幾何学I演習問題

担当: 中島 啓

2003年4月16日(水)

問題 1. n 次元球面 $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ が C^∞ 級微分可能多様体であることを, 授業に従って $2(n+1)$ 個の座標系を具体的に与えることで示せ.

問題 2. 2次元トーラス $T^2 = [0,1] \times [0,1]/\sim$ が C^∞ 級微分可能多様体であることを, 座標系を具体的に与えることで示せ. ただし $\sim$ は $(x,0) \sim (x,1)$, $(0,y) \sim (1,y)$ $(x, y \in [0,1])$ で生成される同値関係である. すなわち, 両はじを示された関係によって貼りあわせたものである.

問題 3. n 次元球面 $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ の北極と南極からの立体射影 $\varphi^+ \colon S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbf{R}^n$, $\varphi^- \colon S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\} \to \mathbf{R}^n$

$$\varphi^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (\frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}}),$$

を考える. $\varphi^\pm$ は S^n の座標系を与えることを 示せ. (時間があれば問題 **1** の座標との座標変換が微分同相であることもチェックせよ.)

問題* グラスマン多様体が微分可能多様体であることを証明せよ.

略解 1. $U_i^\pm = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_i > 0\}$ $(i=1,\dots,n+1)$ とおく. (複号同順) $U_i^\pm$ は S^n の開集合であり, $S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i^+ \cup U_i^-$ と覆っている. $\varphi_i^\pm \colon U_i^\pm \to B_1$ を

$$\varphi_i^\pm(x_1,\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_{i-1},\widehat{x_i},x_{i+1},\dots,x_{n+1}) \qquad (x_i \text{ は除く})$$

で定義する. ただし B_1 は $\mathbf{R}^n$ の半径 1 の球 (の内部) である. $\varphi_i^\pm$ の逆写像 $(\varphi_i^\pm)^{-1}$ は

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1,\dots,y_n) = (y_1,\dots,y_{i-1},\pm\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}, y_i,\dots,y_n)$$

で与えられる. これらはともに連続であり, したがって $\varphi_i^\pm$ は同相写像である. さらに $U_i^\pm \cap U_j^\pm$ $(i \neq j)$ を考える. (複号同順とは限らない.) このとき $\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$ は

$$(y_1,\dots,y_n) \longmapsto (y_1,\dots,y_{i-1},\pm\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}, y_i,\dots,\widehat{y_j},\dots,y_n)$$

で与えられ, 微分可能である. 逆写像は i と j を入れ替えたもので, やはり微分可能である. したがって, $\varphi_i^\pm$ で S^n の座標系が定まった.

略解 2. 記号を簡単にするために T^2 の点は, $(0,1)$ 区間の実数の組でなくとも, それを整数づつずらしたものも同じ点を表わすと約束する. (言い換えれば, $T^2 = \mathbf{R}^2/\sim$ で, $(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow (x-x',y-y') \in \mathbf{Z}^2$ である. また $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ とも書く.) このとき $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$, $\tilde{U}_3$, $\tilde{U}_4$ をそれぞれ $(0,1)\times(0,1)$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times(0,1)$, $(0,1)\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ という $\mathbf{R}^2$ の開集合を T^2 に落としたものを U_1, U_2, U_3, U_4 とする. これらは T^2 の開集合で, 全部で T^2 を覆っている. また, $\varphi_i \colon U_i \to \tilde{U}_i$ という全単射が作り方から自然に定まっている. これらは同相写像である. さらに座標変換 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ が微分同相であることは容易にチェックできる.

略解 3. $\varphi^\pm$ の逆写像は

$$(\varphi^\pm)^{-1}(y_1,\dots,y_n) = (\frac{2y_1}{\sum y_\alpha^2+1},\dots,\frac{2y_n}{\sum y_\alpha^2+1},\pm\frac{\sum y_\alpha^2-1}{\sum y_\alpha^2+1})$$

である. したがって

$$\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1}(y_1,\dots,y_n) = (\frac{y_1}{\sum y_\alpha^2},\dots,\frac{y_n}{\sum y_\alpha^2})$$

である. $(y_1,\dots,y_n) = (0,\dots,0)$ は座標の定義される開集合の共通部分 (を φ^- でうつしたもの) からのぞかれているので, これは微分可能である. 逆も同様に微分可能である.