幾何学II試験講評

担当: 中島 啓

September 27, 2001

問題 1 ほとんどのものが, 多様体の定義を書けていた. しかし, '座標系' という言葉だけ書いて, どういう性質を持つのか (多様体の開集合と $\mathbf{R}^n$ の開集合の間の同相写像であること) を書いていないものが若干みられた.

問題 2 正解は次の通り: まず, F の微分 $dF_p\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ は線形空間の間の同型写像である. 実際, 逆写像は $d(F^{-1})_{F(p)}$ である. よって $\dim T_pM = \dim T_{F(p)}N$ であり, 多様体の次元は接空間の線形空間としての次元に等しいから, $\dim M = \dim N$ が成り立つ.

この問題は, かなり出来が悪い. $\mathbf{R}^m$ の開集合と $\mathbf{R}^n$ の開集合の間に微分同相写像があるので, $m = n$ と単純に結論をしてしまったものが多数見られたが, この場合でも上のように議論しなければ正解とは言えない.

問題 3 正解は次の通り: $U_1 = \{[z_0 : z_1] \mid z_1 \neq 0\}$ とおき, 座標 $U_1 \ni [z_0 : z_1] \mapsto z_0/z_1 = x' + iy' \in \mathbf{C}$ を取る. このとき, $U_0 \cap U_1$ において, ベクトル場の座標変換の公式から

$$X = -x'\frac{\partial}{\partial x'} - y'\frac{\partial}{\partial y'}$$

が成り立つ. ($x' = \frac{x}{x^2+y^2}$, $y' = \frac{-y}{x^2+y^2}$ を微分すればよい.) これは, $(x', y') = (0, 0)$, すなわち $[0 : 1] \in \mathbf{C}P^1$ まで C^∞ 級に拡張されている. また, 0 になるのは $[1 : 0]$ と $[0 : 1]$ である.

ベクトル場の座標変換の公式が理解できていないものが多数見られたのは残念である.

問題 4 正解は次の通り: (1) S^2 は二次元だから三次以上の微分形式は 0 になる. よって $i^*(dx \wedge dy \wedge dz) = 0$ である.

(2) $X \in T_pS^2$ とすると, $\alpha_p(X) = i^*(dx)(X) = dx(i_*X)$ は, X を $\mathbf{R}^3$ のベクトルと思ったときの x 成分に他ならない. よって, $\alpha_p(X)$ が全ての $X \in T_pS^2$ について 0 となるのは, 接空間 T_pS^2 が x 軸と直交しているところである. よって, $p = (\pm 1, 0, 0)$ である.

三角関数を使った座標 (例えば, $(\theta, \varphi) \mapsto (\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \cos\theta)$ を使って計算をしているものがいたが, この場合は $\theta = 0, \pi$(つまり $(0, 0, \pm 1)$) で写像がつぶれていて座標ではないので, (θ, φ) の範囲をきちんと指定してやる必要がある. その場合, 一つの座標で S^2 を覆うことができないので, 複数の座標を取って計算する必要がある. これがきちんとできていないものが多かった. このやり方では範囲をきちんと指定しないと上記以外の p でも $\alpha_p = 0$ となってしまう答えが出る可能性がある.