微分幾何学Iテスト

担当: 中島 啓

2004年2月3日 (火)

部分点が与えられる場合があるので, 途中まででも解答を書くこと.

問題 1. 地球の正確な地図を書くことはできないという. その理由を書け.

問題 2. (x,y) 平面内の領域 D で定義された Riemann 計量

$$g = G(dx^2 + dy^2)$$

を考える. G は D 上の正の値をとる C^∞ 級関数である. g のガウス曲率が

$$K = -\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial^2 \log G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log G}{\partial y^2}\right)$$

で与えられることを証明せよ.

問題 3. $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ に同値関係 $\sim$ を

$$(x,y) \sim (x+n, (-1)^n y), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

で定義し, 商空間 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}/\sim$ を E とする. E から $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ への写像 π を $(x,y) \mapsto x \mod \mathbf{Z}$ で定義する. $\pi\colon E \to S^1$ は, ベクトル束となる. (これは証明しなくてよい.)

(1) E の切断は, $\mathbf{R}$ 上の関数 $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ で, $f(x+n) = (-1)^n f(x)$ をみたすものに他ならない.

$$\frac{\nabla}{dx} f = \frac{df}{dx}$$

と定義すると, ∇ は E の接続であることを証明せよ.

(2) 0 の上のファイバーの点 $(0,y) \mod \sim$ を, S^1 の曲線 $c\colon [0,1] \to S^1$ ($c(t) = t \mod \mathbf{Z}$) によって, $c(1) = 0$ の上のファイバーの点まで (∇ に関して) 平行移動したものを求めよ.

(3) E と ∇ は, 自明束と自明接続 $S^1 \times \mathbf{R}$, d と同型であるか？