幾何学I 追試問題解答

担当: 中島 啓

問題 1. 略

問題 2. (解答例 1) $g\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ を

$$g(s,t) = \begin{pmatrix} (2+\cos s)\cos t \\ (2+\cos s)\sin t \\ \sin s \end{pmatrix}$$

で定義すると, $g(\mathbf{R}^2) = M$ となっている.

$$\begin{aligned}
U_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y) \text{ は第一, 第二, 第三象限のいずれか}, z > -1/2\} \\
U_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y) \text{ は第一, 第二, 第三象限のいずれか}, z < 1/2\} \\
U_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y) \text{ は第一, 第三, 第四象限のいずれか}, z > -1/2\} \\
U_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y) \text{ は第一, 第三, 第四象限のいずれか}, z < 1/2\}
\end{aligned}$$

とおく. ただし, それぞれの集合のはじは取り除いておく. すると, g の制限

$$\begin{aligned}
(-\pi/6, 7\pi/6) \times (0, 3\pi/2) &\to U_1 \cap M \\
(5\pi/6, 13\pi/6) \times (0, 3\pi/2) &\to U_2 \cap M \\
(-\pi/6, 7\pi/6) \times (\pi, 5\pi/2) &\to U_3 \cap M \\
(5\pi/6, 13\pi/6) \times (\pi, 5\pi/2) &\to U_4 \cap M
\end{aligned}$$

がそれぞれ同相写像となることは明らかである. 微分はどこで計算しても同じなので, $Dg(s,t)$ が $\mathbf{R}^2$ のいたるところ単射であることを示せばよい.

$$Dg(s,t) = \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s,t), \frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\right) = \begin{pmatrix} -\sin s\cos t & -(2+\cos s)\sin t \\ -\sin s\sin t & (2+\cos s)\cos t \\ \cos s & 0 \end{pmatrix}$$

である. $Dg(s,t)$ が単射でないとすると, 第一列と第二列のベクトルは平行になる. これが決してあり得ないことは容易にチェックできる.

注. 5 月 18 日の講義で述べた多様体の定義と同値な条件の (1) において, 'g は V と $U \cap M$ の間の同相写像' という条件を付け加える. この条件を付け加えないと, 例えば自己交叉がある場合が除外できなくなる. 授業では, 位相に関する部分をサボっていたので, この条件をはっきりと説明するのを忘れてしまった...

(解答例 2) $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を

$$F(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2\right)^2 + z^2 - 1$$

とおく. F は原点を除けば C^∞ 級であり, $M=\{F=0\}$ である. F の微分が M 上で 0 でないことを言えばよい. 実際,

$$DF(x,y,z)=2\left((\sqrt{x^2+y^2}-2)\tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\sqrt{x^2+y^2}-2)\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad z\right)$$

であり, 原点 $(0,0,0)$ と $\sqrt{x^2+y^2}=2, z=0$ となる点が M の上にないことから, DF が 0 でないことが従う.

問題 3. (1) $T_{(x,y)}M=\{(v,w)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\mid w=DF(x)v\}$ であることは容易にチェックできる.

(2) (解答例 1) f の拡張 $\widetilde{f}$ を $\widetilde{f}(x,y)=y$ で定める. $df_{(x,y)}$ は $D\widetilde{f}$ の $T_{(x,y)}M$ への制限である.

$$D\widetilde{f}(v,w)=w, \qquad (v,w)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$$

であるから,

$$df_{(x,y)}=0\iff \text{すべての } v\in\mathbf{R}^n \text{ について } DF(x)v=0$$

である. すなわち f の臨界点は, F の微分が消える点を x として, $(x,F(x))$ となる点である.

(解答例 2) $g\colon\mathbf{R}^n\to M$ を $g(x)=(x,F(x))$ で定めると, g は M の座標を与えている. 従って, $f\circ g$ の微分が消える点を x としたとき, $g(x)$ が f の臨界点である. $f\circ g(x)=F(x)$ だから, f の臨界点は, F の微分が消える点を x として, $(x,F(x))$ となる点である.