幾何学II試験問題

担当: 中島 啓

2003年1月24日 (金) 10:30〜11:50 (80分)

問題 1 C^∞ 級関数 $y = f(z)$ は区間 (a, b) 上で定義されており, 次の性質を持つとする.

1. 正の値を取る.
2. $\lim_{z\to a} f(z) = 0 = \lim_{z\to b} f(z)$, $\lim_{z\to a} f'(z) = +\infty$, $\lim_{z\to b} f'(z) = -\infty$

f のグラフに点 $(y, z) = (0, a), (0, b)$ を加えた図形を, $\mathbf{R}^3$ の中の yz 平面に書くことにする. この図形を z 軸の回りに 360 度回転させてできる図形を M とするときに, M が C^1 級多様体であることを証明せよ. ただし C^1 級多様体とは, 授業でやった C^∞ 級多様体の定義において, C^∞ 級のところを C^1 級に置き換えて定義されるものである.

問題 2 n 次元球面 $\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ 上の関数 $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \cdots + x_m^2$ を考える. ただし, $m \le n$ とする. このとき, f の臨界点をすべて求めよ.

問題 3 L, M, N は多様体で, $\dim M \le \dim N$ であるとする. $f\colon L \to M$, $g\colon M \to N$ はともに C^∞ 級写像であるとする. $x \in L$ が f の臨界点であるとき, $g \circ f$ の臨界点でもあることを証明せよ. (線形代数の結果を用いるときは, **事実**とはっきり書いて明示すること. たとえば, 「事実. 行列 A が可逆である必要十分条件は, その行列式 $\det A$ が 0 でないことである」などのようにする.)

問題 4 多様体 M 上の座標とは何か? また, 座標ベクトル場とは何か? 定義を書け. (数学的なものでない定義の '意味' を説明するのではない. 「M の点と数を対応させることである」というのではダメ.)