2023年度「現代物理学」レポート講評

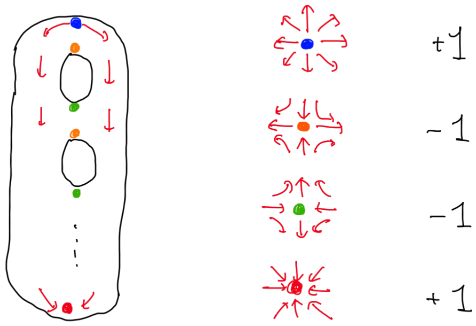
課題 1

講義では球面の接バンドルの中の単位円バンドルのチャーン数が 2 であることを学んだ。一般に一つ穴、二つ穴、... の曲面を考える:

球面　一つ穴　二つ穴　三つ穴　$\cdots$

穴の数を g として、これらの曲面の接バンドルの中の単位円バンドルのチャーン数はいくつか? ひとつの方法は、曲面状にベクトル場を描いて(毛が生えている状況を考えて)、それがゼロになる点(つむじ)に対して巻き付き数を計算し、足し挙げれば良い。講義では符号はきちんと説明しなかったので、絶対値があっていれば正解とする。

答えは $2-2g$ です。皆さん色んな方法で数えてくれましたが、何人かがやってくれた方法は次のものです。曲面を机の上に立てます。そして、矢印はいつも曲面の下に向くようにします。



すると図のように、四種類のタイプのつむじが出来ます。青と赤はひとつずつ、橙と緑は穴の数だけ出ます。それぞれの巻き付き数は上記のようになるので、答えは $2-2g$ になります。

課題 2

以下パウリ行列

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Y = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いる。

1. $x^2+y^2+z^2=1$ なる実数 (x,y,z) に対し、

$$x\sigma_X + y\sigma_Y + z\sigma_Z$$

の固有値が ± 1 であることを示せ。(必要ならば (x,y,z) を極座標であらわすなどせよ。) また、固有ベクトルを求めよ。その際、長さ 1 にすること。

2. 固有値 1 で長さ 1 の固有ベクトルは球面上滑らかに選べるだろうか?

3. いま $|u|^2+|v|^2=1$ なる複素数 (u,v) に対し、その Hopf ファイブレーションでの行き先を
$$(x,y,z)=(2\,\mathrm{Re}\,u\bar{v}, 2\,\mathrm{Im}\,u\bar{v}, |u|^2-|v|^2)$$
とする。このとき縦ベクトル
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
が $x\sigma_X+y\sigma_Y+z\sigma_Z$ の固有ベクトルであることを確認せよ。固有値はいくつか?

4. 上記 2. と 3. でわかったことの関係を述べよ。

問題文中に $z\sigma_Z$ とあるべきところが $z\sigma_Y$ となる誤植があり、皆さん指摘してくれました。小問1は皆さん無事といてくれました。固有値 $+1$ のほうの固有ベクトルは $(x,y,z)=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta)$ として
$$\begin{pmatrix} e^{i\phi}\cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$
などと取れます。

ここまでできているのに、小問2で「滑らかに取れる」と書いた人が多かったです。でもそうではないです。北極 $(x,y,z)=(0,0,1)$ の近傍では $\theta\sim 0$ ですから固有ベクトルはだいたい
$$\sim \begin{pmatrix} e^{i\phi} \\ 0 \end{pmatrix}$$
となりますが、これは $\theta=0$ でも ϕ に依存してしまいます。北極では ϕ は定まりませんから、この固有ベクトルの取り方は北極では滑らかでないわけです。

小問 3 は、「Hopf fibration のそれぞれの円周は、ちょうど行き先の $x\sigma_X+y\sigma_Y+z\sigma_Z$ の固有値 $+1$ の長さ 1 の固有ベクトル全体になっていること」を確認するという問題です。ですから、小問 1 は「固有値 $+1$ の固有ベクトルで長さ 1 のものを (θ,ϕ) に対して書け」というのは「Hopf fibration の切断をとれ」ということになるわけです。でも、講義では Hopf fibration のチャーン数は 1 であることをやりましたから、滑らかな切断は取れず、かならずつむじがどこかに生じる。固有ベクトルは球面上全ての点で滑らかにはとれない。こういうことを小問 4 の答えに書いて欲しかったというわけです。

課題 3

m, kg, s, A などの定義はフランス革命から現代に至るまで、科学と技術の進展にしたがって改良、変更されてきた。これについて、なんでも調べてまとめること。参考にした文献/インターネット上のリソースは明記すること。
例: フランス革命のときの議論の経緯について詳細に調べる、歴史的経緯を全体について概観する、最新の定義について詳細に記述する、自分が生まれてからの変更ひと

つについて議論する、など。

いろいろみなさんまとめてくれました。文献の引用の仕方についてひとことふたこと:

- Nature, とだけ書かれてもわかりません! 文献の引用は、読んだ人がもとの文献をインターネット、図書館等で探り当てられるだけの情報を書いてください。
- Wikipedia や National Geographic 等の記事を引用してくださった人もいました。まあ、それでも参照している文献がはっきりしていれば良いのですが、さらにそこに載っている情報の出所を追求してくだされぱより良かったと思います。

ある学生さんの指摘ですが、candela (cd) が SI にはいっているのは確かに奇異に感じますね。candela は光が人間の目にあたえる明るさを数値化する単位なので、SI のその他の kg, m, s, A, K, mol とは異質の存在のように思います。

課題 4

講義では Maxwell 方程式の半分はスカラーポテンシャル $\varphi = -A_t$ およびベクトルポテンシャル (A_x, A_y, A_z) に対し

$$F_{\triangle\square} = \frac{\partial A_\square}{\partial \triangle} - \frac{\partial A_\triangle}{\partial \square} \tag{4.1}$$

と定め

$$E_x = F_{xt}, \qquad E_y = F_{yt}, \qquad E_z = F_{zt}, \tag{4.2}$$

$$B_x = F_{yz}, \qquad B_y = F_{zx}, \qquad B_z = F_{xy} \tag{4.3}$$

とすると自動的に出ることをみた。また、電流密度 (j_x, j_y, j_t) と電荷密度 ρ との結合は

$$S = \cdots + \int (A_t\rho + A_x j_x + A_y j_y + A_z j_z) dxdydzdt \tag{4.4}$$

であることも学んだ。
Maxwell 方程式の残りの半分は C_1, C_2 を定数として次の作用の変分から出すことができる:

$$\begin{aligned} S[A] = \int \left[C_1(|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2) + C_2(|B_x|^2 + |B_y|^2 + |B_z|^2)\right] dxdydzdt \\ + \int (A_t\rho + A_x j_x + A_y j_y + A_z j_z) dxdydzdt. \end{aligned} \tag{4.5}$$

すなわち、

$$S[A + \delta A] = S[A] + \int (\blacksquare_t \delta A_t + \blacksquare_x \delta A_x + \blacksquare_y \delta A_y + \blacksquare_z \delta A_z) dxdydzdt + \cdots \tag{4.6}$$

と書いた際に

$$\blacksquare_t = 0, \quad \blacksquare_x = 0, \quad \blacksquare_y = 0, \quad \blacksquare_z = 0 \tag{4.7}$$

が残りの Maxwell 方程式になるのである。

1. C_1, C_2 を未知の定数としたまま、
$$\delta S = S[A+\delta A] - S[A] \tag{4.8}$$
を計算せよ。ただし、ρ, $j_{x,y,z}$ は $A_{t,x,y,z}$ には依存しないとして
$$\delta(A_t\rho + A_x j_x + A_y j_y + A_z j_z) = \rho\delta A_t + j_x\delta A_x + j_y\delta A_y + j_z\delta A_z \tag{4.9}$$
としてよい。また、
$$\int F_{\triangle\square}\partial_\lozenge \delta A_\heartsuit dxdydzdt \tag{4.10}$$
という項は部分積分して
$$-\int(\partial_\lozenge F_{\triangle\square})\delta A_\heartsuit dxdydzdt \tag{4.11}$$
と書き換えること。(部分積分から出る境界項はこういう場合は落としてもよい。)

2. その結果を (4.6), (4.7) と比較し、Maxwell 方程式を導出せよ。皆さんが知っている Maxwell 方程式と係数をあわせるには、C_1, C_2 はどのような値にすべきか?

$|C_1| = \epsilon_0/2$、$|C_2| = 1/(2\mu_0)$ であることはこの問題を選択した人はほぼみなさんできていましたが、問題は符号です。$C_{1,2}$ の符号を両方とも一斉に変えるのは、まあ趣味の問題ではあるので、採点上は気にしていませんが、C_1 と C_2 は逆符号であるというのは重要です。

これは解析力学の一般論からくる話で、非常にいい加減には、
$$[\text{全エネルギー}] = [\text{運動エネルギー}] + [\text{ポテンシャルエネルギー}]$$
一方で
$$[\text{作用}] = \int([\text{運動エネルギー}] - [\text{ポテンシャルエネルギー}])dt$$
となります。ここで、運動エネルギーというのは、時間微分を二回含むところで、ポテンシャルエネルギーというのは時間微分を含まないところ、という意味で使っています。

すると電磁場では $(\epsilon_0/2)(|E_x|^2+|E_y|^2+|E_z|^2)$ が運動エネルギー、$1/(2\mu_0)(|B_x|^2+|B_y|^2+|B_z|^2)$ がポテンシャルエネルギーに相当するので、二つの項のまえの符号は異ならないといけないわけです。

おしまいに、まあ僕の専門でも自然単位系をつかうのではありますが、レポート問題の問題文で ϵ_0, μ_0 と書いているにもかかわらず、レポートの解答の先頭で「自然単位系を使う」と宣言するのはいかがなものかと思いました...

課題 5

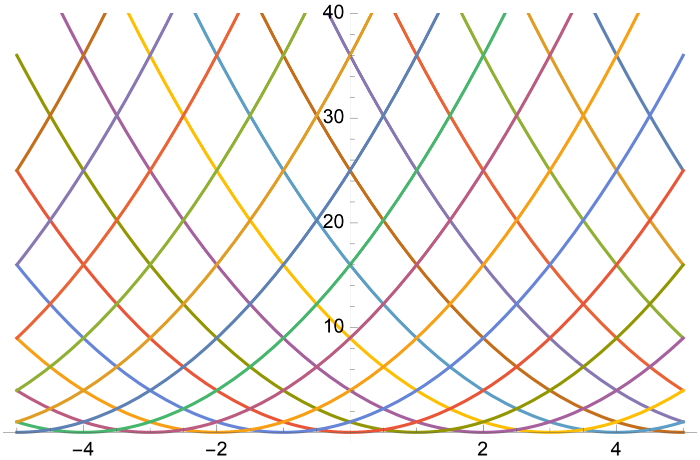
$0 \le x < L$ で $x = 0$ と $x = L$ が周期的につながっているところを動いている量子力学的粒子を考える。質量は m で電荷は q とし、ベクトルポテンシャル A_x と結合しているとき、エネルギー演算子は

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{q}{\hbar}A_x\right)\right]^2$$

で与えられた。簡単のため A_x は x に依存せず定数とし、波動関数は $\psi(x)$ という複素関数で $\psi(x) = \psi(x + L)$ という周期性をみたすものとする。(7/25訂正: 上式で赤字の i が抜けていました。)

1. $\hat{H}$ の固有関数は n を整数として $e^{i2\pi nx/L}$ である。固有値を求めよ。
2. q は $\hbar$ の整数倍だった。簡単のため $q = \hbar$ として、横軸を $LA_x = \int_0^L A_x dx$、縦軸がエネルギー固有値であるようなグラフを、 $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ に対する固有値を同時にプロットしてあらわせ。
3. 円周バンドルの基準切断のとりかえによって $LA_x = \int_0^L A_x dx$ は 2π の整数倍だけずれるが、これは系の物理を次の意味でかえない:「$\hat{H}$ の固有値の集合は LA_x を $\pm 2\pi$ することに対して不変である。」これを確認せよ。この際 n はどうなるか?
4. q が勝手な実数だとして、$\hat{H}$ の固有値の集合が LA_x を $\pm 2\pi$ することによって不変であると要求することから、q が $\hbar$ の整数倍であることを導け。

選択した人はおおむねとけていました。ただし、どういうグラフを書いてほしいかの意図が伝わっていなかったケースがときどきありました。これは僕の表現がわるかったです。横軸を LA_x としたとき、とありましたが、L は固定して、A_x だけ動かして欲しかったわけです。図としては



のようなものを意図していました。グラフは全体としては横に ±1 ユニットずらしても変わりませんが、個々の放物線がそれ自身にうつるわけではないということです。

課題 6

その他、なんでも講義の内容に多少関係ありそうなことなら数ページ程度にまとめてレポートにしてくれても結構です。

課題1を向き付け不可能な閉じた曲面(たとえばクラインの壺など)に拡張してくれた人がいました。また、課題4に関連して、Maxwell 方程式やその作用のローレンツ不変性を調べてくれた人も数人いました。

課題 7

近年大学のレポート問題といえば Wikipedia からコピペをするのが問題になっているようであるが、 Wikipedia に情報を付加するのであれば文句はないだろう。というわけで、日本語もしくは英語もしくはあなたの好きな言語の Wikipedia の、今回の講義に関係しそうな項目について、既存記事を改良するなり、新規記事を書くなりせよ。Wikipedia は特定の編集に関してのリンクを表示することが出来るので、自分の編集がどれかを明記すること。

例年人気のこの課題は今年は選択したのは一人だけでした。時代は流れますね。下の課題 8 はたくさんやってみてくれたひとがいましたが...

課題 8

さらに、直近の話題といえば、Chat-GPT などの AI をつかってレポート問題が解けてしまうのではないかという話がある。今回のこのレポートの問題は AI で解けるだろうか? それについて、いくつか選んで実際にやってみて、レポートしてみるのも面白い。

課題1, 課題3 をやらせてみた人が多数いました。課題 1 は面白いことにやってみた人によって全然出力が違いました、これは僕には予想外でした。(たとえば、日本語ではうまくいかないが英語ではうまくいった、と書いている人もいれば、日本語でもうまく出来ている人もいます。) おおむね、課題 1 をきちんと解けている人ほど Chat-GPT も正しい答えを出しています。課題 1 で微妙に間違えていて、Chat-GPT も同じ間違いをして、AI と答えがあったといって安心している人もいました。

課題 3 はおおむねまっとうそうな出力を出します。かなりの人が「まっとうな答えを出した」とだけ書いていたのですが、ひとり内容を精査してくださった人がいて、(その人への Chat-GPT の解答に関しては)正しくない情報もあんがい混じっていたとのことでした。

有用なツールですが、使い方には注意が必要ですね!