用いた。

いいかえれば

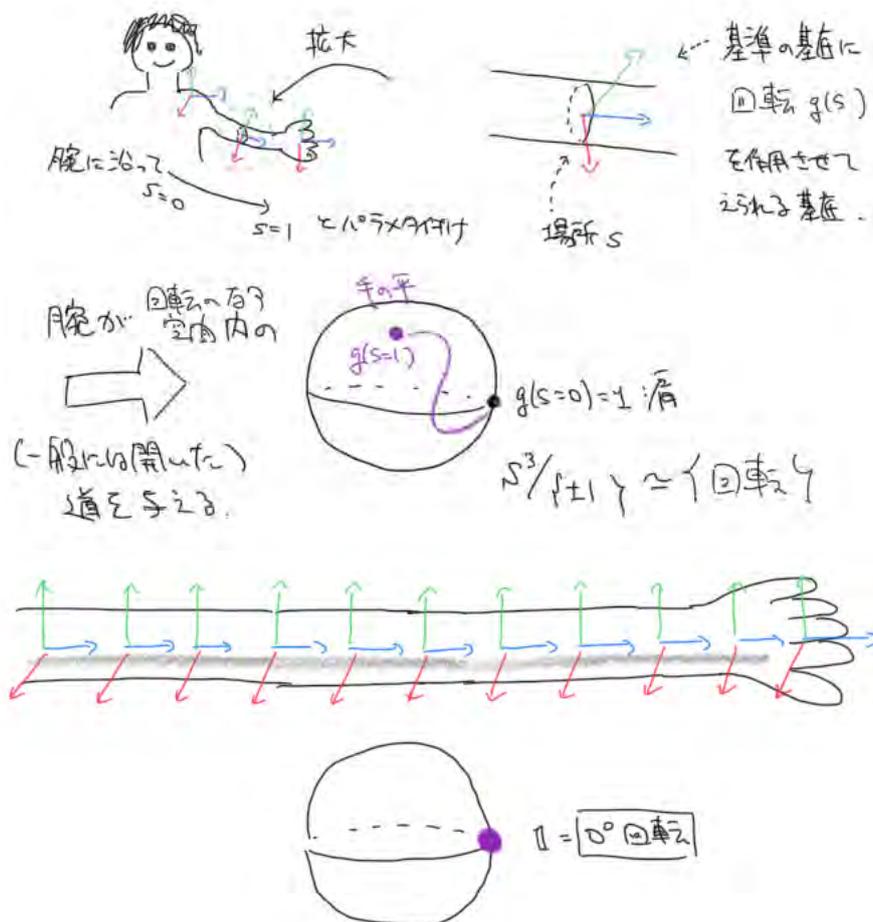
$$S^3 \rightarrow \text{三次元の回転操作全体} \quad (4.2.17)$$

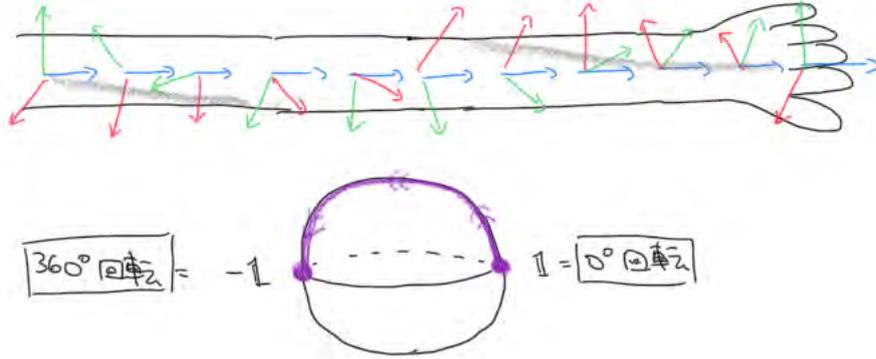
という写像は 2:1 であり、その中で

$$\left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \{Z \text{ 軸まわりの } \theta \text{ 回転} \} \quad (4.2.18)$$

となっているため、三次元での 2π 回転は S^3 の中ではもとの位置には戻らず、 4π 回転を必要とするのである。

これを体で図示すると以下のようになる:





動画は <https://www.youtube.com/watch?v=zAHS0kY7h1o> を見よ。

5 再度法則 II と法則 III について

5.1 一般論

法則 II では、観測以外の時間発展、回転などの操作はユニタリ変換 U であるといい、法則 III では、観測量はエルミート行列 A であると言った。

一般に行列 A に対し、

$$e^A := 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (5.1.1)$$

と定める。 A と B が交換しないと一般に $e^{A+B} \neq e^A e^B$ であるが、 A と B が交換すれば $e^{A+B} = e^A e^B$ は以前と同様に示せる。

A がエルミートのときに i は虚数単位、 s を実のパラメタとして e^{isA} を考える。これはユニタリである。なぜなら

$$(e^{isA}\psi, e^{isA}\psi) = (\psi, e^{-isA}e^{isA}\psi) = (\psi, e^{-isA+isA}\psi) = (\psi, \psi). \quad (5.1.2)$$

また逆に勝手なユニタリ行列 U は何かエルミート行列をもちいて e^{iA} と掛ける。

具体的には、固有ベクトル $|i\rangle$ を互いに直交して長さが 1 になるようにとって、固有値を a_i と書き、さらに一般のベクトル $|\psi\rangle$ を $|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle$ と展開すると、

$$e^{isA} |\psi\rangle = \sum_i e^{isa_i} c_i |i\rangle. \quad (5.1.3)$$

まとめると、ある(観測以外の)操作がユニタリ U であらわされると、対応する観測量 A が $U = e^{iA}$ として存在する。

5.2 具体例

たとえば、角度 θ だけ回転させる、という操作 $R(\theta)$ はユニタリ演算子だが、エルミート演算子 L をもちいて

$$R(t) = e^{i\theta L} \quad (5.2.1)$$

指数関数の肩は無次元、すなわち単位を持たない。角度 θ も無次元。だから L も無次元。二状態系のばあいには Z 軸まわりの回転の場合は

$$R(\theta) = e^{i\theta(\sigma_z)/2} \quad (5.2.2)$$

だったので、 $L = \sigma_z/2$.

練習問題 5.2.1 一般に単位球面上の点 (a, b, c) に対して原点とそれをつなぐ軸のまわりの θ 回転は二状態系に対しては $e^{i\theta(a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z)}$ で与えられる。これを確認せよ。

すでに述べたように、一般に $\theta = 4\pi$ すなわち 720° まわすともとに戻るはずである。よって $e^{4\pi i L} = 1$ 。よって L の固有値は半整数、すなわち整数か整数割る 2 である。

古典極限をとると L は角運動量に対応することが知られている。角運動量 L は単位 $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ を持つ。

$$L = \hbar L \quad (5.2.3)$$

とした換算係数がプランク定数 \hbar で

$$2\pi\hbar = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (5.2.4)$$

となるように kg , m , s が定義されている。よって、量子力学的には角運動量は半整数 $\times \hbar$ である。

また、時間 t だけすすめる、という操作 $U(t)$ もユニタリ演算子で、エルミート演算子 H を用いて

$$U(t) = e^{itH} \quad (5.2.5)$$

とかける。指数関数の肩は無次元で、 t は s の単位をもつので、 H は s^{-1} (周波数) の単位を自然に持つ。

そもそも s の定義は、セシウム 133 原子の H の特定の二つの固有状態 $H|1\rangle = \omega_1|1\rangle$, $H|2\rangle = \omega_2|2\rangle$ に対して

$$\omega_1 - \omega_2 = 2\pi \cdot 9192631770 \text{ s}^{-1} \quad (5.2.6)$$

となるように定められている。 $H = \hbar H$ はエネルギーの次元をもち、古典極限をとると系のエネルギーに対応する。

$$U(t) = e^{itH/\hbar} \quad (5.2.7)$$

ということで、これをシュレーディンガー方程式という。

おまけだが、 m の定義は光速が

$$c = 299792458 \text{m/s} \quad (5.2.8)$$

となるようにされている。

練習問題 5.2.2 kg , s , m の定義の歴史の変遷について調べてみよ。

駒場現代物理学(2023)第6回講義ノート追加分

$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ でのユニタリ変換と三次元空間の回転の関係についてさらに具体的に考えよう。前回のノートの (4.2.4) でユニタリでかつ行列式が 1 なのものは $|u|^2 + |v|^2 = 1$ なる複素数をつかって

$$U = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix} \quad (1)$$

と書けるのをみた。¹

べつのパラメタ付けをかんがえる。そのため $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ として

$$e^{i\varphi(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)} \quad (2)$$

という行列の指数関数を考える。ただし

$$e^M := \mathbf{1}_{2 \times 2} + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots \quad (3)$$

とする。まず

$$(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)^2 \quad (4)$$

$$= a^2(\sigma_X)^2 + b^2(\sigma_Y)^2 + c^2(\sigma_Z)^2$$

$$+ ab(\sigma_X\sigma_Y + \sigma_Y\sigma_X) + bc(\sigma_Y\sigma_Z + \sigma_Z\sigma_Y) + ca(\sigma_Z\sigma_X + \sigma_X\sigma_Z) \quad (5)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)\mathbf{1}_{2 \times 2} = \mathbf{1}_{2 \times 2} \quad (6)$$

だから

$$\begin{aligned} e^{i\varphi(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)} &= \mathbf{1}_{2 \times 2} + i\varphi(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z) \\ &\quad - \frac{1}{2}\varphi^2\mathbf{1}_{2 \times 2} - \frac{1}{6}i\varphi^3(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z) \\ &\quad + \frac{1}{24}\varphi^4\mathbf{1}_{2 \times 2} + \frac{1}{120}i\varphi^5(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

$$= \cos \varphi \mathbf{1}_{2 \times 2} + i \sin \varphi (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z) \quad (8)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi + ic \sin \varphi & (a + bi) \sin \varphi \\ (a - bi) \sin \varphi & \cos \varphi - ic \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (9)$$

これは (1) の形である。

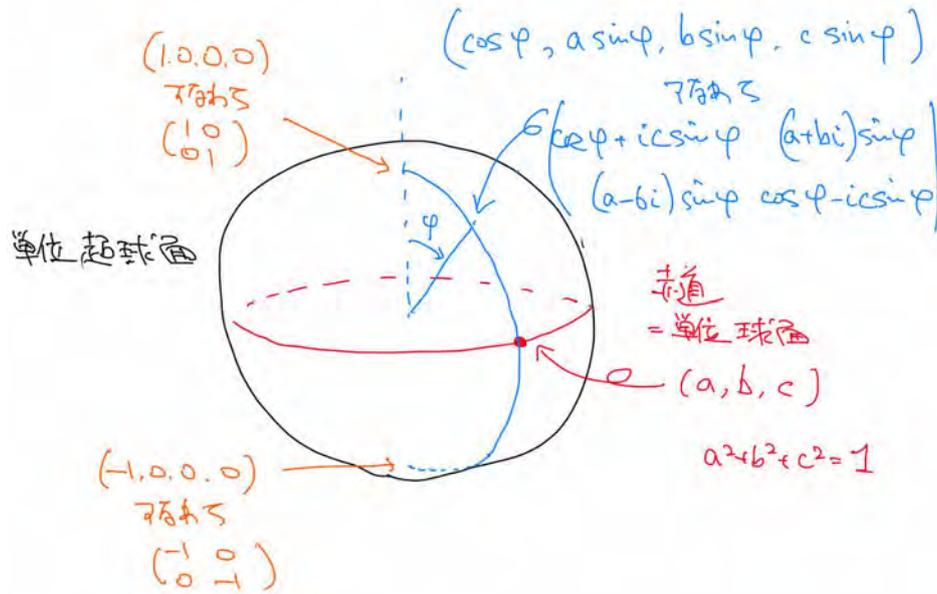
$$(\cos \varphi, a \sin \varphi, b \sin \varphi, c \sin \varphi) \quad (10)$$

は単位超球面上にあって、普通の球面をパラメタ付けする $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ と、その超球面における「緯度」 φ であらわしたものになっている。普通の球面を

$$(\cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi) \quad (11)$$

¹ $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ の状態 $|\psi\rangle$ で $(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = 1$ をみたまも同様に $|u|^2 + |v|^2 = 1$ なる超球面で記述されたが、いまは別のものを考えていることに注意する。異なるものでも同じ数学的構造(ここでは単位超球面)で記述されることがある。

とパラメタ付けするのに比較せよ。ここまでの考察を図に書くと



さてこれはどのような三次元空間の回転に対応するか? (x, y, z) というベクトルに対し、 $W = x\sigma_X + y\sigma_Y + z\sigma_Z$ という行列を考え、

$$W' = U^\dagger W U \tag{12}$$

を

$$W' = x'\sigma_X + y'\sigma_Y + z'\sigma_Z \tag{13}$$

とするのだった。

まず $(x, y, z) = (a, b, c)$ すなわち $W = a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z$ の場合を考えると

$$\begin{aligned} W' &= [\cos \varphi \mathbf{1}_{2 \times 2} - i \sin \varphi (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)] \\ &\quad \times (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z) \\ &\quad \times [\cos \varphi \mathbf{1}_{2 \times 2} + i \sin \varphi (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)] \end{aligned} \tag{14}$$

であるが行列は自分自身と交換するので

$$\begin{aligned} &= (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z) \\ &\quad \times [\cos \varphi \mathbf{1}_{2 \times 2} - i \sin \varphi (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)] \\ &\quad \times [\cos \varphi \mathbf{1}_{2 \times 2} + i \sin \varphi (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)] \end{aligned} \tag{15}$$

$$= (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z). \tag{16}$$

すなわち、 (a, b, c) を変化させなかった。そういう回転操作は (a, b, c) を軸とする回転の
はずである。

回転角を調べるため、 (a, b, c) に直交するベクトルを (x, y, z) とする。すると

$$\begin{aligned} W' &= [\cos \varphi \mathbf{1}_{2 \times 2} - i \sin \varphi (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)] \\ &\quad \times (x\sigma_X + y\sigma_Y + z\sigma_Z) \\ &\quad \times [\cos \varphi \mathbf{1}_{2 \times 2} + i \sin \varphi (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)] \end{aligned} \tag{17}$$

である。ここで一般にベクトル (a, b, c) と (x, y, z) に対し

$$(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)(x\sigma_X + y\sigma_Y + z\sigma_Z) = (ax + by + cz)\mathbf{1}_{2 \times 2} - i(s\sigma_X + t\sigma_Y + u\sigma_Z) \quad (18)$$

ただし

$$(s, t, u) = (a, b, c) \times (x, y, z) = (bz - cy, cx - az, ay - bx) \quad (19)$$

はベクトル積、となる。いま (a, b, c) と (x, y, z) は直交するとしたので、第一項はなく、

$$W' = [(\cos \varphi)^2 - (\sin \varphi)^2](a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z) + [2 \cos \varphi \sin \varphi](s\sigma_X + t\sigma_Y + u\sigma_Z) \quad (20)$$

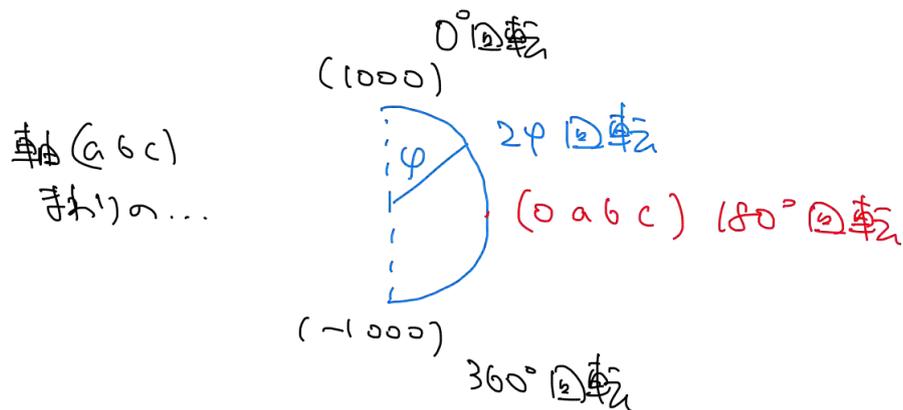
$$= \cos \theta (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z) + \sin \theta (s\sigma_X + t\sigma_Y + u\sigma_Z) \quad (21)$$

ただし $\theta = 2\varphi$ となる。

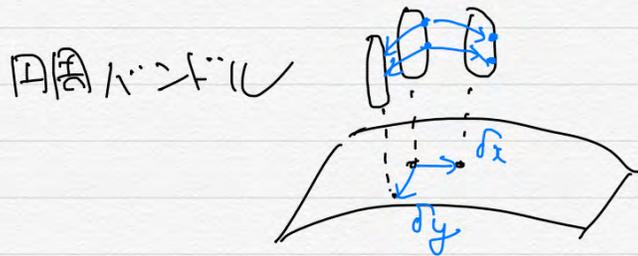
まとめると、

$$U = e^{i\varphi(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi + ic \sin \varphi & (a + bi) \sin \varphi \\ (a - bi) \sin \varphi & \cos \varphi - ic \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (22)$$

は (a, b, c) を軸とする角度 $\theta = 2\varphi$ の回転を引き起こすことがわかった。すなわち



接続 (connection) について:



接続 = 1つの
ポテンシャル

曲率 = 磁場

ϵ 散逸後にはなる。

で、ごく近くの隣の円周に

どう点をほこるのか、というルールのこと。

以下この色は
物理への解釈。

例 球面の接バンドルの中の単位円周バンドル

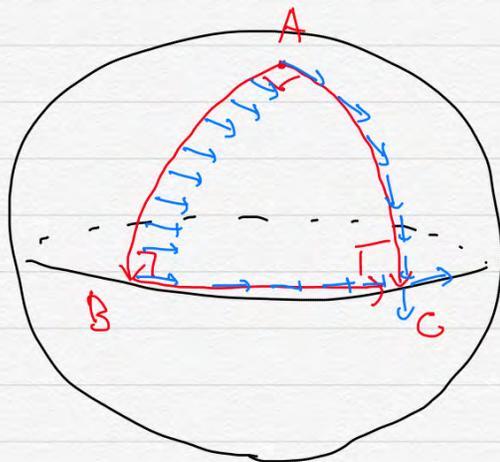
には

標準的な接続がある。

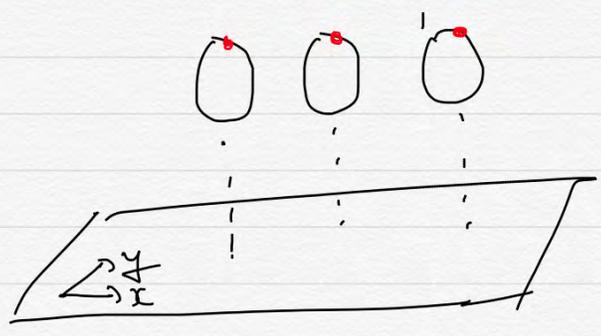


地球上の「軌道」が、平らに
円周をもつてまま歩ける。

接続の結果は道に依存する。

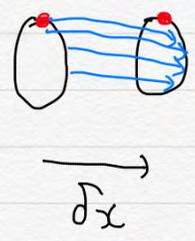


これをどう定量的に表現する?

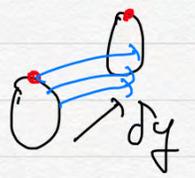


円周中心に

切断を
取れる範囲で
1つ固定.



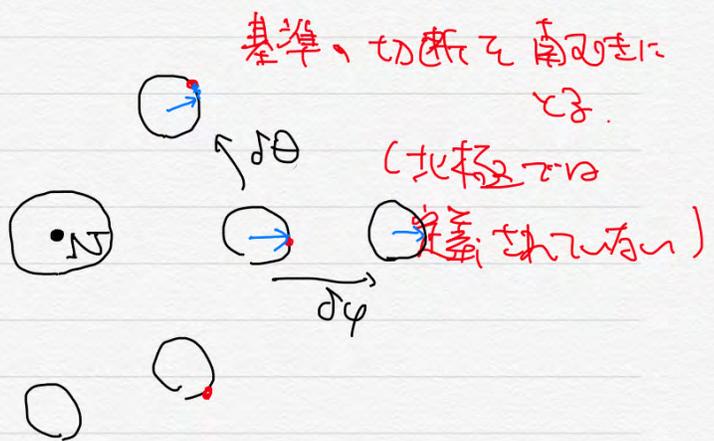
x方向に δx 動かした際
角度 $A_x(x, y) \delta x$ だけ回転



y方向に δy 動かした際
角度 $A_y(x, y) \delta y$ だけ回転

接線の方向

例. 球面の接中心に



基準、切断を南緯に
し.

(北極を

基準として)

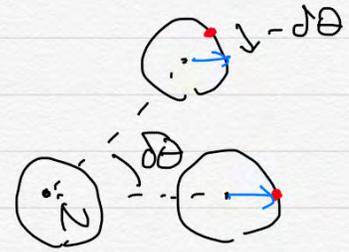
$$\begin{cases} A_\varphi(\varphi, \theta) = 0 \\ A_\theta(\varphi, \theta) = (-\cos \varphi) \delta \theta \end{cases}$$

7-2-a
接線

と置く。

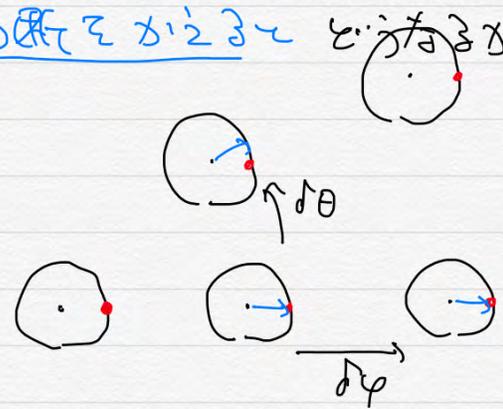
$\varphi = \frac{\pi}{2}$ での $A_\varphi = 0$: 基準の切線 に対して ∂ する.

$\varphi \sim 0$ での $A_\theta = -\delta\theta$



北極点近くの固定した座標系に対して ∂ する.

基準の切線 をかき足してどうなるか?



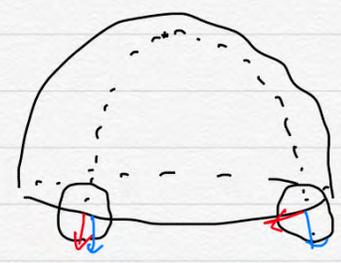
基準の切線を 直線 にしてみる.

上と同じ接続 (向き) での $A_{\theta, \varphi}(\theta, \varphi)$ は変わらない.

$$\begin{cases} A_\varphi^{new}(\varphi, \theta) \delta\varphi = 0 \\ A_\theta^{new}(\varphi, \theta) \delta\theta = (1 - \cos\varphi) \delta\theta \end{cases}$$

$\varphi = 0$ での 基準の切線 に対して ∂ する

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ での 基準の切線 に対して ∂ する: $A_\theta^{new} = \delta\theta$



基準
運動はベクトル

一般に

ある基準の切断 に対し

別の切断 が 角度 $\chi(\theta, \varphi)$ の位相を取ったとすると

連続 $A_\varphi^{old} d\varphi + A_\theta^{old} d\theta$

連続 $A_\varphi^{new} d\varphi + A_\theta^{new} d\theta$

つまり

$$A_\varphi^{old} d\varphi + A_\theta^{old} d\theta = d\chi + A_\varphi^{new} d\varphi + A_\theta^{new} d\theta$$

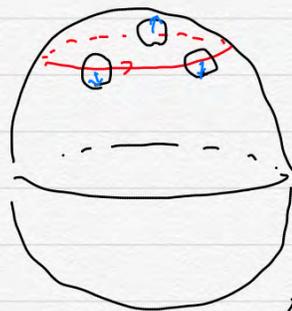
$$= \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \chi}{\partial \theta} d\theta + A_\varphi^{new} d\varphi + A_\theta^{new} d\theta$$

↑が
ポテンシャル
の交換
のせい。

$$\Rightarrow A_\varphi^{new} = A_\varphi^{old} - \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} ; A_\theta^{new} = A_\theta^{old} - \frac{\partial \chi}{\partial \theta}$$

今回の $\chi = -\theta$ だと、上式を容易に証明してみよう!

次に



赤道に沿って一周を一周してまた赤道に
何度回転したか を考えよう。

たゞし 一定緯度 (φ)

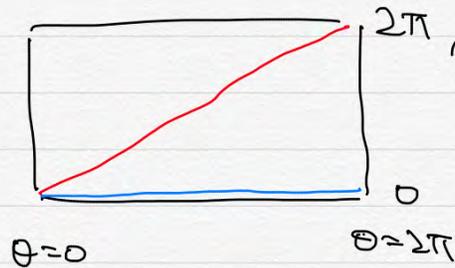
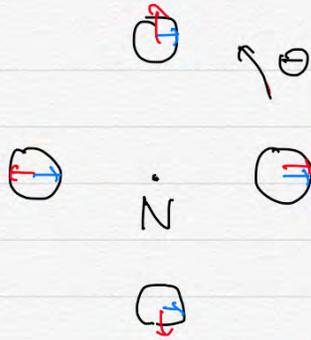
で 経度 (θ) を一周する。

総回転角は $\int_0^{2\pi} A_\theta^{old} d\theta = 2\pi(1 - \cos\varphi)$

↑ 2π が
あるから

つまり $\int_0^{2\pi} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} d\theta = [\chi]_0^{2\pi} = (\chi \text{ の 終点の値}) \times 2\pi$

$$\varphi = 0 \sim 2\pi$$



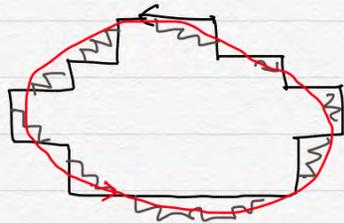
↑ 72/11-1 の
内周方向

青の矢印は時計回りの向き
赤の矢印は逆時計回りの向き

∫

∫ 領域を一周する向き

$$\oint (A_x dx + A_y dy)$$



$$:= \lim_{\text{分割} \rightarrow \infty} \sum_{\text{微小}} A_x(x,y) dx + A_y(x,y) dy$$

は 領域に沿った総回転角を ∫ とする

基準の方向が内部を向くように

7/17-
ポインティング

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \lim_{\text{分割} \rightarrow \infty} \sum_{\text{微小長方形}}$$

$$\left[\begin{array}{l} A_x(x,y) dx \\ + A_y(x+dx, y) dy \\ - A_x(x, y+dy) dx \\ - A_y(x, y) dy \end{array} \right]$$

$$= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

ストークスの定理

!! F_{xy} F の曲率

封筒の接点の例では

$$A_{\varphi}^{\text{old}} = 0$$

$$A_{\theta}^{\text{old}} = -\cos\varphi$$

$$A_{\varphi}^{\text{new}} = 0$$

$$A_{\theta}^{\text{new}} = 1 - \cos\varphi$$

t_1, t_2

$$F_{\varphi\theta}^{\text{old}} = \frac{\partial A_{\theta}^{\text{old}}}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_{\varphi}^{\text{old}}}{\partial\theta} = \sin\varphi$$

$$F_{\varphi\theta}^{\text{new}} = \frac{\partial A_{\theta}^{\text{new}}}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_{\varphi}^{\text{new}}}{\partial\theta} = \sin\varphi$$

一致
一致

この差 - 積に正しく

$$F_{xy}^{\text{old}} - F_{xy}^{\text{new}} = \frac{\partial(A_y^{\text{old}} - A_y^{\text{new}})}{\partial x} - \frac{\partial(A_x^{\text{old}} - A_x^{\text{new}})}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \chi - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \chi = 0$$



$$\int F_{\varphi\theta} d\varphi d\theta = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$= 2\pi [-\cos\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0}$$

$$= 2\pi (1 - \cos\varphi_0)$$

基準となるのは

赤い点の位置

赤い点の位置

北極点の位置を定まらせた

$$\rightarrow A_{\varphi,\theta}^{\text{new}}$$

$$\rightarrow A_{\varphi,\theta}^{\text{old}}$$

に53度回転

に53度回転しては 無い

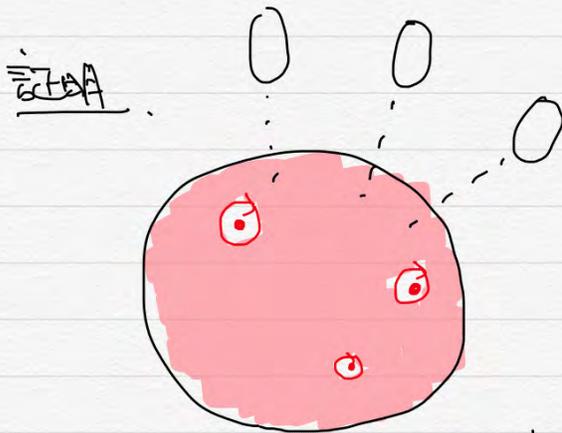
つまり

$$\int_{\text{全球面}} F_{\varphi\theta} d\varphi d\theta = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$= 4\pi \quad \text{である}$$

曲面上の
一般に円周バリエーション γ
の接続 $A_{x,y}$ の曲率 F_{xy} に対し

$$\int_{\text{全曲面}} F_{xy} dx dy = 2\pi \cdot \left[\text{円周バリエーションの} \right. \\ \left. \text{4p-2数} \right] \text{である.}$$



円周バリエーションに対し

$n-2$ の有限個の点 p_i の存在

切断 が与えられる.

この切断を基準として

接続 A を考え 2π の定理を用いて

$$\int_{\text{全曲面}} F_{xy} dx dy = \sum_{\text{切断の点} p_i} \oint_{\text{微小な円周}} \boxed{A_{\theta}} d\theta$$

この基準切断が p_i の取りで連続な円周バリエーションに対し
角度 $\chi(\theta)$ に依存する.

$$\boxed{A_{\theta}} = \boxed{A_{\theta}^{\text{new}}} - \frac{\partial \chi}{\partial \theta}$$

$$\oint A_{\theta} d\theta = \oint A_{\theta}^{\text{new}} d\theta - \left[\chi \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(p_i \text{での} \right. \\ \left. \text{巻き回数} \right) \times 2\pi$$

連続な基準切断に
対しては微分を
巻きはバリエーションを同じにする.

これは Hopf fibration の表現に確認しよう!

この S^3 は Hopf fibration に連続して $U(1)$ を射影する。

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \mapsto (2\operatorname{Re} z\bar{w}, 2\operatorname{Im} z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2)$$

これは $SO(3)$ の $(\sin\varphi \cos\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi)$ に等しい

$$a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi e^{i\theta} \\ \sin\varphi e^{-i\theta} & -\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{と等しい。}$$

$(a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z)^2 = 1$ より固有値は ± 1 。

$$\varphi=0 \text{ のとき } \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\chi \\ \sin\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\chi) \\ \sin(\varphi-\chi) \end{pmatrix}$$

$$\text{これは } \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix}$$

は固有ベクトル。同様に

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi e^{i\theta} \\ \sin\varphi e^{-i\theta} & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix}$$

± 固有値 ± 1 の固有ベクトルがある。

$\varphi=0$ (北極) を含む $U(1)$ の軌道は T_0 である。

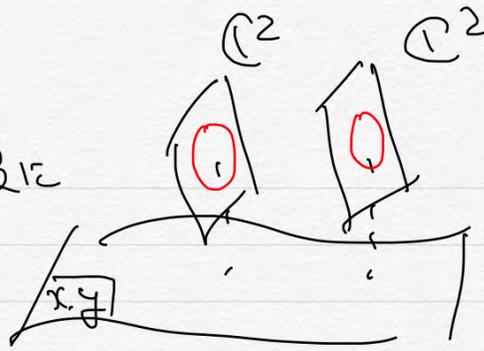
(これは a が正の数であることを示す。)

よって (a, b, c) は $SO(3)$ の元である。

$$e^{i\varphi} \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos\varphi/2 \\ \sin\varphi/2 \end{pmatrix}$$

の形である。

通常一般に

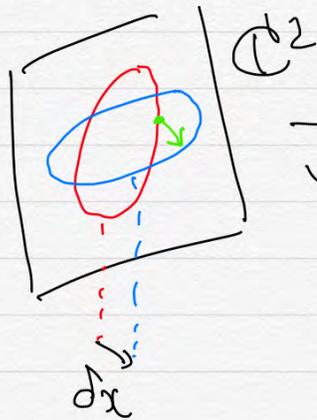


曲面に垂直
2次元空間が... はたして
あり.

この中の1つとして $|v(x, y)\rangle \in \mathbb{C}^2$ が知られており
存在する

$e^{i\phi} |v(x, y)\rangle$ という状態 $\in \mathbb{C}^2$ の

状態の中心として、この標準的基底の



一番近い点にある

とある。

この基底、状態に与える
相対性。

(\mathbb{C} から AA 形式的に A_x, A_y を書くには基底、状態のみ)

$$|v(x, y)\rangle = |v\rangle$$

$$|v(x+dx, y)\rangle = |w\rangle = |v\rangle + \delta |v\rangle$$

と略記する。

$$e^{i\phi} |w\rangle \quad (\phi = 0 \sim 2\pi) \text{ の中}$$

$|v\rangle$ と一番近い状態のどれか?

$$\| |v\rangle - e^{i\phi} |w\rangle \|^2 = \underbrace{(|v\rangle, |v\rangle)}_1 - \left(e^{-i\phi} (|w\rangle, |v\rangle) + e^{i\phi} (|v\rangle, |w\rangle) \right) + \underbrace{(|w\rangle, |w\rangle)}_1$$

$2 \operatorname{Re} e^{i\phi} (|v\rangle, |w\rangle)$

これを最大化。

$$A_\varphi = i \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} e^{i\theta} \sin \varphi/2 \\ \frac{1}{2} \cos \varphi/2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$A_\theta = i \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos \varphi/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -\left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^2$$

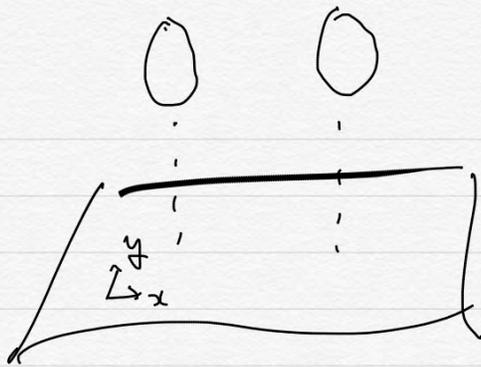
$$\text{23c} \quad F_{\varphi\theta} = \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} = \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sin \varphi.$$

$$\begin{aligned} \text{23c} \quad \int_{\text{Hopf}} F_{\varphi\theta} d\varphi d\theta &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} (-\cos \varphi) \right]_0^\pi = 2\pi. \end{aligned}$$

$$= 2\pi \times 1$$

Hopf f. の $\int_{\text{Hopf}} F_{\varphi\theta} d\varphi d\theta = 2\pi$!

前回



面上の円周に沿って 接続 を考えた.

基準 の切断 A_x, A_y を用いて、 (dx, dy) から角度を測る.

(dx, dy) での動くと $A_x dx + A_y dy$ での回り.

dx, dy の面積 $F_{xy} dx dy$ での回り.

$$\text{但し } F_{xy} := \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

別の基準 の切断 基準 の切断 $\chi(x, y)$ を用いて

$$\text{つまり } A_x^{\text{old}} dx + A_y^{\text{old}} dy = A_x^{\text{new}} dx + A_y^{\text{new}} dy + d\chi$$

$$\text{よって } \begin{cases} A_x^{\text{new}} = A_x^{\text{old}} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ A_y^{\text{new}} = A_y^{\text{old}} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \end{cases}$$

$$F_{xy}^{\text{new}} = F_{xy}^{\text{old}} \quad \text{である.}$$

$$\begin{aligned}
 \text{かつ} \quad & \partial_x F_{yz} + \partial_y F_{zx} + \partial_z F_{xy} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \right) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \right) \\
 &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) = 0 \quad \text{である.}
 \end{aligned}$$

ここで $B_x := F_{yz}, B_y := F_{zx}, B_z := F_{xy}$

ここで \vec{A} (10-ベクトル) の  は

磁束密度 \vec{B} を 1つのポテンシャル \vec{A} で書く式である

上記  は $\frac{\partial}{\partial x} B_x + \frac{\partial}{\partial y} B_y + \frac{\partial}{\partial z} B_z = 0$

この Maxwell 方程式の一部である。

四次元空間の t の方向に伸びる円筒の接続のベクトル t, x, y, z

基準ベクトル $A_x dx + A_y dy + A_z dz + A_t dt$ がある。

$F_{\alpha\beta}$ には \vec{A} (10-ベクトル) の F_{xy}, F_{yz}, F_{zx} に加えて

$$\left\{ \begin{aligned}
 F_{xt} &= \frac{\partial}{\partial x} A_t - \frac{\partial}{\partial t} A_x \\
 F_{yt} &= \frac{\partial}{\partial y} A_t - \frac{\partial}{\partial t} A_y \\
 F_{zt} &= \frac{\partial}{\partial z} A_t - \frac{\partial}{\partial t} A_z
 \end{aligned} \right. \quad \text{がある.}$$

ここで

$$E_x := F_{xt}, \quad E_y := F_{yt}, \quad E_z := F_{zt}$$

ここで 前ページの \square は $A_t = -\varphi$ のため

電場を スカラーポテンシャル φ
と ベクトルポテンシャル A_x, y, z

で書く式である。

前ページ \square での $\odot = t, \triangle, \square \in \{x, y, z\}$

ここで例として

$$\partial_t \underbrace{F_{xy}}_{= B_z} + \partial_x \underbrace{F_{yt}}_{= E_y} + \partial_y \underbrace{F_{tx}}_{= -E_x} = 0$$

$$\begin{cases} -\partial_t B_z = \partial_x E_y - \partial_y E_x \\ -\partial_t B_x = \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ -\partial_t B_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z \end{cases}$$

これは Maxwell 方程式の一部。

ここで 四次元空間 に 4 次元の 1-形式 ω があり

$$\text{接続} \quad A_x dx + A_y dy + A_z dz + A_t dt$$

があり、この 曲率 $F_{\odot\triangle}$ は

前ページの \square 及び 前ページの \square での

磁束密度 \vec{B} と 電場 \vec{E} と

ベクトルポテンシャル (A_x, A_y, A_z) と

スカラーポテンシャル $\varphi = -A_t$ で書ける。

かつ、Maxwell 方程式のうち 半分 が自動的に満たされる。

ニュートン力学

$$\vec{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = - \frac{\partial}{\partial x_i} V(x_1, x_2, x_3)$$

↑

より基本的な定式化

解析力学

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ラグランジュ形式} \\ \text{ハミルトン形式} \end{array} \right.$$

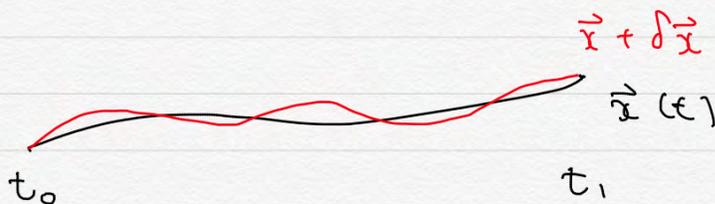
変分積分

$$S[\vec{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 - V(\vec{x}) \right] dt$$

を考へる. $S[\vec{x}(t)]$ が $\vec{x}(t)$ の微小変化

$\vec{x}(t) + \delta\vec{x}(t)$ のもとで

一次の変化量が ゼロである のを要求してやる.



但し 端点 には ゼロとする.

$$\delta \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2 \right] = m \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \delta\vec{x}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \delta\vec{x} dt = \left[m \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \delta\vec{x} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} \cdot \delta\vec{x} dt$$

であり

$$\delta V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^3 \delta x_i \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

Fi から

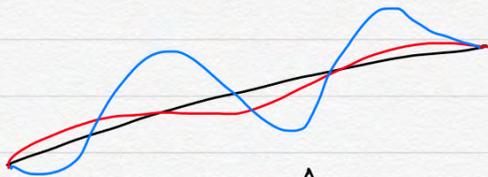
$$\delta S = - \int_{t_0}^{t_1} \left(m \frac{d^2}{dt^2} \vec{x} \cdot \delta \vec{x} + \sum_{i=1}^3 \delta x_i \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) dt$$

$\delta \vec{x}$ の係数をまとめてゼロと置く

$$m \frac{d^2}{dt^2} x_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$$

ご利益?

- n ← 粒子が n なる
 n 方程式 \Rightarrow 本 数
 ひとつの 変数 $S[x(t)]$ に 落ちた.
- 量子力学への移行が かんたん.



全体的

電荷 q の粒子は $V = q\psi$ ← スカラーポテンシャル と呼ぶ

$$m \frac{d^2}{dt^2} x_i = q E_i \quad \text{が 出る.}$$

磁場の場合は \vec{A} の 解が 量子 での どうなるか 分かるか?

$$S[\vec{x}(t)] = \int \left[\frac{1}{2} m \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|^2 - V(\vec{x}) \right] dt$$

← 電磁ポテンシャルの
はたき
"
- q φ(x)

$$\varphi = -A_t \text{ だとすると}$$

電磁場中の粒子の作用は

$$S[\vec{x}(t)] = \int \left[\frac{1}{2} m \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right|^2 \right] dt + \int \left[q \left(A_t dt + A_x dx + A_y dy + A_z dz \right) \right]$$

では無か3つか? 変分して確かめてみる。

簡単のため A_t, x, y, z は x, y, z に関する関数。 t には依存しない。

□ と □ → 変分は x, y, z について。

$$\int A_x dx = \int A_x \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

$$r \text{ の変分 } x(t) \rightarrow x(t) + \delta x(t) \quad z \text{ の変分は } z(t)$$

$$y(t) \rightarrow y(t) + \delta y(t)$$

$$z(t) \rightarrow z(t) + \delta z(t)$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} A_x \frac{dx}{dt} dt = \int (\delta A_x) \frac{dx}{dt} dt + \int A_x \frac{d\delta x}{dt} dt$$

$$\int \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \delta x + \frac{\partial A_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial A_x}{\partial z} \delta z \right) \frac{dx}{dt} dt$$

部分積分??

$$\left[A_x \delta x \right]_{t_0}^{t_1} + \int \left(- \frac{d}{dt} A_x \right) \cdot \delta x dt$$

$$- \frac{\partial A_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

手紙で

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} A_x dx = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \delta y + \frac{\partial A_x}{\partial z} \delta z \right) \frac{dx}{dt} dt$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) \delta x dt$$

$A_y dy, A_z dz$ も同様で

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) = F_{\text{total}}$$

$$= \sum_{\text{components}} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial A_{\text{comp}}}{\partial \text{coord}} - \frac{\partial A_{\text{comp}}}{\partial \text{coord}} \right) \frac{d \text{coord}}{dt} \delta \text{coord} dt$$

また $\delta S[\vec{x}(t)] = \int [\dots] \delta x dt$

$+ \int [\dots] \delta y dt$

$+ \int [\dots] \delta z dt$

これより

$$\text{○} = -m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + q \left(\underbrace{\frac{\partial A_x}{\partial x}}_{E_x} + \underbrace{F_{xy}}_{B_z} \frac{dy}{dt} + \underbrace{F_{xz}}_{-B_y} \frac{dz}{dt} \right)$$

よって 運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = q \left(E_x + \frac{dy}{dt} B_z - \frac{dz}{dt} B_y \right)$$

同様に

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) = q \left(E_y + \frac{dz}{dt} B_x - \frac{dx}{dt} B_z \right)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} z(t) = q \left(E_z + \frac{dx}{dt} B_y - \frac{dy}{dt} B_x \right)$$

□-L = "1" の力... 等しくてもいいよ!

量子力学での状態

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$: 内積を複素ベクトル空間.

時間 t での状態: \checkmark \mathcal{H} 上のユニタリ行列.

$$|\psi\rangle \mapsto U(t)|\psi\rangle$$

$$U(t)U(t') = U(t+t') \quad \text{をみたす.}$$

よって \mathcal{H} 上のユニタリ行列は

$$U(t) = e^{-itH}$$

エルミート行列.

H を書けることが知られている.

H は単位 s^{-1} を持つ.

よって s^{-1} (1/eV) の定義は ^{133}Cs の H の

固有値 (エネルギー) の特定の二つの差が

$$2\pi \times 9192631770 \quad s^{-1}$$

である

である.

\checkmark 定義値.

プランク定数 $h = 6.6 \dots \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

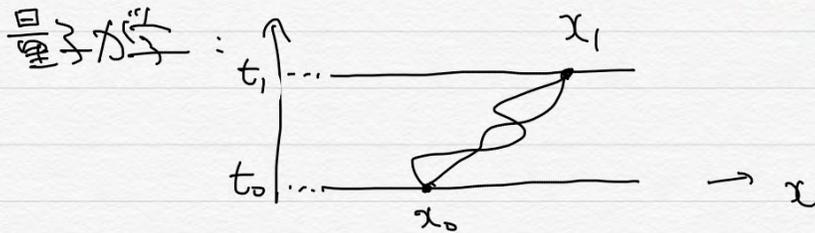
$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.0 \dots \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

を用いて $H = \hbar H$ は系のエネルギー演算子.

\hbar を知られている.

作用 $S[x(t)] = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt$ 変分原理?

古典力学: $S[x(t) + \delta x(t)] = S[x(t)] + \int \delta x(t) dt + \dots$
 ↑
 消之てさへ.



勝手な道 $e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}$ に比例する

重みで通る。

$$\psi(t_1, x_1) \propto \int e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \psi(t_0, x_0) \left[\int_{x(t_0)=x_0}^{x(t_1)=x_1} \delta x(t) \right] dx_0$$

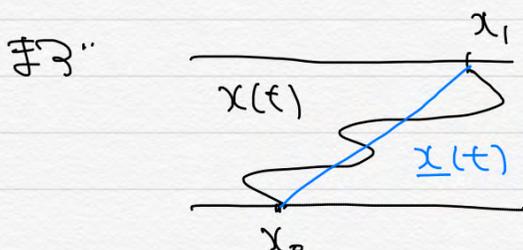
u 手

$$\psi(t_0=0, x) = e^{i p x / \hbar}$$

o 手

$$\psi(t_1=t, x) = e^{-\frac{i t}{\hbar} p^2 + i p x / \hbar}$$

に存在しては 確認しよう。



直線

$$x(t) = \underline{x(t)} + \Delta x(t)$$

と分割.

$$S[x(t)] = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dx}{dt} \frac{d\Delta x}{dt} + \left(\frac{d\Delta x}{dt} \right)^2 \right] dt.$$

↑
↓
v²
(定数).

$$\int_{t=t_0}^{t=t_1} \frac{dx}{dt} \frac{d\Delta x}{dt} dt = v \left[\Delta x \right]_{t=t_0}^{t=t_1} = 0.$$

∴

$$S[x(t)] = \frac{1}{2} m v^2 (t_1 - t_0) + \int_{t=t_0}^{t=t_1} \frac{1}{2} m \left(\frac{d\Delta x}{dt} \right)^2 dt.$$

t → x ↗

$$\psi(t_1, x_1) \propto$$

$$\int e^{\frac{i}{\hbar} \left[\frac{1}{2} m v^2 (t_1 - t_0) \right]} \psi(t_0, x_0) dx_0$$

$$\times \int e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t=t_0}^{t=t_1} \frac{1}{2} m \left(\frac{d\Delta x}{dt} \right)^2 dt} \mathcal{D} \Delta x(t).$$

計算方法の
わからないうか
どうせ
定数

∴ T = t₁ - t₀ とし

$$\psi(T, x_1) \propto \int e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \left(\frac{x_1 - x_0}{T} \right)^2 T} \psi(0, x_0) dx_0$$

x₀ = x₁ + X と変数変換.

$$\psi(T, x_1) \propto e^{\frac{ipx_1}{\hbar}} \int e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{x^2}{T}} e^{ipX/\hbar} dX$$

$$e^{\frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \frac{1}{T} \left(x + \frac{pT}{m} \right)^2 - \frac{p^2}{2m} T \right]} dX$$

X = X + $\frac{pT}{m}$ とさらに変換

$$\propto e^{\frac{ipx_1}{\hbar} - \frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} T} \int e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{1}{T} X^2} dX$$

欲いた結果

これもどうせ定数.

磁場と電場と結合する粒子の波関数の時間発展は？

$$\psi(t_1, x_1) = \int e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + q A_x + q A_x \frac{dx}{dt} \right) dt} \psi(t_0, x_0) dx_0$$

($A_t = -\varphi$ t_0, t_1 .)

簡単のため A_t, A_x は定数とする。

前頁の計算を具直すと \int の部分は $e^{\frac{iq}{\hbar} (-\varphi - A_x X)}$ となる。

挿入する。

$$\psi(t_1, x_1) = e^{\frac{ipx_1}{\hbar} - \frac{i}{\hbar} T \left[\frac{(p - q A_x)^2}{2m} + q \varphi \right]}$$

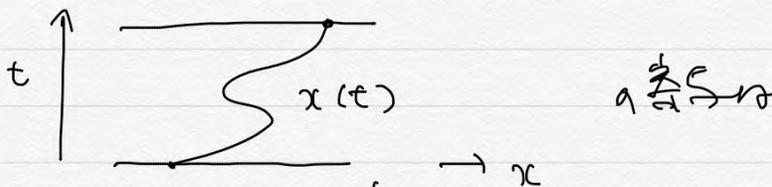
↑
エネルギー

演算子としてのエネルギー

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} - i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{iq}{\hbar} A_x \right)^2 + q\varphi$$

定数である $A_x, \varphi = -A_t$ に代りて e の時間発展を知らねばならない。

磁場の結合に関するもう一つの考察。



$$e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + q A_x \frac{dx}{dt} \right] dt}$$

↑
 φ

t_0, t_1 .

基準となる経路に依存。うん？

例2.10:



これは $e \frac{i}{\hbar} g \int A_x dx$

という因子があるが.

$$\int A_x dx^{\text{old}} = \int A_x dx^{\text{new}} \quad \text{vs} \quad 2\pi \times (\text{巻きつき数})$$

だからスレるんだ、と.

$$\Rightarrow e \frac{i}{\hbar} g \cdot 2\pi (\text{巻きつき数}) = 1 \quad \text{が必要.}$$

∴ 電荷は $g = \hbar u$ となるわけだ.

↑
整数.

実際、707の物体の電荷は

$$e = 1.602 \dots \times 10^{-19} \text{ C} \quad \text{の整数倍.}$$

単位の違いは歴史的経緯による.

$$g^{\text{SI}} A_x^{\text{SI}} = g^{\text{この講義}} A_x^{\text{この講義}}$$

だから

$$\begin{cases} g^{\text{この講義}} = g^{\text{SI}} \cdot \frac{\hbar}{e} \\ A^{\text{この講義}} = A^{\text{SI}} \cdot \frac{e}{\hbar} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F^{\text{この}} &= F^{\text{SI}} \cdot \frac{e}{\hbar} \\ B^{\text{この}} &= B^{\text{SI}} \cdot \frac{e}{\hbar} \end{aligned}$$

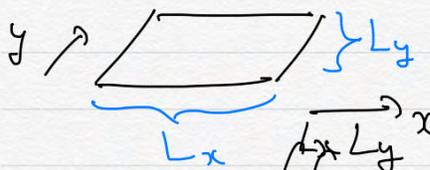


$$\int F_{\varphi\theta} d\varphi d\theta = 2\pi (\text{整数}) \quad \text{だから}$$

$$\begin{cases} B_z = F_{xy} \\ B_x = F_{yz} \\ B_y = F_{zx} \end{cases} \quad \text{とつこうと}$$

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 2\pi (\text{整数}) \quad \text{とある}$$

同様に



$$x \sim x + L_x, \quad y \sim y + L_y$$

と周期的境界条件を課すと

$$\iint_0^{L_x} \int_0^{L_y} F_{xy} dx dy = 2\pi (\text{整数})$$

$$\iint_{\text{影}} B_z dx dy$$

$$B \text{ の量子化} = B^{SI} \cdot \frac{e}{\hbar} \quad \text{だから}$$

$$\text{磁荷} = \int \vec{B}^{SI} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{2\pi\hbar}{e} \times \text{整数}$$

$$\text{電荷} = e \times \text{整数}$$

積は $2\pi\hbar \times \text{整数}$

"Dirac の量子化条件"

$$e \xleftarrow{r} \xrightarrow{-e} \quad \text{力: } \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{2\pi\hbar}{e} \xleftarrow{r} \xrightarrow{-\frac{2\pi\hbar}{e}} \quad \text{力: } \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{2\pi\hbar}{e}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\text{単位電荷間の力}}{\text{単位磁荷間の力}} = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} \frac{e^4}{\hbar^2} \sim 0.0002 \dots$$

α : 微細構造定数

$$= 4 \times \left(\frac{e^2}{2\epsilon_0 \hbar c} \right)^2, \quad \alpha \sim \frac{1}{137}$$

$$\text{ここで} \quad \oint A_x^{\text{old}} dx = \oint A_x^{\text{new}} dx + 2\pi(\text{巻き数})$$

にある影響をみた。開いた道にぐるぐるこねてみる...

開いた道にぐるぐる

$$\int_{x_0}^{x_1} A_x^{\text{old}} dx = \int_{x_0}^{x_1} A_x^{\text{new}} dx + \left[\chi(x) \right]_{x_0}^{x_1}$$

たいた。

$$\psi(t_1, x_1) = \int e^{\frac{i}{\hbar} \left[\dots + q \int_{x_0}^{x_1} A_x dx \right]} \psi(t_0, x_0) \mathcal{D}\chi(t) dx_0$$

か意味を持つたために

$$\psi^{\text{old}}(x) = e^{i \frac{q}{\hbar} \chi(x)} \psi^{\text{new}}(x) \quad \text{と可変する.}$$

↑
新旧基準の切断の差.

「ゲージ変換」と呼ぶ.

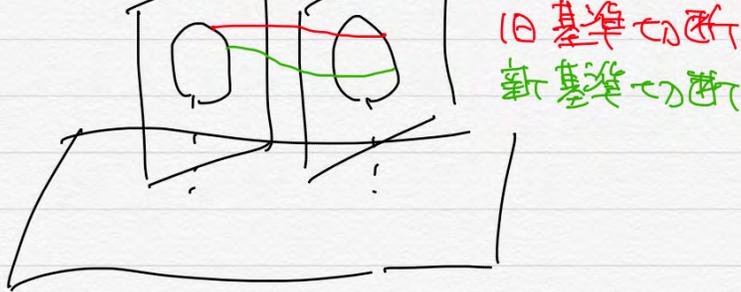
$$q = \hbar (\text{整数}) \quad \text{だった.}$$

簡単のため $q = \hbar$ の場合

$$\psi^{\text{old}}(x) = e^{i \chi(x)} \psi^{\text{new}}(x).$$

この電荷 q の粒子の波動関数の

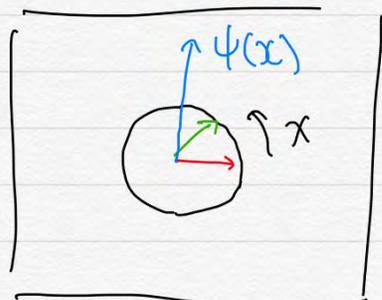
単なる複素数値関数では無く



電磁場 A の接続であるような円周バンドルが

単位円周バンドルであるような平面バンドルの

切断であることの意味.



$$\overset{\text{old}}{\psi(x)} = \overset{\text{new}}{\psi(x)} \cdot e^{i \chi(x)}$$

磁場中の粒子、交換-演算子にわたる

$$\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{q}{\hbar} A_x \quad \text{この組み合わせは}$$

($q = \hbar$ の場合)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i A_x^{\text{old}} \right) \psi^{\text{old}}(x)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} - i \left(A_x^{\text{new}} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \right] e^{i\chi} \psi^{\text{new}}(x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{i\chi} \psi^{\text{new}} \right) - i \left(A_x^{\text{new}} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) e^{i\chi} \psi^{\text{new}}(x)$$

$$= \cancel{i \frac{\partial \chi}{\partial x} e^{i\chi} \psi^{\text{new}}} + e^{i\chi} \frac{\partial}{\partial x} \psi^{\text{new}}$$

$$= e^{i\chi} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i A_x^{\text{new}} \right) \psi^{\text{new}}(x)$$

と $\left(\frac{\partial}{\partial x} - i A \right) \psi$ の組み合わせは自由だ。

ψ と同じ 平面波動の形式で表す方がよい。

これを共変微分 (covariant derivative)

とよぶ。

$\frac{\partial}{\partial x} \psi$ 単体ではうまくいかない。
合わせる必要がある。

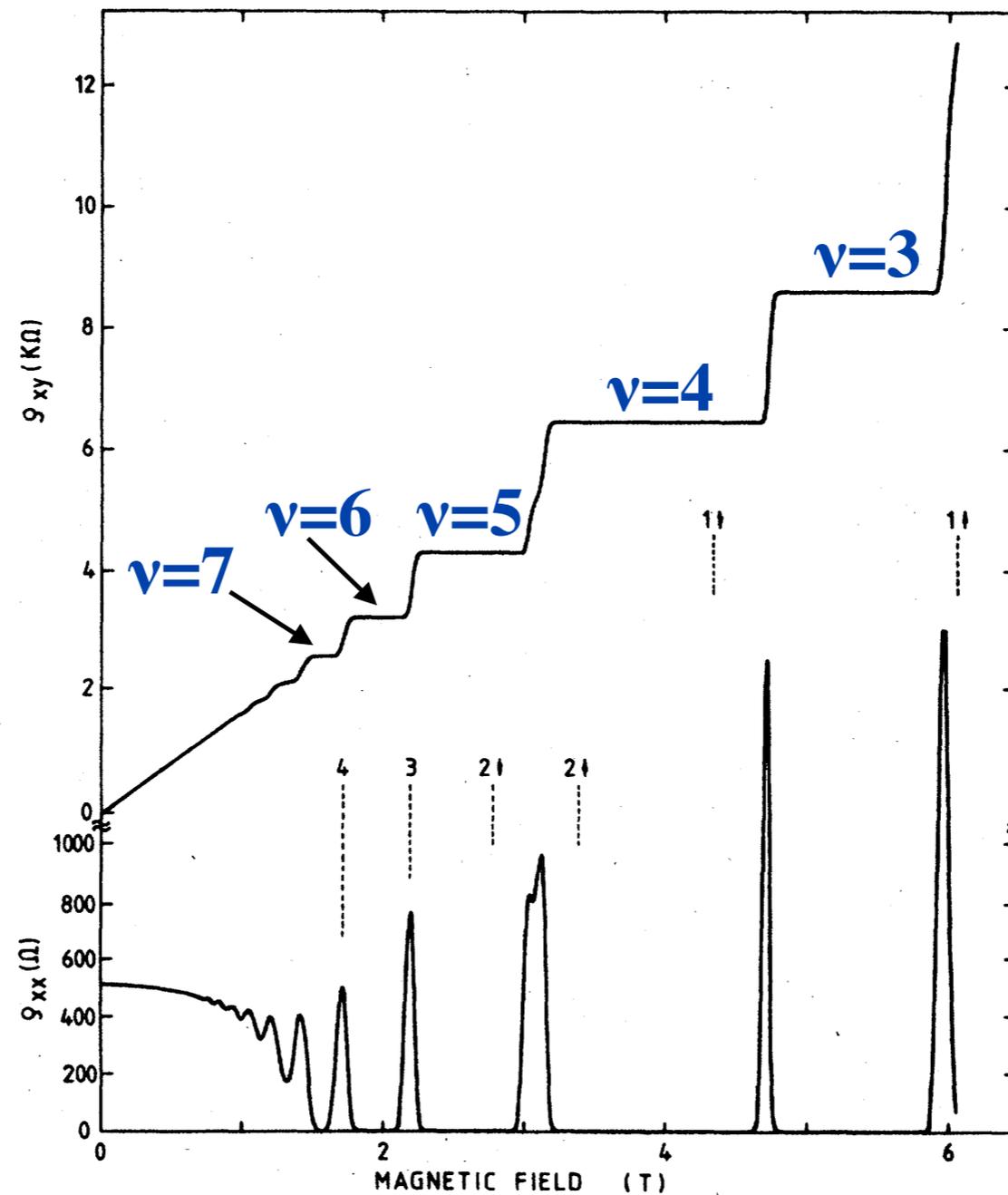


FIG. 14. Experimental curves for the Hall resistance $R_H = \rho_{xy}$ and the resistivity $\rho_{xx} \sim R_x$ of a heterostructure as a function of the magnetic field at a fixed carrier density corresponding to a gate voltage $V_g = 0$ V. The temperature is about 8 mK.

図は von Klitzing, Rev.Mod.Phys. 58(1986)519 より。

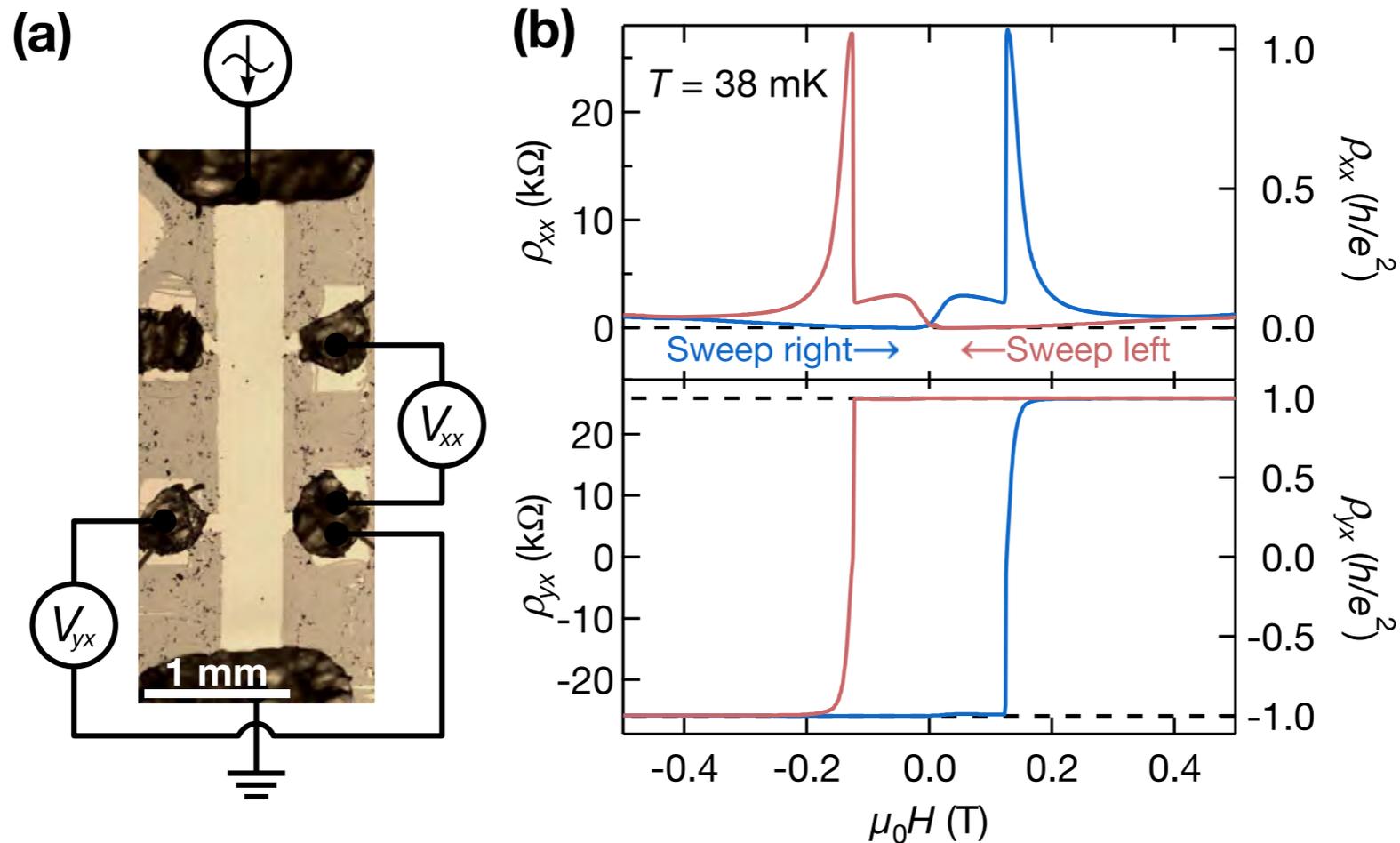
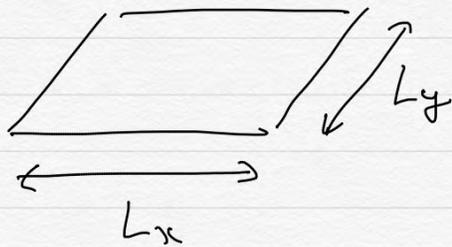


FIG. 1 (color online). Device demonstrating quantum anomalous Hall effect. (a) Photograph of 10-nm-thick film of $(\text{Cr}_{0.12}\text{Bi}_{0.26}\text{Sb}_{0.62})_2\text{Te}_3$ on a GaAs substrate, scratched by hand into a Hall bar shape, with indium metal Ohmic contacts. Schematic measurement setup included. (b) Longitudinal resistivity ρ_{xx} and transverse resistivity ρ_{yx} of the device at base temperature as a function of the applied magnetic field $\mu_0 H$ in each sweep direction, forming a ferromagnetic hysteresis loop. As the field approaches zero from either starting point, ρ_{yx} reaches its quantized value h/e^2 and ρ_{xx} approaches zero.

図は [Bestwick et al. Phys.Rev.Lett. 114\(2015\)187201](#) より。

二次元平面を動く(荷電)粒子を考へる。まず(磁場なし、電場)



簡単のため
周期的境界条件

$$\begin{cases} \psi(x, y) = \psi(x + L_x, y) \\ \psi(x, y) = \psi(x, y + L_y) \end{cases}$$

を課す。

ハミルトン演算子の

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) \\ &= \frac{1}{2m} \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

固有関数は

$$\psi(x, y) = e^{i(p_x x + p_y y) / \hbar}$$

$$\hat{H} \psi = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) \psi$$

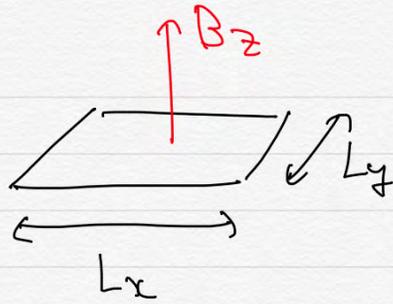
上記 \square より $e^{i p_x L_x / \hbar} = e^{i p_y L_y / \hbar} = 1$

より $p_x = 2\pi\hbar n_x / L_x$, $p_y = 2\pi\hbar n_y / L_y$

整数

ハミルトン固有値は $\frac{(2\pi\hbar)^2}{2m} \left[\left(\frac{n_x}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y} \right)^2 \right]$

L_x, L_y を大きくすると固有値は小さくなる。



磁場 \vec{B} を与える。

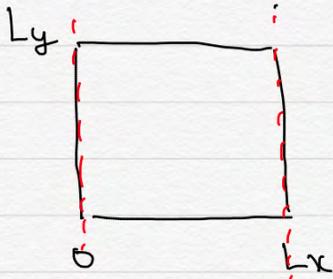
$$\left\{ \begin{aligned} \int B_z dx dy &= \int F_{xy} dx dy = 2\pi N \\ \int B_z^2 dx dy &= \frac{2\pi N^2}{e} \quad \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

ハミルトニアン演算子

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{q}{\hbar} A_x \right) \right]^2 + \left[-i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{q}{\hbar} A_y \right) \right]^2$$

$$B_z = F_{xy} = \frac{2\pi N}{L_x L_y}, \quad F_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \quad \text{etc.}$$

$$A_x = 0, \quad A_y = \frac{2\pi N}{L_x L_y} \cdot x \quad \text{etc.}$$



$$A_y = 0$$

$$A_y = \frac{2\pi N}{L_y}$$

↑
円筒バントル

yが 0 ~ Ly まで動かしても
変わらない。

↑
円筒バントル

yが 0 ~ Ly まで動かすと
2πN かわる。

← →
x=0 と x=Lx の同一相状態が

基準状態が、粒子の数 N だけ

与えられている。

$$A_y^{x=0} = A_y^{x=L_x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \quad \text{となる。}$$

$$\chi = -\frac{2\pi N}{L_y} y.$$

前問の1つを最終値を基準として (Lx, y = 0) として

$$\begin{cases} \psi(x, y) = e^{-i\frac{2\pi N}{L_y} y} \cdot \psi(x+L_x, y) \quad \dots (*) \\ |\psi(x, y)| = |\psi(x, y+L_y)|. \quad \dots \end{cases}$$

これを - 演算子の

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left[i\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{2\pi N}{L_x L_y} x\right]^2 \right].$$

$$\psi(x, y) = \sum_n f_n(x) e^{i2\pi n y / L_y} \quad \text{と仮定。}$$

f_n(x) は x+L_x = x+L_y = x+L_x

* は $= \sum f_n(x+L_x) e^{i \cdot 2\pi(n-N)y / L_y}$

7/24 $f_n(x) = f_{n+N}(x+L_x).$

⇒ $f_0 \dots f_{N-1}$ を決めると他の全部は決まる。

$$\hat{H} \psi(x, y) = E \psi(x, y) \quad \text{は}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left[\frac{2\pi n}{L_y} - \frac{2\pi N}{L_x L_y} x\right]^2 \right] f(x)$$

$$= E f(x)$$

このシュレディンガー方程式。

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + (bx - c)^2 \right] f(x) = E f(x)$$

物理学的な変数変換... $x = \tilde{x} + \frac{c}{b}$ 変数変換

$\tilde{x} \rightarrow x$ 変数変換

$$\left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + (bx)^2 \right] f(x) = E f(x)$$

$$\hat{A} := \frac{\partial}{\partial x} + bx$$

$$\hat{B} := -\frac{\partial}{\partial x} + bx \quad \text{変数変換}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B}f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + bx \right) \left(-\frac{\partial}{\partial x} + bx \right) f \\ &= \left[-\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + (bx)^2 \right] f + \frac{\partial}{\partial x}(bx f) - bx \frac{\partial}{\partial x} f \\ &= (\hat{C} + b) f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{B}\hat{A}f &= \left(-\frac{\partial}{\partial x} + bx \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + bx \right) f \\ &= \left[-\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + (bx)^2 \right] f - \frac{\partial}{\partial x}(bx f) + bx \frac{\partial}{\partial x} f \\ &= (\hat{C} - b) f \end{aligned}$$

変数変換

$$\hat{C}f = Ef$$

$$\begin{aligned} \text{左} \quad \hat{C}\hat{A}f &= (\hat{A}\hat{B} - b)\hat{A}f = (\hat{A}\hat{B}\hat{A} - b\hat{A})f \\ &= (\hat{A}(\hat{C} - b) - b\hat{A})f = (E - 2b)\hat{A}f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右} \quad \hat{C}\hat{B}f &= (\hat{B}\hat{A} + b)\hat{B}f = (\hat{B}\hat{A}\hat{B} + b\hat{B})f \\ &= (\hat{B}(\hat{C} + b) + b\hat{B})f = (E + 2b)\hat{B}f \end{aligned}$$

次のように \hat{C} の固有関数と固有値が求まる。

まず $\hat{A}v(x) = 0$ は $v(x) = e^{-\frac{b}{2}x^2}$ が解。

この $\hat{C}v(x) = (\hat{B}\hat{A} + b)v(x) = bv(x)$ 。

次に $\hat{C}(\hat{B}v(x)) = 3b \cdot \hat{B}v(x)$

$\hat{C}(\hat{B}^2v(x)) = 5b \cdot \hat{B}^2v(x)$

\vdots
 $\hat{C}(\hat{B}^l v(x)) = (2l+1)b \cdot \hat{B}^l v(x)$

ここで $\hat{B}^l v(x)$ を $\phi_l(x)$ とおくと

$\phi_l(x) := \hat{B}^l v(x) = \left(-\frac{\partial}{\partial x} + bx\right)^l e^{-\frac{b}{2}x^2}$

$=: P_l(bx) e^{-\frac{b}{2}x^2}$
ここで P_l は l 次の多項式

\hat{A} : 消滅演算子

\hat{B} : 生成演算子 とよ。

$\hat{B}^l v(x)$ は l が偶 \rightarrow 偶関数
 l が奇 \rightarrow 奇関数

話を戻すと

$\psi(x, y) = \sum_n f_n(x) e^{i2\pi n y / L_y}$

但し $f_n(x) = f_{n+N}(x + L_x)$ かつ

$f_0 \dots f_{N-1}$ は x の関数として外は全部ゼロ。

$$\hat{H} \psi(x, y) = E \psi(x, y) \quad \text{or}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left[\frac{2\pi n}{L_y} - \frac{2\pi N}{L_x L_y} x \right]^2 \right] f(x) = E f(x)$$

ヒント.

$$m, \hat{H} \text{ の固有値は } (2\ell+1) \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{2\pi N}{L_x L_y} \quad \text{or}$$

固有関数は

$$\psi_{\ell, n_0}(x, y) := \sum_{\substack{n \bmod N \\ = n_0}} \phi_{\ell} \left(x - \frac{n}{N} L_x \right) e^{\frac{2\pi i n}{L_y} y}$$

$$(n_0 = 0, 1, \dots, N-1)$$

$$\frac{2\pi N}{L_x L_y} = B_z = B_z^{\text{SI}} \cdot \frac{e}{\hbar} \quad \text{or}$$

$$\text{固有値は } \left(\ell + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar}{m} e B_z^{\text{SI}} \quad \leftarrow \text{ラングムール単位}$$

$$\ell \text{ の固有値ごとに } N = \frac{B_z^{\text{SI}} L_x L_y}{2\pi \hbar / e} \quad \text{or} \quad \text{ラングムール単位}$$

さらに電場をかけた場合どうなるか？

$$\hat{H} \text{ に } e E x \quad \text{or} \quad \text{ラングムール単位を加える}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left[\frac{2\pi N}{L_y} - \frac{2\pi N}{L_x L_y} x \right]^2 \right] + e E x$$

$$\approx \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left[\frac{2\pi N}{L_y} - \frac{2\pi N}{L_x L_y} \tilde{x} \right]^2 \right] + \mathcal{O}(E^2)$$

total
1つの粒子の
はじき電流の

$$\tilde{x} = x + \frac{2m e E}{\hbar^2} \frac{1}{\left(\frac{2\pi N}{L_x L_y} \right)^2} = x + m \frac{E}{e B^2}$$

$$\hat{v}_x = \frac{1}{m} \left(-i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\hat{v}_y = \frac{1}{m} \left(-i \hbar \left(\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{2\pi N}{L_x L_y} x \right) \right) \quad \text{からわかる。}$$

$E=0$ だと $\langle \hat{v}_x \rangle = \langle \hat{v}_y \rangle = 0$ とわかる。

$E \neq 0$ による影響は \square だけ。 eB/\hbar

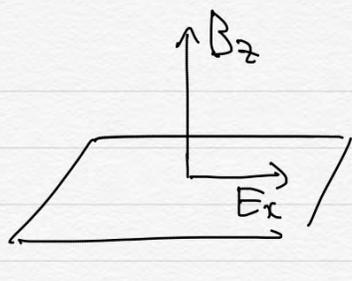
$$\leadsto \langle \hat{v}_y \rangle = \frac{1}{m} \hbar \frac{2\pi N}{L_x L_y} \cdot m \frac{E}{e B^2} = - \frac{E}{B} \quad \text{が}$$

Pauli の排他律より、下から l の n 状態は全部埋まっている。全電流は y 方向に

$$l \cdot N \cdot \frac{e \langle \hat{v}_y \rangle}{L_y} = - l \cdot \frac{e^2}{\hbar} \cdot V$$

$$\frac{e B}{\hbar} L_x L_y \quad \text{量子ホール伝導度!}$$

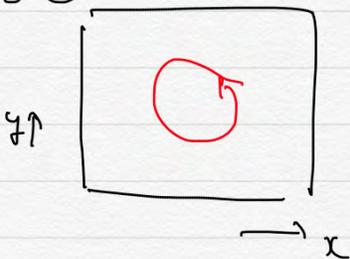
計算途中には
量子力学を使ったが
答えには \hbar のない。



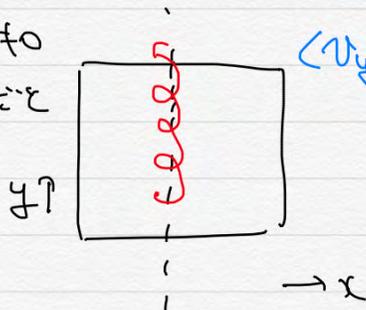
$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = eB \frac{dy}{dt} + eE \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -eB \frac{dx}{dt} \end{cases}$$

平均速度は

$E=0$ のとき



$E \neq 0$ のとき



$$\langle v_y \rangle = -\frac{E}{B}$$

これにランダムな準位とこの状態数を掛けただけ。

解決の第一歩ではあるが、まだまだ遠い。

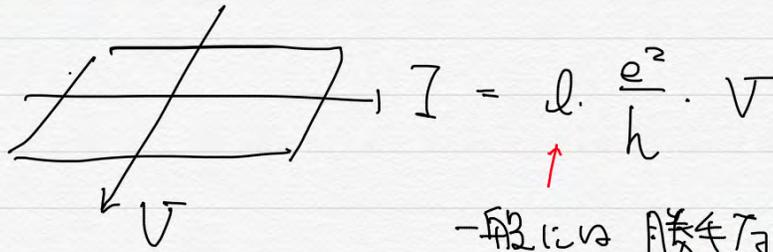
① 非常に理想化・単純化している。

実際の実験では非一様、周期的ではなく、
うる結晶に欠陥もあり。...

それでも測定されたホールの伝導率は非常に整数に近い。

② なぜランダムな準位が丁度よく埋まっていると
考えるのか。適切なものか？

整数量子ホール効果の特殊な例についての説明.



一般には勝手な値.

状況によっては安定に 整数 だったり、
分数 だったりする。

空間方向を周期的条件にしたときに
 効く全系の量子状態 の 数。

自由な 非自由な 自由度の } 唯一つの場合
 ある状態 } 有限個の場合
 ごとく。

相互作用、 N 電子系の 固有 値

一電子のエネルギー演算子の

固有値: E_i

固有状態: $|\psi_i\rangle$ だて可なり

$i=1, 2, 3, \dots$

N 電子系のエネルギー演算子の固有値は

$$E_{i_1} + E_{i_2} + \dots + E_{i_N}$$

$$(i_1 < i_2 < \dots < i_N)$$

この形 (パウリの排他律)

量子力学的粒子にはボソンとフェルミオンがある。

フェルミオン = 100% の排他律をみたす

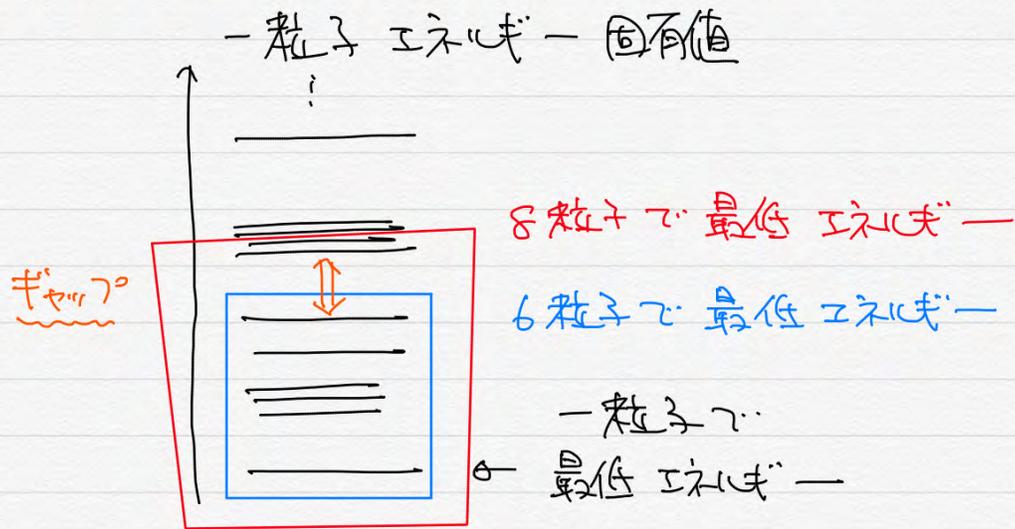
= 720° 回してはじめてもとに戻る

ボソン = 100% の排他律をみたさない

= 360° でもとに戻る

スピン-統計性定理

この相対論的場の量子論から従う定理。



6 粒子の場合

$$\begin{array}{l}
 E_1 + \dots + E_5 + E_6 \\
 E_1 + \dots + E_5 + E_7
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{最低} \\
 \text{の次}
 \end{array}
 \quad
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{差は } E_7 - E_6$$

8 粒子の場合

$$\begin{array}{l}
 E_1 + \dots + E_7 + E_8 \\
 E_1 + \dots + E_7 + E_9
 \end{array}
 \quad
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{差は } E_9 - E_8$$

自明なギャップがある \Rightarrow 整数量子ホール

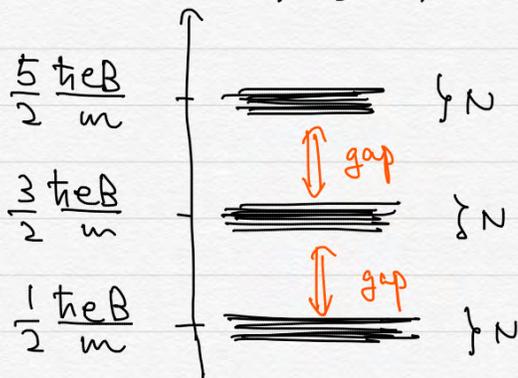
この一般論がある.

前回扱った理想化された系. 可成り

独立に

自由

平面上を動く荷電粒子に磁場がかけられているとき
一粒子 エネルギー固有値



固有値は $(Q + \frac{1}{2}) \frac{\hbar}{m} e B_z^{SI}$ ← ランダウ準位.

Q を固定する毎に $N = \frac{B_z^{SI} L_x L_y}{2\pi\hbar/e}$ だけ状態がある

粒子数が 丁度 N の整数倍のときのみ \checkmark ギャップがある

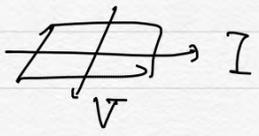
\rightarrow 整数量子ホール効果.

実験的に \checkmark もって \checkmark しい条件で \checkmark ギャップがある

整数量子ホール効果を示す.

自明なギャップがある

① \Rightarrow 量子作用が定義でき、意味がある

② \Rightarrow ホール効果 $I \propto \sigma V$ 

があるとして量子作用には

$$S \propto \sigma \int (A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx}) dt dx dy$$

という項がある

③ \Rightarrow σ は特定の値の整数倍である

という議論をする。

① 荷電粒子の作用には $\int (A_t + A_x \frac{dx}{dt} + A_y \frac{dy}{dt}) dt$

という項があった。沢山の粒子があるとして

$$\dots + \sum_i A_x(x_i(t), y_i(t), z_i(t)) g_i \frac{dx_i}{dt} + \dots$$

という項がある。

↑
荷電粒子の1/cの電流

連続的に書くと

二次元面内の電流密度

$$\int (A_t \rho + A_x j_x + A_y j_y) dx dy dt$$

とある。
↑
電荷密度

である

$$\textcircled{1} \int [A + \delta A] = \int [A] + \int [(\delta A_x)\rho + (\delta A_x)j_x + (\delta A_y)j_y] dt dx dy$$

である。

量子力学系は物理系はとて複雑である。

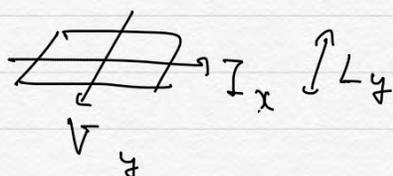
自明なディラックの量子系の場合は一般に

計算の最終結果の ρ, j_x, j_y に対して

上式 ~~(*)~~ をみたさうな **有効作用** S がある。

重要な点だが量子物体系の一般論を量子力学の教科書に説明はむづかしい。今回は認めておこう。

$$\textcircled{2} \text{ かつ } I_x = \sigma V_y \quad \text{である。}$$



$$j_x = \frac{I_x}{L_y}, \quad E_y = \frac{V_y}{L_y}$$

$$\begin{cases} j_x = +\sigma E_y & \text{同様に} \\ j_y = -\sigma E_x & \text{である。} \end{cases}$$

④ 電磁場 $E_x = F_{yt}, E_y = F_{tx}$ である

$$S[A] = \dots + \sigma \int (A_x F_{yt} + A_y F_{tx}) dt dx dy$$

と電磁場のエネルギー密度 \mathcal{E} は $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ である

$$+ \frac{\sigma}{2} \int (A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx}) dt dx dy$$

である。

すなわち $\int (A_x F_{yt} + A_y F_{tx}) dt dx dy$ である項を考慮する。

より基準のゲージ変換を取りかかると

$$\begin{cases} A_x^{\text{new}} = A_x^{\text{old}} - \frac{\partial}{\partial x} \chi \\ A_y^{\text{new}} = A_y^{\text{old}} - \frac{\partial}{\partial y} \chi \end{cases} \quad t: t, x: x$$

$F_{\mu\nu}$ は変化しない。すなわち

$$\begin{aligned} & \int \left[(A_x F_{yt} + A_y F_{tx})^{\text{old}} - (A_x F_{yt} + A_y F_{tx})^{\text{new}} \right] dt dx dy \\ &= \int \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \chi \right) F_{yt} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \chi \right) F_{tx} \right] dt dx dy \quad \dots \star \end{aligned}$$

したがって $S[A]$ が χ に依存しない。

$\omega \int A_t F_{xy} dt dx dy$

$$\int \left[(A_t F_{xy})^{old} - (A_t F_{xy})^{new} \right] dt dx dy$$

$$= \int \frac{\partial \chi}{\partial t} F_{xy} dt dx dy.$$

$$\int \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \chi \right) F_{yt} \right] dx = \left[\chi F_{yt} \right]_{x=0}^{x=L_x} - \int \chi \frac{\partial F_{yt}}{\partial x} dx$$

周期的境界条件のため積分はゼロになる。

を使って

$$\int \left[(A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx})^{old} - (A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx})^{new} \right] dx dy dt$$

$$= - \int \chi \left[\frac{\partial F_{xy}}{\partial t} + \frac{\partial F_{yt}}{\partial x} + \frac{\partial F_{tx}}{\partial y} \right] dx dy dt.$$

Maxwell 方程式 $\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$

となる。

したがって $\int (A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx}) dt dx dy$

は基準切断の χ の取り方に依存しない。

(χ の取り方は任意である)

これは Chern-Simons 理論である。

ω_g

$$\delta \int \left(A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx} \right) dt dx dy \quad \dots \text{ (}\# \text{)}$$

$$= \int \left[\delta A_t F_{xy} + \delta A_x F_{yt} + \delta A_y F_{tx} \right. \\ \left. + A_x \delta \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \right. \\ \left. + A_x \delta \left(\frac{\partial}{\partial y} A_t - \frac{\partial}{\partial t} A_y \right) \right. \\ \left. + A_y \delta \left(\frac{\partial}{\partial t} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_t \right) \right] dt dx dy$$

↑
 $\underline{\hspace{2cm}} = \int A_t \frac{\partial}{\partial x} \delta A_y dt dx dy$

$$= \int \left[A_t \delta A_y \right]_{x=0}^{x=L_x} dx dy - \int \left(\frac{\partial}{\partial x} A_t \right) \delta A_y dt dx dy$$

↑
 周期性的边界条件为0.

$$\underline{\hspace{2cm}} = + \int \frac{\partial}{\partial x} A_x \delta A_y dt dx dy$$

f(1) $\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = \int \delta A_y F_{tx} dt dx dy$.

5.2 (#) = $2 \int \left(\delta A_t F_{xy} + \delta A_x F_{yt} + \delta A_y F_{tx} \right) dt dx dy$.

ω_g $S[A] = \frac{\sigma}{2} \int \left(A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx} \right) dt dx dy$

δS[A] = $\sigma \int \left(\delta A_t \underbrace{F_{xy}}_{j_y} + \delta A_x \underbrace{F_{yt}}_{j_x} + \delta A_y \underbrace{F_{tx}}_{j_x} \right) dt dx dy$.

$$\begin{cases} j_x = \sigma F_{yt} = \sigma E_y \\ j_y = \sigma F_{tx} = -\sigma E_x \end{cases}$$

これの対称性を再確認。しかしおまけに

$$\rho = \sigma F_{xy} = \sigma B_z$$

とするとこれがわかると、

$$\textcircled{3} \quad \begin{aligned} \phi^{SI} &= \int \rho^{SI} dx dy = \sigma^{SI} \int F_{xy}^{SI} dx dy \\ &= \sigma^{SI} \cdot \frac{h}{e} \cdot \text{整数} \end{aligned}$$

e の整数倍

2になる
-1になる

$$\Rightarrow \sigma^{SI} \text{ は } \frac{e^2}{h} \text{ の整数倍!}$$

$$\phi^{CG} = \sigma^{CG} \int F_{xy}^{CG} dx dy = \sigma^{CG} \cdot 2\pi \cdot \text{整数}$$

h の整数倍

$$\Rightarrow \sigma^{CG} \text{ は } \frac{h}{2\pi} n$$

有効作用は

$$e^{iS/h} = e^{2\pi i \cdot n \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int (A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx}) dt dx dy \right]}$$

Chern-Simons 項

Chern-Simons 理論の数学でも出てくるか

通常 $\frac{1}{2}$ の前 $\frac{1}{(2\pi)^2} \int (A_t F_{xy} + A_x F_{yt} + A_y F_{tx}) dt dx dy$

の形でも出てくる。

微分形式 $A = A_t dt + A_x dx + A_y dy$

$F = \delta A = F_{xy} dx dy + F_{yt} dy dt + F_{tx} dt dx$

EA として $\frac{1}{(2\pi)^2} \int A F = \int \frac{A}{2\pi} \frac{F}{2\pi}$ ？

$d(\frac{A}{2\pi} \frac{F}{2\pi}) = \frac{F}{2\pi} \cdot \frac{F}{2\pi} = (\text{第140-2題})^2$

より+生値をみたす。これ EA として

$e^{2\pi i} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int A \cdot F$

は 勝手な 3次元空間で定義できる。

$e^{2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int A \cdot F}$

は 勝手な 3次元空間での定義できない。

数学でいうところの スピン構造 が必要。



360° 回ったのみ

720° 回ったのみ

3次元多様体と見做して

つくる際にきちんと指定したものを。

~) 整数量子化効果で

$\sigma = \frac{e^2}{h} \cdot \text{奇数}$ が許される背景には 360° vs 720° 問題が隠れている。