微分幾何学 I 演習問題

担当: 中島 啓

2003 年 12 月 16 日 (火)

問題 1. (x, y) 平面内の半径 1 の円の内部 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ に Riemann 計量 g を

$$g = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

によって定義する. 注意するまでもないが $dx^2 + dy^2$ は $\mathbf{R}^2$ の標準的な内積である. このとき g のガウス曲率 K を求めよ.

問題 2. 関数 $z = f(x, y)$ のグラフの表わす曲面 $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$ を考える. z 軸の正の方向に向き (法ベクトル) を取ったときに, M の平均曲率とガウス曲率を求めよ.

問題 3. V を $\mathbf{R}$ 上の線型空間とし, 二つの四次多重線型形式 $R_1, R_2\colon V \times V \times V \times V \to \mathbf{R}$ が曲率テンソルの対称性

$$R_i(X, Y, Z, W) = -R_i(Y, X, Z, W), \quad R_i(X, Y, Z, W) = -R_i(X, Y, W, Z)$$
$$R_i(X, Y, Z, W) + R_i(Y, Z, X, W) + R_i(Z, X, Y, W) = 0,$$

をみたしているとする. $(i = 1, 2)$ もしも

$$R_1(X, Y, X, Y) = R_2(X, Y, X, Y)$$

がすべての $X, Y \in V$ について成り立てば, $R_1 = R_2$ であることを示せ.

問題 4. $L \to M$ を直線束, すなわち階数が 1 のベクトル束とする. L^* をその双対束とするとき, テンソル積 $L \otimes L^*$ が自明束 (と同型) であることを示せ. また, ∇ を L の接続とし, ∇^* を L^* に誘導される接続とするとき, $L \otimes L^*$ に誘導される接続が自明接続であることを示せ.

問題 5. トーラスの接束 (tangent bundle) が自明束 (と同型) であることを示せ. S^2 の接束 (tangent bundle) が自明束 (と同型) でないことを示せ.

問題 6. $E \to N$ をベクトル束とし, ∇ をその上の接続とする. $f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とし, f^*E を誘導束, $f^*\nabla$ を誘導接続とする. ∇, $f^*\nabla$ の曲率を R^∇, $R^{f^*\nabla}$ とするとき

$$R^{f^*\nabla}(X,Y)e = R^\nabla(df_xX, df_xY)e$$

が, $X, Y \in T_xM$, $e \in (f^*E)_x \cong E_{f(x)}$ について成り立つことを証明せよ. ただし, e は左辺では $(f^*E)_x$ の元と思い, 右辺では $E_{f(x)}$ の元と思っている.

問題 7. 次は正しいか？ 正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.

(1) (M,g) を n 次元リーマン多様体とする $(n \geq 2)$. 各点 $p \in M$ に対し, その近傍 U で定義された座標系 $(x_1, \ldots, x_n)$ であって

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$$

となるものが存在する. ここで, δ_{ij} はクロネッカーのデルタで, $i = j$ のとき 1, そうでないとき 0 となる定数である.

(2) $\pi\colon E \to M$ を階数が r の多様体 M 上のベクトル束とし, 各点 $x \in M$ のファイバー $E_x = \pi^{-1}(x)$ には, (正定値の) 内積 $h_x\colon E_x \times E_x \to \mathbf{R}$ が定められていて, 次の意味で h_x は x に対して滑らかに依存しているとする.

- E の任意の切断 s, t に対して M 上の関数 $x \mapsto h_x(s(x), t(x))$ は, C^∞ 級である. (以後, この関数を単に $h(s,t)$ で表わす.)

上の性質を満たすような内積の族 $\{h_x\}_x$ を E の内積といい, 単に h で表わす.

このとき, 各点 p 毎にその近傍 U で定義された局所自明化 $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbf{R}^r$ であって,

$$h(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

となるものが存在する. ここで, e_i は, $\mathbf{R}^r$ の第 i 成分のみが 1 で他の成分は 0 である座標ベクトルを E_i としたときに,

$$x \longmapsto \varphi^{-1}(x, E_i)$$

で与えられる E の (U 上で定義された) 切断である.

問題 8. $\pi\colon E \to M$ を多様体 M 上のベクトル束とし, 問 7.(2) のように E の内積 h が与えられているものとする.

(1) E の接続 ∇ が h を保つとは, 任意の切断 s, t とベクトル場 X に対して

$$X \cdot h(s,t) = h(\nabla_X s, t) + h(s, \nabla_X t)$$

が成り立つときを言う.

∇ の曲率 R が歪対称であることを示せ. すなわち,

$$h(R(X,Y)s, t) + h(s, R(X,Y)t) = 0$$

が任意の切断 s, t と任意のベクトル場 X, Y に対して成り立つ.

(2) S を E の部分ベクトル束とする. すなわち, S は M 上のベクトル束であって (射影を $\pi_S\colon S \to M$ で表わす), C^∞ 級写像 $i\colon S \to E$ であって, 次を満たすものが存在する.

1. $\pi \circ i = \pi_S$ となる,

2. 各点 $x \in M$ 毎に, ファイバーの間に誘導される写像 $i\colon S_x \to E_x$ は, 単射な線形写像である.

以後, i は省略して, S は E の部分多様体であると見なす.

このとき, E_x における S_x の内積 h_x に関する直交補空間を $S_x^\perp$ とし, x を動かして集めたものを $S^\perp = \bigcup_{x\in M} S_x^\perp$ で表わす. $S^\perp$ は, M 上のベクトル束となり, E の部分ベクトル束になる. (これは証明しなくて構わない.)

(1) のような h を保つ接続 ∇ に対して, s を S の切断とするときに s の共変微分を

$$\nabla_X s = \nabla'_X s + \alpha(X,s), \qquad \nabla'_X s \text{ は } S \text{ の切断で, } \alpha(X,s) \text{ は } S^\perp \text{ の切断}$$

と二つの成分に分解する. このとき, 次を証明せよ.

- ∇' は S の接続であり, 計量 h を S に制限して出来る計量を保つ.
- $\alpha(X,s)$ は, $\mathrm{Hom}(S,S^\perp)$ に値を持つ 1 次微分形式 α を用いて $\alpha(X,s) = \alpha(X)s$ と書ける. ただし右辺は, $\mathrm{Hom}(S,S^\perp)$ の切断 $\alpha(X)$ を (局所的に) 行列値関数, S の切断 s を (局所的に) ベクトル値関数と思ったときに, 行列とベクトルの掛け算である.

(3) 上の状況で, ∇' の曲率を R' で表わし, s, t を S の切断とすると,

$$h(R(X,Y)s,t) = h(R'(X,Y)s,t) + h(\alpha(X)s,\alpha(Y)t) - h(\alpha(X)t,\alpha(Y)s)$$

が成り立つことを証明せよ.

問題 9. S^2 の北極 N と, 赤道上の二点 P, Q を取る. P と Q が球面の中心に関してなす角を θ とする. N を出発し P まで大円を進み, P から Q まで赤道を進み, さらに Q から N まで大円でもどる閉曲線を考える. この閉曲線に沿って N における接ベクトル $v \in T_N S^2$ を平行移動して, $Pv \in T_N S^2$ を定義する. P は $T_N S^2$ の線形変換を定めるが, これを具体的に求めよ.

問題 10. (1) (M,g) を向きづけられたコンパクトな 2 次元多様体とし, TM をその接束 (tangent bundle) とする. 各接空間 T_xM において, 正の向きに 90° 回転させる線形変換 J_x を考え, $J_x^2 = -1$ であることから, $\sqrt{-1}$ を掛けることを J_x を作用させることと考えて, T_xM に (1 次元) 複素ベクトル空間の構造を入れる. TM は, 階数が 1 の複素ベクトル束である. Levi-Civita 接続 ∇ は, この複素ベクトル束の接続とみなせること (すなわち複素線形であること) を示せ.

(2) ∇ を複素ベクトル束の接続とみなしたときの曲率を R とする. R は $TM \otimes T^*M$ に値をもつ 2-form であるが, 問 4. より, (複素数値)2-form と思うことができる. g の体積要素 dV を

$$dV(e_1,e_2) = 1 \qquad e_1,\, e_2 \text{ は正の向きの正規直交基底}$$

で定義する. K を g のガウス曲率とする. このとき次を示せ.

$$KdV = \frac{\sqrt{-1}}{2} R$$

(3) (ガウス・ボンネの定理)

$$\frac{1}{2\pi} \int_M KdV = \chi(M)$$

を示せ. $\chi(M)$ は M のオイラー数である. 定義を知らなければ, それを調べ, また, それが $c_1(TM) \in H^2(M, \mathbf{R})$ を基本類 $[M] \in H_2(M, \mathbf{R})$ と pairing を取ったものであることをチェックして上を示せ.