問題 1. n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n$ と $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の直積の部分集合

$$M = \{([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (y_0, \dots, y_n)) \in \mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1} \mid x_i y_j = x_j y_i \quad (i, j = 0, \dots, n)\}$$

を考える.

(1) M が $\mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1}$ の部分多様体であることを証明せよ. 何次元か？

(2) M から第二成分への射影を $f\colon M \to \mathbf{R}^{n+1}$ とする. f の臨界点をすべて求めよ.

答と解説 1. (1) まず, 関係式 $x_i y_j = x_j y_i$ $(i, j = 1, \dots, n)$ には余分なものが多く含まれていることに注意する. 例えば $x_0 \neq 0$ とすると, $i = 0$ についての式から $y_j = x_j y_0 / x_0$ となるが, これが満たされていれば他の i についても

$$x_i y_j = \frac{x_i x_j y_0}{x_0} = \frac{x_j x_i y_0}{x_0} = x_j y_i$$

と満たされる. よって満たされるべき式の数は ($i = 0$ の場合のみの)n 個となる. ただし, $x_a \neq 0$ のときは, $i = a$ の場合の式の n 個を取ってこなければいけないことには注意する必要がある.

この考察ができていないで, いきなり写像の微分を計算し始めるものが多く見られたが, これではうまくいかない. 与えられた式の意味は, $(y_0, \dots, y_n)$ が, 射影空間の点 $[x_0 : \cdots : x_n]$ の定める $\mathbf{R}^{n+1}$ の 1 次元部分空間に入っているということである. これに注意すれば, 上の議論は見えてくるであろう.

$\mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1}$ の開集合 U_a を $\{x_a \neq 0\}$ で定める. U_a における座標 $\varphi\colon U_a \to \mathbf{R}^{2n+1}$ を

$$([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (y_0, \dots, y_n)) \mapsto (x_0/x_a, \dots, \widehat{x_a/x_a}, \dots, x_n/x_a, y_0, \dots, y_n)$$

で定める. 逆は

$$(w_0, \dots, \widehat{w_a}, \dots, w_n, y_0, \dots, y_n) \mapsto \left([w_0 : \cdots : \overset{i\,\text{番目}}{1} : \cdots : w_n], (y_0, \dots, y_n)\right)$$

である. また写像 $F\colon U_a \to \mathbf{R}^n$ を

$$F([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (y_0, \dots, y_n)) = (y_0 - \frac{x_0 y_a}{x_a}, \dots \widehat{y_a - \frac{x_a y_a}{x_a}}, \dots, y_n - \frac{x_n y_a}{x_a})$$

で定義する. 始めに注意した通り $U_a \cap M = F^{-1}(0)$ である. すべての a に対して F の微分が全射であることをいえば, M が部分多様体であることが従う. $F \circ \varphi^{-1}$ は

$$F \circ \varphi^{-1}(w_0, \dots, \widehat{w_a}, \dots, w_n, y_0, \dots, y_n) = (y_0 - w_0 y_a, \dots \widehat{y_a - w_a y_a}, \dots, y_n - w_n y_a)$$

である. TEX できれいに書けないので微分の行列表示は省略するが,

$$\frac{\partial (F \circ \varphi^{-1})}{\partial y_i} = {}^t(0, \dots, \overset{i\,\text{番目}}{1}, \dots, \overset{a\,\text{番目}}{\text{除く}}, \dots, 0) \quad (i \neq a)$$

から, 微分は全射である. 次元は $n+1$ である.

部分多様体であることでなく, M が単に多様体であることを座標を入れることで示している答案が多く見られた. その場合は, 包含写像がはめ込みであること (微分が単射であること) を示し, さらに像への同相写像であることを示す必要がある.

(2) $U_a \cap M$ において写像 f の微分を考える. 接空間を上の $F \circ \varphi^{-1}$ の微分の kernel として計算してもよいが, $U_a \cap M$ において

$$\psi\left([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (y_0, \ldots, y_n)\right) = \left(x_0/x_a, \ldots, \widehat{x_a/x_a}, \ldots, x_n/x_a, y_a\right)$$

が座標になっていること (証明は略) を使う方が楽である.

$$f \circ \psi^{-1}(w_0, \ldots, \widehat{w_a}, \ldots, w_n, y_a) = \left(w_0 y_a, \ldots, \overset{a\text{ 番目}}{y_a}, \ldots, w_n y_a\right)$$

であり, その微分は

$$\begin{bmatrix} y_a & 0 & \ldots & 0 & w_0 \\ 0 & y_a & \ldots & 0 & w_1 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & 0 & y_a & w_n \end{bmatrix} \qquad \text{ただし } a \text{ 行目は } \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列式を計算すると, a 行目を一番下にもっていけばすぐに分かるように, 微分が可逆でないのは $y_a = 0$ となる点である. M の定義から他の y_i もすべて 0 となる. a を動かして, 臨界点の集合は

$$\{([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (0, \ldots, 0)) \in M \subset \mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1}\}$$

である.

f の逆像を考えよう. $(y_0, \ldots, y_n) \neq 0$ のときはその点を通る直線 (の定める一次元部分空間) が逆像で, 一点からなる. $(y_0, \ldots, y_n) = 0$ のときは射影空間 $\mathbf{R}P^n$ が逆像になる. つまり, M は $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点を射影空間 $\mathbf{R}P^n$ で置き換えてできる空間である. このような空間は ($\mathbf{R}^{n+1}$ の原点における)**blowup** と呼ばれる.

問題 2. Lie 群 G が C^∞ 級多様体 M に C^∞ 級に左から作用しているとする．すなわち, ある C^∞ 級写像 $\Phi\colon G\times M\to M$ があって, $\Phi(g,p)=g\cdot p$ と書いたときに, $(gh)\cdot p=g\cdot(h\cdot p)$ $(g,h\in G,\,p\in M)$ が成り立っているものとする．

G の Lie 環の元 X に対して, M 上のベクトル場 $X^\#$ を

$$X^\#_p=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(-tX)\cdot p \qquad\qquad p\in M$$

によって定義する．このとき, $[X,Y]^\#=[X^\#,Y^\#]$ を示せ．

答と解説 2. 点 $p\in M$ を止め, 写像 $\varphi_p\colon G\to M$ を $\varphi_p(g)=g^{-1}\cdot p$ で 定義する．明らかに C^∞ 級である．Lie 環の元 X は, 左不変ベクトル場とみなしたとき, X と $X^\#$ が φ_p 関係にあることを示す．

$X^\#$ の定義 $X^\#_p=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(-tX)\cdot p$ $(p\in M)$ における X は単位元における値であり, X を左不変ベクトル場と考えたときには X_e と書かれるべきものである．

$g\in G$ に対し

$$d\varphi_p(X_g)=d\varphi_p(dL_g(X_e))=d(\varphi_p\circ L_g)(X_e)$$

である．ただし $L_g\colon G\to G$ は左移動である．$(\varphi_p\circ L_g)(h)=\varphi_p(gh)=(gh)^{-1}\cdot p=h^{-1}g^{-1}\cdot p$ に注意すると,

$$\begin{aligned}d(\varphi_p\circ L_g)(X_e)&=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(tX)^{-1}g^{-1}\cdot p=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(-tX)\cdot(g^{-1}\cdot p)\\&=X^\#_{g^{-1}\cdot p}=X^\#_{\varphi_p(g)}\end{aligned}$$

であり, 上と合わせて X と $X^\#$ が φ_p 関係にあることが分かった．よって前にやった演習問題により

$$d\varphi_p([X,Y]_g)=[X^\#,Y^\#]_{\varphi_p(g)}$$

が分かる．特に, $g=e$ とおき, $d\varphi_p([X,Y]_e)$ が $[X,Y]^\#_p$ に他ならないことに注意して,

$$[X,Y]^\#_p=[X^\#,Y^\#]_p$$

が示された．p は任意であるから, 結論が従う．

始めの φ_p の定義は天下り的であるが, 最初に思い付く $\psi_p(g)=g\cdot p$ でやってみると, $X^\#_{\psi_p(g)}=X^\#_{g\cdot p}=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(-tX)\cdot g\cdot p=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\psi_p(R_g(\exp(-tX)))=-d\psi_p dR_g(X_e)$ となって, X が**右**不変でないとうまくいかないことが分かる．(右不変でもまだ符号がまずいが.) 右不変と左不変を取り替えるには, 逆元を取る写像 $g\mapsto g^{-1}$ を合成すればよいから, 上の φ_p になる．

また, $M=G$ のときを考えてみると, $X^\#_g=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\exp(-tX)g=-dR_g(X_e)$ であるから, $X^\#$ が, $-X_e$ を**右**移動したものであることにも気付くであろう．そこで右不変ベクトル場と左不変ベクトル場を写像による関係で結ぶにはどのような写像であればいいだろうか, と考えて逆写像に思いあたるはずである．