幾何学II試験問題解答

問題 1. 点 $(0,0,a)$, $(0,0,b)$ 以外では, M は $x^2+y^2=f(z)^2$ で表わされる. $F(x,y,z)=x^2+y^2-f(z)^2$ とおくと,

$$DF_{(x,y,z)}=\begin{pmatrix}2x & 2y & -2f(z)f'(z)\end{pmatrix}$$

である. $f(z)>0$ であるから, $x=y=0$ となることはありえない. したがって $DF_{(x,y,z)}$ は $M\setminus\{(0,0,a),(0,0,b)\}$ では 0 でなく, そこでは M は多様体になる.

次に $(0,0,a)$ の近傍で考える. $z=a$ の十分近くでは f は単調増加であるから逆関数 g が存在する. すると $(0,0,a)$ の近傍で M は

$$z=\begin{cases}g(\sqrt{x^2+y^2}) & (x,y)\neq(0,0)\\ a\end{cases}$$

で与えられる. この式の右辺を $G(x,y)$ で表わすとき, M は $(0,0,a)$ の近傍で G のグラフである. したがって, G が C^1 級であることを証明すればよい.

$(x,y)\neq(0,0)$ のとき

$$\frac{\partial G}{\partial x}=g'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial G}{\partial y}=g'(\sqrt{x^2+y^2})\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

g は区間 $(0,\delta)$ で定義され, $\lim_{y\to0}g(y)=a$ となっている. さらに, $\lim_{z\to a}f'(z)=+\infty$ であるから, $\lim_{y\to0}g'(y)=0$ である. $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は $(x,y)\to(0,0)$ のときに有界であることに注意すれば, $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ はともに 0 に収束する. これに注意して, $G(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ で微分可能で, 偏微分 $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ がともに 0 であることを言えば G が C^1 級であることになる. これはほぼ明らかであるので証明は略す.

$(0,0,b)$ の近傍でも同様に示されて, M は C^1 級の多様体になる.

注意. 前半部だけが出来ているものも半分出来ていると判断した. また, 多様体の定義をチェックしているかどうかは, 厳しく見た. 例えば, '写像 φ を*** と定義すれば座標になる' と書いてあるような答案が数多く見られたが, φ の微分が単射になっているとことをチェックしていなければ正解とはみなさなかった.

問題 2. S^n 上の関数 $f(x_1,\dots,x_{n+1})=x_1^2+\cdots+x_m^2$ は, 右辺の式そのままで $\mathbf{R}^{n+1}$ 上の関数と思える. これも同じ f で表わす. その微分は

$$Df_{(x_1,\dots,x_{n+1})}=\begin{pmatrix}2x_1 & \cdots & 2x_m & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

で与えられる. 一方, 接空間 $T_{(x_1,\dots,x_{n+1})}S^n$ は

$$\left\{\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_{n+1}\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_{n+1}\end{pmatrix}=0\right\}$$

で与えられ, $df_{(x_1,\dots,x_{n+1})}$ は $Df_{(x_1,\dots,x_{n+1})}$ の $T_{(x_1,\dots,x_{n+1})}S^n$ への制限である．これが 0 となるための必要十分条件は, $\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_{n+1}\end{pmatrix}$ と直交していれば, $\begin{pmatrix}2x_1 & \cdots & 2x_m & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$ とも直交するということだから,

$$\begin{pmatrix}2x_1 & \cdots & 2x_m & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_{n+1}\end{pmatrix}$$

となる実数 λ が存在することに他ならない．これは

$$\begin{cases} x_1 = \cdots = x_m = 0 & (\lambda = 0) \\ x_{m+1} = \cdots = x_{n+1} = 0 & (\lambda = 2) \end{cases}$$

のいずれかである．

注意. これは単純な計算問題であるので厳しく採点した．$x_1 = \cdots = x_m = 0$ か $x_{m+1} = \cdots = x_{n+1} = 0$ のいずれか一方しか解が見つかっていないものは 0 点とした．

問題 3. $x \in L$ が f の臨界点であるから $\operatorname{rank} df_x < \dim M$ である．したがって

$$\operatorname{rank} d(g \circ f)_x = \operatorname{rank}\left(dg_{f(x)} df_x\right) \leq \operatorname{rank} df_x < \dim M \leq \dim N$$

であり, x は $g \circ f$ の臨界点でもある．ただし, 最初の不等号 $\leq$ では「**事実**. $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$」を用いた．

注意. $\dim L = \dim M = \dim N$ を (暗黙のうちに) 仮定して, $\det d(g \circ f)_x = \det dg_{f(x)} \det df_x = 0$ だから x は $g \circ f$ の臨界点でもある, と議論しているものが何人かあった．これは (甘いが) 半分できていると判断した．

問題 4. M は $\mathbf{R}^m$ に入ってる (埋め込まれている)C^∞ 級多様体とし, $\dim M = n$ とする．$a \in M$ に対し, $\mathbf{R}^n$ の開集合 V から a を含む $\mathbf{R}^m$ の開集合 U への C^∞ 級写像 $g\colon V \to U$ であって,

1. $g(V) = U \cap M$ で, g を V と $U \cap M$ の間の写像と思ったときに同相写像であり,
2. Dg_t はすべての $t \in V$ にたいして単射である

の二つの条件を満たすものが存在する．このとき g の逆写像 $\varphi\colon U \cap M \to V$ を a の回りの**座標**という．

注意. (1) 座標ベクトル場は, 授業では言葉の説明がなかったという指摘があったので, 採点はしないことにした．

(2) 多様体の開集合 U と $\mathbf{R}^n$ の開集合 V の間の C^∞ 級微分同相写像 $\varphi\colon U \to V$ のことを**座標**という, という答案が多々あった．(もしくは C^∞ 級微分同相写像の代わりに, 単に同相写像であるとか.) しかし, 多様体からの/への写像が C^∞ 級であるということを定義するために, 座標を使うので循環論法になる可能性がある．すなわち, 座標を合成して $\mathbf{R}^n$ の開集合からの/への写像として, C^∞ 級であるものを C^∞ 級と定義するとするので, 上のような座標の定義はできないのである．(来学期に扱う抽象的な多様体では, これが C^∞ 級写像の唯一つの定義である.) ただし $\mathbf{R}^m$ に埋め込まれた多様体の場合には, $\mathbf{R}^m$ の開集合からの

C^∞ 級写像に拡張できるとか, $\mathbf{R}^m$ への写像と思って (すなわち包含写像を合成して) C^∞ 級である, といって多様体の間の写像が C^∞ 級であることを定義することができる. したがって, 座標を用いずに C^∞ 級写像を定義することも可能である. しかし, このような説明なしに単に $\varphi\colon U \to V$ が C^∞ 級微分同相であるとだけ書いた答案には半分の点しか与えないことにした.