混成弦・II 型弦双対性の一側面

立川　裕二

1. はじめに

超弦理論は、その三十年弱の歴史の間に数学の新しい方向をいろいろと示唆してきました。そのような事が可能であった根本は、超弦理論の双対性にあります。超弦理論とは、数学的には、与えられた 10 次元時空に対して、弦の結合定数と呼ばれる正の実数 g を 1 パラメタにもつ量子系を与える手続き $P(g)$ として定式化されるべきものです:

$$\begin{array}{ccc} \{10\text{ 次元多様体} + \alpha\} & \to & \{\text{ 量子系 }\} \\ X & \mapsto & P(g)[X]。\end{array} \tag{1}$$

パラメタ g は、単位時間あたりに弦が二つに千切れる確率を決めていると思ってくだされば良いでしょう。g が小さいと弱結合、g が大きいと強結合と呼ばれます。この手続き P がどのような条件を満たすべきかは数学的に厳密には書き下されていませんが、弦理論の研究者が矛盾に出くわすことなく仕事ができる程度には理解されています。80 年代半ばの重要な結果は、このような手続きには五種類（IIA 型、IIB 型、I 型、$SO(32)$ 混成、$E_8 \times E_8$ 混成）があり、それに尽きるということです。これらを P_{IIA}、P_{IIB}、P_{I}、$P_{SO(32)}$、$P_{E_8\times E_8}$ と書くことにしましょう。これらは正確には 10 次元多様体 X に対して定義されるものですが、X の次元 d が 10 以下の場合も、$\mathbb{R}^{10-d} \times X$ を考えられますので、そのような場合は以下簡単のため

$$P(g)[X] = P(g)[\mathbb{R}^{10-d} \times X] \tag{2}$$

と定義することにしましょう。

80 年代後半には、異なる多様体 M、W に対して対応する量子系が同じになる、すなわち

$$P_{\mathrm{IIA}}(g)[M] = P_{\mathrm{IIB}}(g)[W] \tag{3}$$

となることがしばしば起こることが判りました。量子系はとても沢山の情報を含んでおり、その中からいろいろな内容を取り出す事が出来ます。それらを、空間 X に対して一般に $A(X)$、$B(X)$ と書くことにします。簡単な場合では $A(X)$ は X の体積、$B(X)$ は X の形の歪みの尺度と思えばいいでしょう。そうすると、上式の結果として、

$$A(M) = B(W) \tag{4}$$

なる関係式が従います。これを追求して 90 年代初頭に得られたものがいわゆるミラー対称性で、数理科学誌にもこれまで何度も解説がありましたし、今号にも載っています。異なる空間 M、W で異なる量 A、B を計算すると何故か同じになってしまうのですから、数学者が驚いたのもむべなるかな。同様に多様体 X、Y を適切に選べば、二種の混成弦理論が一致することも判明しました:

$$P_{SO(32)}(g)[X] = P_{E_8\times E_8}(g)[Y]。 \tag{5}$$

関係 (3)、(4) は弦理論では T-双対と呼ばれますが、ミラー対称性と同義だと思ってくださって結構でしょう。

超弦理論は 90 年代半ばに更なる進展がありま

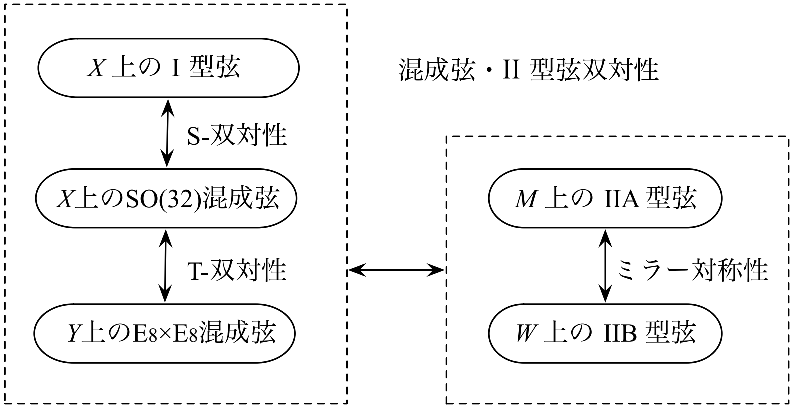

図 1　超弦理論の双対性の網

したが、その第一は S-双対性とよばれる以下の関係式です:

$$P_{SO(32)}(g)[X] = P_{\mathrm{I}}(g^{-1})[X]。 \qquad (6)$$

関係 (3)、(4) との大きな違いは、空間 X が両辺で同じであるかわりに、結合定数 g が左辺と右辺で逆数になっている点です。弦理論では通常 $P(g)$ は g に関する冪展開でしか計算できませんから、このように逆冪による展開が可能であるというのは大きな衝撃でした。強結合と弱結合を入れ替えるので、この関係式は強弱双対性と呼ばれます。対して、関係式 (3)、(4) は弱弱双対性とも呼ばれます。さらに、混成弦・II 型弦双対性と呼ばれる関係式も発見されました:

$$P_{E_8\times E_8}(g)[Y] = P_{\mathrm{IIB}}(g')[W]。 \qquad (7)$$

ここに至りますと、両辺の結合定数 g、g' の関係は多様体 Y 及び W の情報に依存するため、一言では表すことが出来ません。以上の関係式 (3)、(5)、(6)、(7) を組合わせると、五種の弦理論が適切に時空と結合定数を選ぶと量子系として等しくなるという結論になります。これが所謂「弦理論の双対性の網」です。図 1 を参照ください。

さて、ミラー対称性 (4) は数学者を魅了して二十年になろうとしますが、弦理論の立場からは、それは弱弱対称性 (3) であり、両辺を冪展開して各項の一致を見ているに過ぎません。ですから、$P(g)$ の g 依存性の全体が問題となる 90 年代半ばの S-双対性及び混成弦・II 型弦双対性からは、ミラー対称性より格段に深い数学的事実が取り出されて然るべきです。しかし、嘆かわしいことに、数学者の間で混成弦・II 型弦双対が膾炙しているようには見えません。これは、数学者がミラー対称性が十分に面白いので満足してしまっているのもありましょうし、また、弦理論屋のほうが、90 年代半ば以降の発展があまりに急速であったため、時間を取って数学者に説明をするのを怠ってきたのもありましょう。以下では、混成弦・II 型弦双対性をもう少し詳細に解説したのち、そこから取り出せる数学的問題の非常に簡単な例を記述して、微力ながらもこの社会学的問題の解決の一助となればと願います。2012 年現在、弦理論の大発展は一段落していますので、この問題を解消するのに丁度良い時期なのでは無いかと思っています。

2. 混成弦・II 型弦双対性

では、この双対性についてもうすこし詳しく見たいと思います。まず、一般に弦理論を考える際に、X として本当に数学的に多様体だけを与えられたのでは情報が足りません。まずは、X 上で長さを測る為にリーマン計量 G_X が必要です。計量があると長さが測れるだけでなく、ある点 p での接ベクトルを他の点 q まで平行移動することが出

来ます。更に、$SO(32)$ 混成弦理論及び I 型理論の場合は、X 上の $SO(32)$ ゲージ場、数学的には X 上の $SO(32)$ 束の接続が、$E_8 \times E_8$ 混成弦理論の場合は同様に Y 上の $E_8 \times E_8$ ゲージ場が必要です。これらゲージ場/接続を A と書きましょう。$SO(32)$ の接続 A とは、ある点 p で与えられた 32 次元実ベクトルを、他の点 q まで平行移動するルールを与えるものです。これらの情報が、式 (1) の左辺につけておいた $+\alpha$ で表したかったもので、双対性 (7) などは、もう少し性格には

$$P_{E_8 \times E_8}(g)[Y, A] = P_{\mathrm{IIB}}(g')[W] \qquad (8)$$

などと書くべきものです。但し、式があまり煩雑になりますから、Y だけでリーマン多様体 (Y, G_Y) を表すことにしました。この式をみると、右辺に比べて左辺のほうに情報が多すぎるのが気になります。実はそうでないことを説明する為に、リーマン多様体 X に対してそのホロノミー群を次のように定義します。

ある点 p で接ベクトル v を取り、これを p から出て p に戻る曲線 C 上で平行移動して戻しますと新たな接ベクトル $w = M_C v$ になります。平行移動は長さを保ちますから、X が d 次元とすると、M_C は d 次元の直交行列、すなわち $SO(d)$ の元になりますので、全ての C について M_C を考えると、$SO(d)$ の部分群 H を定めます、これをホロノミー群といいます。これは一般には $SO(d)$ そのものですが、X の計量によっては、小さくなりえます。例えば、X が完全に平坦なら、平行移動しても v は全く変わりませんから $M_C = 1$、よって自明な部分群 $H = \{1\}$ がホロノミーになります。また、$d = 2n$ ですと $H = SU(n) \subset SO(2n)$ になることがあり、これをカラビ=ヤウ多様体、$d = 4m$ ですと $H = Sp(m) \subset SO(4m)$ となるものがあり、これをハイパーケーラー多様体と言います。$H = 1$ なら完全に平ら、$H = Sp(d/4)$ なら 1/4 だけ曲がっている、$H = SU(d/2)$ だと半分だけ曲がっている、と思ってもいいかもしれません。これらを特殊ホロノミー多様体といいます。

これで、関係 (8) に戻ることができます。一般に、Y のホロノミー群は M のホロノミー群より小さくないといけないのです。ある意味、Y の計量の曲がりの情報が M の計量の曲がりの情報より少ないので、その分がゲージ場の接続の情報に化けていると思うことができます。例えば、Y が四次元のトーラス T^4 で完全に平坦である場合、M は四次元のハイパーケーラー多様体で $K3$ と呼ばれるものになります。また、ミラー対称性でもっとも典型的な場合の、M が実 6 次元カラビ=ヤウ多様体である場合、Y は $T^2 \times K3$ という積であることが知られています。しかし Y には計量だけでなく、接続 A も M の計量に対応して決まっているわけです。

ミラー対称性の場合では、多様体 M に対してそのミラー W をどう決定するかが第一の問題ですが、この解決には長足の進歩があります。対応して、混成弦・II 型弦双対性の場合には、与えられた (Y, A) に対して W をどう決定するかが基本的問題です。(Y, A) の組の中でもなるべく簡単なものを考えますと、さらに問題は簡略化され、次の二つの問題を解くのが第一歩であることが知られています: 問題 **1**. 群 G を与えた際に、対応する実四次元の W を探すこと。問題 **2**. 群 G とその表現 R の組を与えた際に、対応する実六次元の W を探すこと。弦理論の双対性の一般論から、これらの問題には解があることが保証されています。実際、問題 1 は、超弦理論以前、70 年代には数学で知られていた、群と幾何学の非常に美しい関係そのものです。ですから、問題 2 の背後にも自然な美しい数学があると筆者は信じていますが、一般的な解決にはまだ遠いようです。以下、次の節でまず問題 1 について解説した後、その次の節で問題 2 の解の実例を数個紹介したいと思います。

3. 群 $\boldsymbol{G}$ に対して幾何を決めること

まず群 $GL(N)$、すなわち行列式がゼロでない $N \times N$ 行列のなす群を考えます。対応するリー環 $\mathfrak{gl}(N)$ は勝手な $N \times N$ 行列全体です。対角行列 $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_N)$ の $X \in \mathfrak{gl}(N)$ への作用

$$X \mapsto [a, X] \tag{9}$$

の固有状態が何かを考えましょう。これは簡単で、E_{ij} を i 行 j 列のみが 1 で他の要素が 0 の行列とすると、

$$[a, E_{ij}] = (a_i - a_j)E_{ij} \tag{10}$$

となるので、E_{ij} が固有ベクトルになります。a がなるべく一般の元であれば、固有値がゼロの元は N 個で、他の固有値 $a_i - a_j$ は全て非ゼロです。ですから、$a_i = a_j$ となる場合の a はある意味特殊であるわけです。

$g \in GL(N)$ は $X \in \mathfrak{gl}(N)$ に自然に作用します

$$X \mapsto gXg^{-1}。\tag{11}$$

特に g として $i \neq j$ に対して $M_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ とすれば、対角行列に作用させて a_i と a_j を入れ替えることができます。ですから、$a_1, \ldots, a_N$ の置換で不変なものを考えることにしましょう。そのためには、a_i から作った基本対称式 $u_1, \ldots, u_N$、更にそれをまとめた多項式 $P(z)$ を考えるのが便利です:

$$\begin{aligned} P(z) &= \prod_{i=1}^{N}(z - a_i) \\ &= z^N + u_1 z^{N-1} + \cdots + u_N。 \end{aligned} \tag{12}$$

いつ $a_i = a_j$ となるかは、この言葉では、いつ $P(z)$ が重根を持つか、ということですから、

$$P(z) = P'(z) = 0 \tag{13}$$

と表せます。さて、群 $GL(N)$ に対応する幾何 W は、答えを言ってしまいますと、

$$W_{GL}(x, y, z) = -x^2 + y^2 + P(z) = 0 \tag{14}$$

です。但し、$(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ は三つの複素数とします。方程式が一つあるので、複素二次元、実四次元の超曲面になります。幾何と群の対応は、「超曲面 W に特異点があるとき、またその時のみ、a の作用 (10) のゼロ固有値の数が増える」というものです。これはすぐに確認できます。なぜなら、超曲面に特異点がある条件は (14) かつ

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{15}$$

ですが、x 微分と y 微分は単に $x = y = 0$ とするだけで、実質 (13) になります。

次に群 $SO(2N)$、すなわち行列式が 1 で $gg^T = 1$ なる $2N \times 2N$ 行列全体のなす群を考えます。対応するリー環 $\mathfrak{so}(2N)$ は $2N \times 2N$ 反対称行列のなすリー環です。$\mathfrak{gl}(N)$ の場合の対角行列に相当するのは、$a = (h_{ij})$ 但し

$$h_{2i-1,2i} = -h_{2i,2i-1} = \sqrt{-1}a_i、\tag{16}$$

その他の要素はゼロ、としたものです。これについて (10) と同様に $[a, X]$ の固有値問題を考えますと、非ゼロ固有値は $\pm a_i \pm a_j$ 但し $i \neq j$、として与えられます。ですから、$a_i = \pm a_j$ のときにゼロ固有値の数が増えます。$SO(2N)$ による作用 (11) を考えますと、a_i の置換および偶数個の a_i に負号を付けることができますので、$GL(N)$ の場合の基本対称式に相当するものは、a_i^2 から作った基本対称式 $v_1, \ldots, v_N$

$$\begin{aligned} Q(z) &= \prod_{i=1}^{N}(z + a_i^2) \\ &= z^N + v_1 z^{N-1} + \cdots + v_N \end{aligned} \tag{17}$$

および $w_N = a_1 a_2 \cdots a_N$ です。対応する幾何としては、安直には $x^2 + y^2 + Q(z) = 0$ を取りたいところです。しかし、これが特異点を持つ条件を調べると、異なる i、j に対しての $a_i = \pm a_j$ だけでなく、当然ですが $a_i = 0$ も得られてしまいます。正しくは、

$$\begin{aligned} W_{SO}(x, y, z) = &-zy^2 - x^2 + z^{N-1} \\ &+ v_1 z^{N-2} + \cdots + v_{N-1} + 2w_N y \end{aligned} \tag{18}$$

とすればよいことが知られています。この W に対して条件 (15) を調べると、丁度 $a_i = \pm a_j$ が得られるのは良い練習問題ですから、是非やってみてください。

超曲面 (14)、(18) のように群に対応する幾何は

例外群 $E_{6,7,8}$ についても書き下すことが出来ます、具体形はこの号の渡利さんの記事にあるでしょうからそちらをご覧下さい。これの超曲面 $W_G = 0$ は数学では 19 世紀から知られており、クライン型特異点とよばれますが、これらが上記の通り群と対応しており、またここでは説明しませんでしたが対応する群の構造から自然に構成できるのは Brieskorn と Slodowy による著名な結果[1,2] です。また、これらの超曲面に自然にハイパーケーラー計量が入ることも後に示されました[3]。そこで、IIA 型弦理論をこれら超曲面 $W_G = 0$ 上で考えることができますが、混成弦・II 型弦双対性によって T^4 上の混成弦理論に移すことができます。この際ゲージ接続 A のホロノミーと可換な $E_8 \times E_8$ の部分群が丁度 G となり、そのため低エネルギー理論にゲージ群 G が生じる、というのが Witten の画期的な論文[4] によって明らかにされたことの一つです。

4. 群 G と表現 R に対して幾何を決めること

さて、作用 (9) はリー環の自分自身への作用でしたから、もっと一般に、他の既役表現への作用を考えてみましょう。例えば、N 次元ベクトルのなす表現 $V = \mathbb{C}^N$ に対して、$\mathfrak{gl}(N)$ の対角行列 $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_N)$ の自然な作用を考えます。すると、当然ですが、固有値は a_i です。一つ数 m を固定して、いつ $a_i = m$ となるかを考えましょう。これは、多項式 $P(z)$ を用いては、$P(m) = 0$ と表せます。これを実現する幾何はどうすればよいでしょうか？今回は四変数 $(t, x, y, z) \in \mathbb{C}^4$ に対し、

$$\widetilde{W} = t(z - m) + W_{GL}(x, y, z) = 0 \quad (19)$$

という式を課します。これが特異点を持つ条件

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} = \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial z} = 0 \qquad (20)$$

を調べますと、丁度 $a_i = m$ となります。これを、複素三次元の超曲面 $\widetilde{W} = 0$ が $GL(N)$ の表現 V に対応する、ということとします。物理的には、この超曲面上で IIB 型弦理論を考えると、混成弦・II 型弦双対によって混成弦側に表現 V で変換し質量が m である物質場が生ずる、ということになります。また、ほぼ同等ですが、G とその表現 V に対し上記の意味で対応する超曲面を決定することは、ゲージ群が G で物質場の質量が m、表現が V であるような $\mathcal{N} = 2$ 超対称ゲージ理論を Seiberg-Witten の意味で解くことである[5,6]、ということもできます。

次に、$G = SO(2N)$ に対し、$2N$ 次元ベクトルのなす表現 V' を考えましょう。対角行列に相当するのは (16) で定まる行列でしたから、これの作用の固有値を調べると、$\pm a_i$ であることがすぐに判ります。条件 $m = \pm a_i$ をどのような幾何で表せばよいかと考えますと、

$$t(z + m^2) + W_{SO}(x, y, z) = 0 \qquad (21)$$

を選べば丁度良いことが計算をすればすぐに確かめられます。一般に、群 G と表現 R に対し、対応する幾何は

$$\widetilde{W} = tX_R(x, y, z) + W_G(x, y, z) = 0 \quad (22)$$

という形をしているはずであることが双対性を詳しく調べると判りますので、問題は X_R を決定することです。上記の議論より、$X_V = x - m$、$X_{V'} = x + m^2$ ですが、他の群、他の表現に対してはどうなるでしょう。

残念ながら、現時点では、沢山の表現 R について X_R は知られている、ということしか出来ません。それらの X_R は、各 R に対して個別に、弦理論や場の理論の双対性を駆使して、多大な労力を費やして 90 年代後半に決定されました。一度決定されてしまえば、それらを (22) に代入し、(20) を調べるのは機械的な作業ですが、その結果が丁度 $m = (a$ の作用の固有値 $)$ となるのは、混成弦・II 型弦双対性から保証されているとはいえ、弦理論屋にとっても不可思議なことです。これは前節で述べた、群とクライン特異点の対応のある意味非常に愚直かつ自然な拡張になっていると思われるので、数学で既に知られていても良さそうなも

のですが、筆者が数学者に聞いてみた限りでは知られていないようでした。この記事をご覧になった読者の方が何かご存知であれば、是非筆者までお知らせ願えればと思います。

おしまいに、X_R の非自明な例を一つみてみましょう。群として $G = SL(6)$ を取ります。これは $GL(6)$ の部分群で行列式を 1 としたもの、対角行列 $a = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_6)$ では対応して $u_1 = a_1 + \cdots + a_6 = 0$ ととったものです。表現として $R = \wedge^3 V \ni (v_{ijk})$ 、但し $i, j, k = 1, \ldots, 6$ で i, j, k について完全反対称なものを取りましょう。$\dim R = 20$ です。a の作用の固有値は互いに異なる i, j, k に対して $a_i + a_j + a_k$ で、二十個あります。ですから、

$$D(m) = \prod_{\text{異なる } i,j,k} (a_i + a_j + a_k - m) = 0 \quad (23)$$

が特異点が出る条件であるような X_R が欲しいわけですが、これは知られているものの非常に複雑です。もうすこし簡単にするため、i, j, k, p, q, r が全て異なれば

$$a_i + a_j + a_k = -(a_p + a_q + a_r) \quad (24)$$

であることから、$D(0) = \Delta^2$、但し

$$\Delta = \prod_{j \neq k} (a_{i=1} + a_j + a_k) \quad (25)$$

となることを使って、特異点が出る条件が $\Delta = 0$ であるような超曲面を探しましょう。これは物理的には、表現 R が擬実であるため、質量 m がゼロだと半物質場と呼ばれるものを導入できることに対応しています。

超曲面を

$$0 = \tilde{W} = tX_{R/2} + W_{SL(6)} \quad (26)$$

と書きますと、答えは

$$X_{R/2} = 2z^3 + u_2 z + u_3 + 2x \quad (27)$$

です。但し、$W_{SL(6)}$ は (14) で $u_1 = 0$ とおいたものです。特異点のある条件 (20) を実際しらべましょう。まず、y 微分は単に $y = 0$ です。以下 y は無視できます。次に、x 微分から $t = x$。t 微分から $X_{R/2} = 0$、すなわち $x = -S(z)/2$ 但し $S(z) = 2z^3 + u_2 z + u_3$。これより、残った条件は $\widetilde{W} = \partial \widetilde{W}/\partial z = 0$ は

$$\widetilde{W} = P(z) - (S(z)/2)^2 \quad (28)$$

が z のみの多項式として重根をもつ条件ですが、左辺を計算してみますと実は z の二次式であることがわかります。よって、その判別式 δ は簡単に計算できて、

$$\delta = u_5^2 - 4u_4 u_6 + u_3^2 u_4 + u_2^2 u_6 - u_2 u_3 u_5 \quad (29)$$

となります。これが実際 (25) に等しいことは数式処理ソフト等をつかって展開すればすぐ確認できます。しかし、筆者には数学的にどのようにして $R = \wedge^3 V$ から $X_{R/2}$ に至るべきかは皆目見当がつきません。その他、各種の R についての X_R は文献[6] の付録に列挙してありますので、どうぞ興味を持った方は実際に確認し、X_R を導出する方法を考えてくださると幸いです。

参考文献

1) E. Brieskorn, "Singular elements of semi-simple algebraic groups," in *Actes du Congrès International des Mathématiciens 1970, Tome 2*, pp. 279–284. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
2) P. Slodowy, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*, vol. 815 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.
3) P. B. Kronheimer, "The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients," J. Differential Geom. **29** (1989) 665.
4) E. Witten, "String Theory Dynamics in Various Dimensions," Nucl. Phys. B **443** (1995) 85 [arXiv:hep-th/9503124].
5) S. Terashima and S. K. Yang, "Seiberg-Witten Geometry with Various Matter Contents," Nucl. Phys. B **537** (1999) 344 [arXiv:hep-th/9808022].
6) Y. Tachikawa and S. Terashima, "Seiberg-Witten Geometries Revisited," JHEP **1109** (2011) 010 [arXiv:1108.2315 [hep-th]].

（たちかわ・ゆうじ，東京大学理学系研究科物理学専攻）