幾何学II試験問題

担当: 中島 啓

2001年2月2日 (金) 9:30〜10:50

問題 1 C^∞ 級多様体 (微分可能多様体) の定義を書け.

問題 2 M, N を C^∞ 級多様体とする.
写像 $F\colon M \to N$ が**微分同相**であるとは, F は全単射であり, F もその逆写像 F^{-1} も C^∞ 級であるときを言う.
M と N の間に微分同相写像 $F\colon M \to N$ が存在するとき, M と N の次元が同じであることを証明せよ.

問題 3 一次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^1$ を考える. 同次座標 $[z_0 : z_1]$ を導入し, $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ とおく. このとき, 写像 $U_0 \ni [z_0 : z_1] \mapsto z_1/z_0 \in \mathbf{C}$ は, U_0 と $\mathbf{C}$ との間の微分同相写像である. また, $\mathbf{C}P^1 \setminus U_0$ は一点 $[0 : 1]$ からなる. (これらは証明しなくてよい.)
$\mathbf{C}$ 上のベクトル場 X を

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

で定める. ただし, $z = x + iy$ として (x, y) を $\mathbf{C}$ の座標と考えた. このベクトル場 X が上の写像を通じて $\mathbf{C}P^1$ 上のベクトル場 $\widetilde{X}$ に拡張されることを証明し, また, そのベクトル場の値 $\widetilde{X}_p$ が 0 になる点 p を全て求めよ.

問題 4 二次元球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ を考える. 包含写像を $i\colon S^2 \to \mathbf{R}^3$ とする.
(1) $i^*(dx \wedge dy \wedge dz)$ を求めよ.
(2) $i^*(dx)$ の値が 0 になる球面の点を全て求めよ. すなわち, $\alpha = i^*(dx)$ とおいたときに, $\alpha_p = 0$ となるような $p \in S^2$ を全て求めよ.