問題 1. 地球の正確な地図を書くことはできないという. その理由を書け.

答と解説 1. 授業で説明した通り, 球面と平面のガウス曲率が異なること, ガウスの驚きの定理により, ガウス曲率がリーマン計量のみから決まることに注意すればよい.

問題 2. (x, y) 平面内の領域 D で定義された Riemann 計量

$$g = G(dx^2 + dy^2)$$

を考える. G は D 上の正の値をとる C^∞ 級関数である. g のガウス曲率が

$$K = -\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial^2 \log G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log G}{\partial y^2}\right)$$

で与えられることを証明せよ.

答と解説 2. $X = \partial/\partial x$, $Y = \partial/\partial y$ とおく. 以下, 偏微分を右下に偏微分する変数をつけて表わす.

$$2g(\nabla_X X, X) = Xg(X, X) = G_x, \qquad 2g(\nabla_Y X, X) = Yg(X, X) = G_y,$$
$$g(\nabla_X X, Y) + g(X, \nabla_X Y) = Xg(X, Y) = 0, \qquad \nabla_X Y = \nabla_Y X \quad ([X, Y] = 0)$$

より,

$$\nabla_X X = \frac{1}{2G}\left(G_x X - G_y Y\right) = \frac{1}{2}\left((\log G)_x X - (\log G)_y Y\right)$$

を得る. $\nabla_Y Y$ は, $x \leftrightarrow y$, $X \leftrightarrow Y$ とすればよい. また, 同様の計算により

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X = \frac{1}{2}\left((\log G)_y X + (\log G)_x Y\right)$$

を得る. これにより

$$g(R(X, Y)Y, X) = -\frac{G}{2}\left((\log G)_{xx} + (\log G)_{yy}\right)$$

を得る. あとは, $X/\sqrt{G}$, $Y/\sqrt{G}$ が正規直交基底であることに注意すればよい.

方針は多くのものができていたが, (答が与えられているにも関わらず) 計算間違いをしていたものが非常に多く見られたことは残念である. 特に多く見られた間違いは, ∇XX において G で割ることを忘れているもの.

問題 3. $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ に同値関係 $\sim$ を

$$(x, y) \sim (x+n, (-1)^n y), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

で定義し, 商空間 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}/\!\sim$ を E とする. E から $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ への写像 π を $(x, y) \mapsto x \mod \mathbf{Z}$ で定義する. $\pi\colon E \to S^1$ は, ベクトル束となる. (これは証明しなくてよい.)

(1) E の切断は, $\mathbf{R}$ 上の関数 $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ で, $f(x+n) = (-1)^n f(x)$ をみたすものに他ならない.

$$\frac{\nabla}{dx} f = \frac{df}{dx}$$

と定義すると, ∇ は E の接続であることを証明せよ.

(2) 0 の上のファイバーの点 $(0, y) \mod \sim$ を, S^1 の曲線 $c\colon [0,1] \to S^1$ $(c(t) = t \mod \mathbf{Z})$ によって, $c(1) = 0$ の上のファイバーの点まで (∇ に関して) 平行移動したものを求めよ.

(3) E と ∇ は, 自明束と自明接続 $S^1 \times \mathbf{R}$, d と同型であるか？

答と解説 3. (1) まず f が $f(x+n) = (-1)^n f(x)$ を満たせば df/dx も $df/dx(x+n) = (-1)^n df/dx(x)$ を満たすことに注意する. したがって E の切断は, E の切断に移される. あとはライプニッツ則をチェックすればいいが, これは明らか. ちなみに, S^1 上の任意のベクトル場は $X = X_0 d/dx$ (X_0 は S^1 上の C^∞ 級関数, すなわち $\mathbf{R}$ 上の関数で $X_0(x+n) = X_0(x)$ をみたすもの) と表わされるので $\nabla_X f = X_0 df/dx$ となる.

(2) $f\colon [0,1] \to E$ を c に沿った E の切断とする. これは, $f(t) = (t, f(t))/\!\sim$ という同一視によって, $[0,1]$ から $\mathbf{R}$ への関数に他ならない. ただし, $(1, f(1)) \in E_1$ は, 同値関係によって $(0, -f(1)) \in E_0$ と見なされる. f が c に沿って平行であるとは, $\frac{\nabla}{dt} f \circ (c) = 0$ であることである. 上の定義から, f が定数であることに他ならない. よって $(0, y)$ を平行移動したものは, (t, y) となり, $t = 1$ では $(1, y) \sim (0, -y)$ となる.

(3) 自明束と自明切断 $(S^1 \times \mathbf{R}, d_0)$ については, $(S^1 \times \mathbf{R})_0$ の元を c に沿って平行移動しても, 同じ元に戻ってくる. もしも (E, ∇) が $(S^1 \times \mathbf{R}, d_0)$ と同型であったとしたら, この性質は保たれるので, 上の (2) と矛盾する.

もしくは, 授業で説明したように, E の任意の切断はどこかで必ず 0 になることを示してもよい.

(1) は, だいたいできていた. (2) は計算には難しいところがなく, 平行移動という ことが分かっているかどうかを確かめる問題であった. 多くのものが無回答だったのは残念である.