幾何学Iテスト

担当: 中島 啓

2003年7月23日(水)

部分点が与えられる場合があるので, 途中まででも解答を書くこと.

問題 1. n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n$ と $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の直積の部分集合

$$M = \{([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (y_0, \dots, y_n) \in \mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1} \mid x_i y_j = x_j y_i \quad (i, j = 0, \dots, n)\}$$

を考える.

(1) M が $\mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1}$ の部分多様体であることを証明せよ. 何次元か?

(2) M から第二成分への射影を $f\colon M \to \mathbf{R}^{n+1}$ とする. f の臨界点をすべて求めよ.

問題 2. Lie 群 G が C^∞ 級多様体 M に C^∞ 級に左から作用しているとする. すなわち, ある C^∞ 級写像 $\Phi\colon G \times M \to M$ があって, $\Phi(g,p) = g\cdot p$ と書いたときに, $(gh)\cdot p = g\cdot(h\cdot p)$ $(g, h \in G,\ p \in M)$ が成り立っているものとする.

G の Lie 環の元 X に対して, M 上のベクトル場 $X^\#$ を

$$X^\#_p = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(-tX)\cdot p \qquad\qquad p \in M$$

によって定義する. このとき, $[X,Y]^\# = [X^\#, Y^\#]$ を示せ.