駒場現代物理学(2023)第6回講義ノート追加分

$\mathcal{H}=\mathbb{C}^2$ でのユニタリ変換と三次元空間の回転の関係についてさらに具体的に考えよう。前回のノートの (4.2.4) でユニタリでかつ行列式が 1 なようなものは $|u|^2+|v|^2=1$ なる複素数をつかって

$$U=\begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix} \tag{1}$$

と書けるのをみた。[1]

べつのパラメタ付けをかんがえる。そのため $a^2+b^2+c^2=1$ として

$$e^{i\varphi(a\sigma_X+b\sigma_Y+c\sigma_Z)} \tag{2}$$

という行列の指数関数を考える。ただし

$$e^M := \mathbf{1}_{2\times 2}+M+\frac{1}{2!}M^2+\frac{1}{3!}M^3+\cdots \tag{3}$$

とする。まず

$$\begin{aligned}
&(a\sigma_X+b\sigma_Y+c\sigma_Z)^2 && (4)\\
&=a^2(\sigma_X)^2+b^2(\sigma_Y)^2+c^2(\sigma_Z)^2 \\
&\qquad +ab(\sigma_X\sigma_Y+\sigma_Y\sigma_X)+bc(\sigma_Y\sigma_Z+\sigma_Z\sigma_Y)+ca(\sigma_Z\sigma_X+\sigma_X\sigma_Z) && (5)\\
&=(a^2+b^2+c^2)\mathbf{1}_{2\times 2}=\mathbf{1}_{2\times 2} && (6)
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi(a\sigma_X+b\sigma_Y+c\sigma_Z)} &= \mathbf{1}_{2\times 2}+i\varphi(a\sigma_X+b\sigma_Y+c\sigma_Z) \\
&\qquad -\frac{1}{2}\varphi^2\mathbf{1}_{2\times 2}-\frac{1}{6}i\varphi^3(a\sigma_X+b\sigma_Y+c\sigma_Z) \\
&\qquad +\frac{1}{24}\varphi^4\mathbf{1}_{2\times 2}+\frac{1}{120}i\varphi^5(a\sigma_X+b\sigma_Y+c\sigma_Z)+\cdots && (7)\\
&=\cos\varphi\mathbf{1}_{2\times 2}+i\sin\varphi(a\sigma_X+b\sigma_Y+c\sigma_Z) && (8)\\
&=\begin{pmatrix} \cos\varphi+ic\sin\varphi & (a+bi)\sin\varphi \\ (a-bi)\sin\varphi & \cos\varphi-ic\sin\varphi \end{pmatrix} && (9)
\end{aligned}$$

これは (1) の形である。

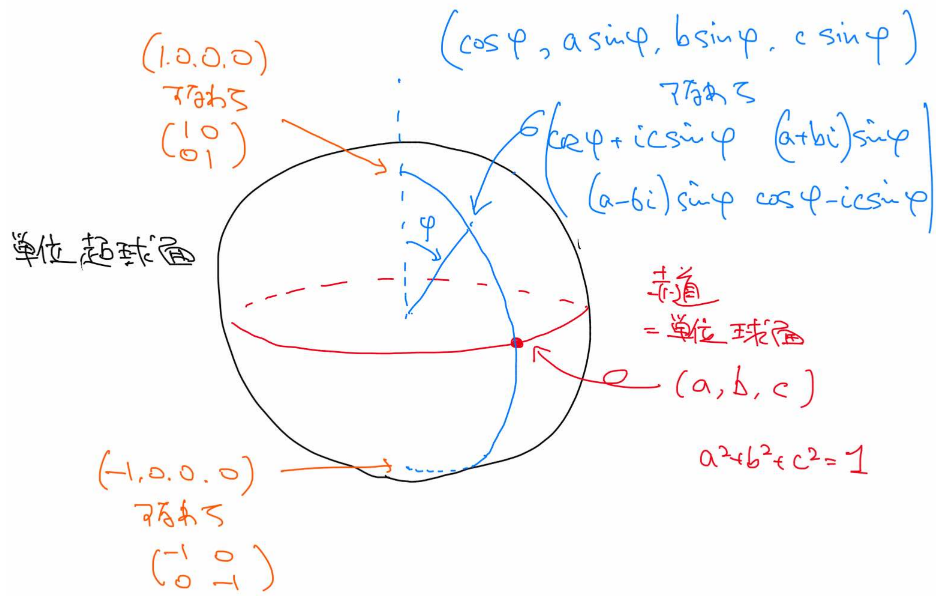
$$(\cos\varphi, a\sin\varphi, b\sin\varphi, c\sin\varphi) \tag{10}$$

は単位超球面上にあって、普通の球面をパラメタ付けする $a^2+b^2+c^2=1$ と、その超球面における「緯度」φ であらわしたものになっている。普通の球面を

$$(\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi) \tag{11}$$

[1] $\mathcal{H}=\mathbb{C}^2$ の状態 $|\psi\rangle$ で $(|\psi\rangle,|\psi\rangle)=1$ をみたすものも同様に $|u|^2+|v|^2=1$ なる超球面で記述されたが、いまは別のものを考えていることに注意する。異なるものでも同じ数学的構造(ここでは単位超球面)で記述されることがある。

とパラメタ付けするのに比較せよ。ここまでの考察を図に書くと



さてこれはどのような三次元空間の回転に対応するか? (x, y, z) というベクトルに対し、$W = x\sigma_X + y\sigma_Y + z\sigma_Z$ という行列を考え、

$$W' = U^\dagger W U \tag{12}$$

を

$$W' = x'\sigma_X + y'\sigma_Y + z'\sigma_Z \tag{13}$$

とするのだった。

まず $(x, y, z) = (a, b, c)$ すなわち $W = a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z$ の場合を考えると

$$\begin{aligned}W' = &[\cos\varphi\mathbf{1}_{2\times2} - i\sin\varphi(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)]\\ &\times (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)\\ &\times [\cos\varphi\mathbf{1}_{2\times2} + i\sin\varphi(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)]\end{aligned} \tag{14}$$

であるが行列は自分自身と交換するので

$$\begin{aligned}&= (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)\\ &\quad\times [\cos\varphi\mathbf{1}_{2\times2} - i\sin\varphi(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)]\\ &\quad\times [\cos\varphi\mathbf{1}_{2\times2} + i\sin\varphi(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)]\end{aligned} \tag{15}$$

$$= (a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z). \tag{16}$$

すなわち、 (a, b, c) を変化させなかった。そういう回転操作は (a, b, c) を軸とする回転のはずである。

回転角を調べるため、(a, b, c) に直交するベクトルを (x, y, z) とする。すると

$$\begin{aligned}W' = &[\cos\varphi\mathbf{1}_{2\times2} - i\sin\varphi(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)]\\ &\times (x\sigma_X + y\sigma_Y + z\sigma_Z)\\ &\times [\cos\varphi\mathbf{1}_{2\times2} + i\sin\varphi(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)]\end{aligned} \tag{17}$$

である。ここで一般にベクトル (a,b,c) と (x,y,z) に対し

$$(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)(x\sigma_X + y\sigma_Y + z\sigma_Z) = (ax+by+cz)\mathbf{1}_{2\times 2} - i(s\sigma_X + t\sigma_Y + u\sigma_Z) \quad (18)$$

ただし

$$(s,t,u) = (a,b,c)\times(x,y,z) = (bz-cy, cx-az, ay-bx) \quad (19)$$

はベクトル積、となる。いま (a,b,c) と (x,y,z) は直交するとしたので、第一項はなく、

$$\begin{aligned} W' &= [(\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2](a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z) \\ &\quad + [2\cos\varphi\sin\varphi](s\sigma_X + t\sigma_Y + u\sigma_Z) && (20) \\ &= \cos\theta(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z) + \sin\theta(s\sigma_X + t\sigma_Y + u\sigma_Z) && (21) \end{aligned}$$

ただし $\theta = 2\varphi$ となる。

　まとめると、

$$U = e^{i\varphi(a\sigma_X + b\sigma_Y + c\sigma_Z)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi + ic\sin\varphi & (a+bi)\sin\varphi \\ (a-bi)\sin\varphi & \cos\varphi - ic\sin\varphi \end{pmatrix} \quad (22)$$

は (a,b,c) を軸とする角度 $\theta = 2\varphi$ の回転を引き起こすことがわかった。すなわち