幾何学I試験問題

担当: 中島 啓

2001 年 9 月 14 日 (金) 10:40〜12:00

問題 1 逆関数定理の主張を正確に記せ．ただし証明は与える必要はない．必要な条件は漏らさずに書くこと．

問題 2 $f\colon [0,2\pi)\times(-1,1)\to\mathbf{R}^3$ を

$$f(u,v)=2\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}\sin(-u/2)\cos u\\ \sin(-u/2)\sin u\\ \cos(-u/2)\end{pmatrix}$$

とおく．f の像をメビウスの帯という．メビウスの帯が ($\mathbf{R}^3$ に埋め込まれた) 多様体であることを証明せよ．

問題 3 $F\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ は C^∞ 級関数で, $M=F^{-1}(0)$ とする．F の微分 $DF=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$ は, M 上で決して 0 にはならず, よって M は多様体になっていると仮定する．$f\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ は C^∞ 級関数であるとする．$x\in M$ で f の M への制限が最大値を取るとする．すなわち, すべての $y\in M$ について, $f(y)\le f(x)$ が成り立つとする．このとき x において Df は DF の定数倍であることを証明せよ．(すなわち, Lagrange の未定常数法を証明せよ.)

問題 4 二次元球面 $S^2=\{(a,b,c)\in\mathbf{R}^3\mid a^2+b^2+c^2=1\}$ の 北極からの立体射影 $\varphi\colon S^2\setminus\{(0,0,1)\}\to\mathbf{C}$

$$\varphi(a,b,c)=\frac{a}{1-c}+i\frac{b}{1-c}$$

を考える．(i は虚数単位.) φ が全単射であることは断りなしに使ってよい．複素数係数の n 次多項式 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ ($n\ge 1$, $a_i\in\mathbf{C}$, $a_n\ne 0$) に対して, 写像 $\widetilde{f}\colon S^2\to S^2$ を

$$\widetilde{f}(x)=\begin{cases}\varphi^{-1}\circ f\circ\varphi(x) & x\text{ が北極でないとき}\\ \text{北極} & x\text{ が北極のとき}\end{cases}$$

で定義する．

(1) $\widetilde{f}$ が C^∞ 級写像であることを証明せよ．

(2) 北極が $\widetilde{f}$ の臨界点であるための必要十分条件を求めよ．