幾何学II冬休みの宿題

担当: 中島 啓

2000年12月22日(金)

以下の問題は, 全て基本的な問題であり, 授業で説明した内容が理解できているかどうかを確認するためのものである. 従って, ノートを見直すか, もしくは教科書を参考にすれば全て容易に解けるはずである.

問題 1 微分可能多様体の定義を述べよ. 定義が覚えられないときには, 定義をノートに10回書き写せ.

問題 2 実二次元射影空間 $\mathbf{R}P^2$ を $\mathbf{R}^4$ の中に前期の意味での多様体として実現せよ.

問題 3 複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ にしかるべく位相を導入し, ハウスドルフ空間であることを証明し, さらに微分可能多様体であることを証明せよ.

問題 4 前期の意味の $\mathbf{R}^n$ の部分集合の多様体の概念を一般化し, 多様体 M の部分集合 S が**部分多様体**であることを定義せよ. また, その部分多様体が多様体であることを証明し, 包含写像 $i\colon S \to M$ が埋め込み写像であることを証明せよ.

問題 5 一次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^1$ を考える. 同次座標 $[z_0 : z_1]$ を導入し, $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$ とおく. このとき, 写像 $U_0 \ni [z_0 : z_1] \mapsto z_1/z_0 \in \mathbf{C}$ は, U_0 と $\mathbf{C}$ との間の微分同相写像である. また, $\mathbf{C}P^1 \setminus U_0$ は一点 $[0 : 1]$ からなる. このとき, 多項式写像

$$f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}; z \mapsto z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$$

を上の微分同相を通じて U_0 から U_0 への写像と見なす. この写像が $\mathbf{C}P^1$ から $\mathbf{C}P^1$ への C^∞ 級写像に拡張されることを示せ.

問題 6 後期に定義した多様体の接空間と, 前期の $\mathbf{R}^n$ の部分集合の多様体の接空間が同じものであることを証明せよ.

問題 7 上の問題4で拡張された写像 $f\colon \mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^1$ について $df_p\colon T_p\mathbf{C}P^1 \to T_p\mathbf{C}P^1$ を計算し, これが同型写像でない点を全て決定せよ.

問題 8 閉区間 $[0,1]$ の両端をしかるべく貼りあわせて出来た二次元トーラス $T^2 = [0,1] \times [0,1]/\sim$ を考える. このとき $f\colon T^2 \to T^2$ を $(x,y) \mapsto (2x,2y)$ で定義する. ただし, $(2x,2y)$ が $[0,1] \times [0,1]$ をはみ出てしまうときは $2x$, $2y$ から1を引いて中に入るように直すものとする. (もしくは, $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ と定義してやってもよい.) このとき f は C^∞ 級写像であること, その微分 df_p は全ての p に対して同型写像であること, しかし f 自身は逆写像を持たないことを証明せよ.

問題 9 $f\colon M \to N$ を多様体の間の写像とする．$y \in N$ を取る．全ての $x \in f^{-1}(y)$ に対して，f の x での微分 $df_x\colon T_xM \to T_yN$ が全射であったとする．このとき $f^{-1}(y)$ は問題 3 の意味で部分多様体であることを証明せよ．

問題 10 ベクトル場 X と C^∞ 級関数 f について，fX と Xf は何か，きちんと区別して理解せよ．

問題 11 問題 4 のように $\mathbf{C}P^1$ と $U_0 \cong \mathbf{C}$ を定める．$\mathbf{C}$ 上のベクトル場 X を

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

で定める．ただし，$z = x + iy$ として (x, y) を $\mathbf{C}$ の座標と考えた．このベクトル場 X が $\mathbf{C}P^1$ 上のベクトル場 $\widetilde{X}$ に拡張されることを証明し，また，そのベクトル場の値 $\widetilde{X}_p$ が 0 になる点 p を全て求めよ．

問題 12 二次元トーラス T^2 上に $X = \frac{\partial}{\partial x}$ はベクトル場を定めることを証明せよ．ただし x は $[0,1] \times [0,1]/\sim$ の第一成分の実数である．さらに，その積分曲線を決定せよ．

問題 13 ベクトル場 X, Y, Z に対して，ヤコビの恒等式

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

を証明せよ．

問題 14 微分形式とは何か？ 定義を覚えよ．

問題 15 $\mathbf{R}^{2n}$ 上の二次微分形式 $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$ について，$\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n\text{ 個}}$ を計算せよ．

問題 16 $\mathbf{R}^3$ において一次微分形式 $\alpha = f dx + g dy + h dz$ と二次微分形式 $\beta = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$ のそれぞれの外微分 $d\alpha$, $d\beta$ を計算せよ．また，ベクトル解析や電磁気学でやったかもしれない div, rot との比較をせよ．

問題 17 $F\colon M \to N$, $G\colon N \to O$ を多様体の間の C^∞ 級写像とする．$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$, $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ を証明せよ．

問題 18 $\mathbf{R}^2$ から x 軸の非負の部分を除いた開集合 $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid$「$y = 0$ かつ $x \geq 0$」ではない $\}$ を考える．U に二通りの座標 (x, y) と (r, θ) を入れる．ただし，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(0 < r < \infty,\ 0 < \theta < 2\pi)$ である．このとき，微分形式 dx, dy と dr, $d\theta$ の間の変換式を計算せよ．

問題 19 二次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考える．包含写像を $i\colon S^2 \to \mathbf{R}^3$ とする．

(1) $i^*(dx \wedge dy \wedge dz)$ を求めよ．

(2) $i^*(dx \wedge dy)$ の値が 0 になる球面の点を全て求めよ．

問題 20 問題 4 のように $\mathbf{C}P^1$ と $U_0 \cong \mathbf{C}$ を定める．$\mathbf{C}P^1$ 上の二次微分形式 α を U_0 に制限し, $\mathbf{C}$ の座標 $z = x + iy$ を用いて表わしたものを $f dx \wedge dy$ とする．このとき

$$\int_{\mathbf{C}P^1} \alpha = \int_{\mathbf{C}} f dx \wedge dy$$

を証明せよ.

問題 21 $c\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ を平面曲線とし, 自己交叉がなく像は部分多様体になっているものとする．このとき一次微分形式 $\alpha = f dx + g dy$ にたいし, 積分

$$\int_{c(\mathbf{R})} \alpha$$

が

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f \frac{dx}{dt} + g \frac{dy}{dt} \right) dt$$

に等しいことを証明せよ．そこでは, $c(\mathbf{R})$ の向きはどのように入れられたか？